

开放审稿稿件

近场的分类及其与静态场的关系

许书侨^{1,2} 詹影¹ 唐誉婷¹ 韩德专¹(¹ 重庆大学物理学院, 重庆 401331;² 南京大学物理学院, 江苏 南京 210093)

摘 要 在局域源所产生的电磁场中, 以波长为特征长度可以引入两个重要概念: 近场和远场。准静态场是另一重要概念。回溯人类对电磁场的认识过程, 从一开始分立的静态电/磁场, 到麦克斯韦方程组所描述的完整的运动电磁场, 经历了认识的飞跃。有限的时间频率是运动电磁场的重要特征量。本文以不同维度的辐射源为例, 分析了其产生的近场和远场, 区分了两种产生近场的机制, 并阐述了近场和静态场的关系。最后, 本文以介质平板中的法布里-珀罗共振和金属颗粒的表面等离子激元共振为例, 揭示了不同维度下近场对能量储存的贡献及其与不同维度微腔的品质因子巨大差异的直接关系。

关键词 近场; 静态场; 品质因子; 维度性; 格林函数

A CLASSIFICATION OF NEAR FIELD AND ITS RELATIONSHIP WITH STATIC FIELD

XU Shuqiao^{1,2} ZHAN Ying¹ TANG Yuting¹ HAN Dezhan¹(¹ School of Physics, Chongqing University, Chongqing, Sichuan 401331; ² School of Physics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093)

Abstract For the electromagnetic field generated by local sources, near and far fields are two key concepts which are introduced according to the characteristic wavelength. On the other hand, human understanding of electromagnetic fields has undergone a leap in understanding, from initially discrete static electric/magnetic fields to the complete moving electromagnetic fields described by Maxwell's equations. A finite temporal frequency is a significant characteristic quantity of dynamic field. This paper takes radiation sources of different dimensions as examples to analyze their near-field and far-field generation, distinguish the two mechanisms of near-field generation, and explain the relationship between near-field and static field. Finally, taking Fabry-Perot resonance in dielectric flat plates and surface plasmon resonance of metal particles as examples, the contribution of near-field energy storage in different dimensions and its direct relationship with the significant differences in quality factors of microcavities in different dimensions were revealed.

Key words near field; static field; quality factor; dimensionality; Green's function

19 世纪下半叶, 由于麦克斯韦方程组给出电场、磁场和光这些不同现象的统一描述, 人们认识到运动的电磁场可以以波的形式向远处传播, 因

此出现了无线通信等技术革新, 极大地利用了电磁场远场的辐射能力。近年来, 电磁场的近场部分也越来越为人关注, 以至于形成了近场光学这

收稿日期: 2024-01-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(12074049)。

通信作者: 韩德专, 重庆大学物理学院教授, dzhan@cqu.edu.cn。

引文格式: 许书侨, 詹影, 唐誉婷, 等. 近场的分类及其与静态场的关系[J]. 物理与工程, 2024, 34(2): 153-160.

Cite this article: XU S Q, ZHAN Y, TANG Y T, et al. A classification of near field and its relationship with static field[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(2): 153-160. (in Chinese)

一分支。不同于远场,电磁场中的近场部分会随着传播距离急剧衰减,导致其在远场不贡献能流,因此在考虑辐射的时候被略去。例如,传统的黑体辐射理论就不考虑近场,而一旦近场参与热辐射可以打破普朗克黑体辐射定律^[1]。另外,光学成像一般都是利用远场,因为近场信息的丢失会导致阿贝衍射极限^[2]。考虑到近场也携带辐射源的信息,人们发明了可以超过衍射极限的扫描近场光学显微镜^[3]。除此之外,近场光学还在表面增强拉曼散射^[4,5]、近场光操控^[6]等领域有诸多应用。

针对近场和远场的概念,本文将澄清以下问题:(1)不向远处传播能量的电磁场是否都是近场?(2)假如把它们都称为近场,它们是否具有同样性质还是可以按不同性质再分类?我们以点源和面源为例,证明根据辐射源的维度可以将近场分为两类。对于点辐射源,其产生的总的电磁场可以拆分为多项,包括可以向远处辐射能量的部分,称之为远场;以及不能向远处传输能量的部分,即近场^[7-9]。其中近场按照传播距离的高阶幂次衰减。而对于面辐射源,比如在光栅衍射、表面等离子激元等情况中存在于表面附近的振荡电荷/电流,其总场也可能随着垂直于表面的距离衰减。与点辐射源不同的是,总场通常按照距离的 e 指数衰减,其中并不包含远场成分,或者说其远场成分为零。这种面源产生的近场与点源产生的近场是不相同的。本文进一步探讨了以上两类近场和静态场的关系,即点源产生的近场中随距离衰减速度最快的部分对应于静态场;而面源所产生的近场,仅在低频($\omega \rightarrow 0$)和大波矢($k \rightarrow \infty$)极限下能与静态场对应。点源和面源近场行为的差异,导致二者近场部分储存能量的能力差异,进而体现在一维和三维光学微腔的品质因子^[10]的差异之上。一维的法布里-珀罗(Fabry-Perot, 缩写为FP)^[8]由于没有近场参与,所储存的能量仅仅靠高折射率带来的局部场增强,因此品质因子很低;而三维的金属纳米颗粒,由于近场的存在,它们存储了能量但是不贡献于辐射损耗,故其品质因子远远高于一维FP腔。品质因子的高低,或者说光学模式寿命的长短,近场在其中扮演了重要角色。

1 理论分析与结果

在电动力学教科书中^[8,9],对电磁波辐射的处理,一般引入标势和矢势,采用洛伦兹规范得到达朗贝尔方程。辐射源作为非齐次项,出现在方程右边。对于辐射场的求解,先考虑点源得到推迟势,然后对局域的电荷或电流源进行积分。为简单起见一般先考虑频率固定做简谐振动的源,此时达朗贝尔方程转化为亥姆霍兹方程。教科书中大多只考虑在三个方向都局域的辐射源(对应点源),较少考虑在两个(对应面源)或者一个维度(对应线源)无限延展的辐射源^[8]。本文将以点源和面源为例,讨论其所激发的电磁场中的远场、近场成分,分析其中近场的差异及其与静态场的关系。图1为三维空间的三种源的示意图。

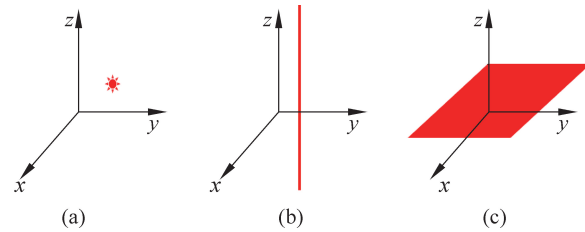


图1 三维空间的三种源
(a) 点源; (b) 线源; (c) 面源

1.1 点源

若考虑三个维度都局域的电荷/电流源,如图1(a)所示,其标势和矢势可以写成如下的积分形式^[9]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

其中积分中源的部分仅为 $\mathbf{r}'$ 的函数,积分核实际上就是点源对应的标量格林函数。考虑到源分布在有限的区域,将势在 $\mathbf{r}'=0$ 处展开,则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \dots \right) dV' \quad (1)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \dots \right) dV' \quad (2)$$

上式括号中的第一项对应单极项,第二项对应电/磁偶极项,依此类推得到多极项。实际上多极展开要点就是括号中所示的对格林函数的展开。因为亥姆霍兹方程对应的点辐射源的格林函数为 $G_{H,0}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ (下标 0、1、2 表示维度,分别表示点源、线源和面源),其在 $\mathbf{r}'=0$ 处展开式,即

$$G_{H,0}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{e^{ikr}}{r} + \dots \right) \quad (3)$$

由于上面格林函数展开式在分母(称之为振幅)和分子(相位)中位矢 $\mathbf{r}$ 都是变量。因此在求梯度时,“ ∇ ”算符既可以作用于振幅,又可以作用于相位。当“ ∇ ”算符作用于相位时,振幅随 r 的衰减幂次不变,这样得到的项可以保持 r^{-1} 衰减,从而单位立体角内能保持能流不变,因此能辐射能量到无穷远处,即为远场;当“ ∇ ”算符作用于振幅中的位矢时,振幅随 r 的幂次的衰减速度超过 r^{-1} ,这些项对应的场不能向无穷远处辐射能量,故而称之为近场。

我们可以将亥姆霍兹方程对应的点源的格林函数与静态场对应的泊松方程的格林函数的展开式作比较。后者展开式为^[9]

$$G_{L,0}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots \right) \quad (4)$$

可以发现如果公式(3)中的“ ∇ ”算符全部作用于振幅部分,即可得到静态场的对应项^[8]。这是因为此时相位项保持 e^{ikr} 不变,此项在 $k \rightarrow 0$ 时趋向于 1;其他所有项因为都对 e^{ikr} 有求导所以都带有 k 的幂次,在 $k \rightarrow 0$ 时趋向于 0,只有静态场的对应项能保持有限大而非零。有时候我们也可保持 k 的低阶幂次,对应于波动方程中对时间 t 的低阶求导项,也称之为准静态近似(QSA)^[7,12]。

注意,教科书中处理原点附近的局域源时,其核心就是对作为积分核的格林函数采取泰勒展开。不同阶次的泰勒级数与不同级次的多极子对应。但我们也可坚持处理其极限情况:辐射源始终位于原点处,以上格林函数的展开形式就不必要。但是,单极和偶极对应的点源有简单的狄拉

克 δ 函数的形式,更高的多极子对应的点源涉及狄拉克 δ 函数的求导,反而比较麻烦,故一般较少采用。

我们可以利用电偶极辐射来验证以上论述。静止的电偶极子电场分布^[8]为

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{r^3} \quad (5)$$

下标 s 表示 static。频率为 ω 的电偶极子的电场分布^[7]为

$$\mathbf{E}_d = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{k^2}{r} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \times \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}] \right\} \quad (6)$$

下标 d 表示 dynamic。可以发现,静止的电偶极子电场与简谐运动的电偶极子电场中具有 r^{-3} 幂次的近场项对应,后者多出一个 $e^{-i\omega t}$ 。当 $k \rightarrow 0$ ($k = \omega/c$) 时,简谐运动的电偶极子产生的总电场中只剩下与静态场对应的项。由于随时间缓慢变化的相位因子 $e^{-i\omega t}$ 的存在,而称为准静态。

1.2 面源

面源如图 1(c) 所示,假定其平行于 x - y 面。面电荷源在静电场中作为常见例子出现^[10]。假设一面电荷密度为 σ 的均匀带电的无限大平面,取一个对称的柱状高斯面就可知其产生的电场为 $\mathbf{E} = \pm \mathbf{e}_z \sigma / 2\epsilon_0$ 形式,其电势为 $V = |z| \sigma / 2\epsilon_0$ 形式。由于静电势满足泊松方程,所以很容易知道与面源对应的格林函数具有正比于 $|z|$ 的形式。对于运动的电荷/电流面源,可以直接推广静电场的结果,但只有少数教材讨论了这个问题^[8]。随着二维材料研究的兴起^[11],面源越来越常见。简单起见,以下我们以金属/空气界面处的表面等离激元^[8]为例来介绍面源。

表面等离激元是一种表面模式。它实际上有两层含义:表面等离子体(surface plasmon,缩写为 SP)与表面等离激元(surface plasmon polariton,缩写为 SPP)。前者表示在表面附近趋肤深度范围之内,存在一薄层运动的电荷;后者表示由此种电荷运动产生并与之同时存在的电磁波。如果趋肤深度非常小,可以把 SP 理解为面电荷/电流源,而 SPP 为对应的电磁场。SPP 在垂直界面呈 e 指数衰减,但平行于界面可以传播,其波矢为

$k_{//} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_m / (\epsilon_0 + \epsilon_m)}$ 。其中, ϵ_0 和 ϵ_m 分别表示空气和金属的介电常数。假定 ϵ_m 可用 Drude-Lorentz 模型^[8] 描述, 可以得到如图 2 所示的色散关系曲线。注意当 $\epsilon_m < 0$ 时, $k_{//} > \omega/c$, 故 SPP 色散曲线在光线 $k_{//} = \omega/c$ (即空气中给定频率 ω 的平面波所能取的最大波矢, 亦即掠入射时的情况) 之下。其波矢垂直分量 $k_{\perp} = i\kappa_{\perp}$ 为虚数, $\kappa_{\perp}$ 在金属和空气两侧取值不同, 场的形式可表示为

$$\begin{cases} H = H_{//} e^{ik_{//} \cdot r_{//} - \kappa_{\perp} |z|} \\ E = (E_{//} \hat{e}_{//} + E_{\perp} \hat{e}_{\perp}) e^{ik_{//} \cdot r_{//} - \kappa_{\perp} |z|} \end{cases} \quad (7)$$

从式(7)可看到, 电磁场沿 z 方向指数衰减, 且和 $|z|$ 有关。这和上文中提到的静电荷面源类似, 表明在 $z=0$ 处源的存在会带来场的不连续性。特别地, $E_{\perp}$ 分量的存在与面电荷源相关, 而 $E_{//}$ 分量的存在与面电流源相关。与点源不同的是, 式(7)不可能如式(6)中一样, 拆分成远场和近场项, 其中远场携带传到无穷远处的能流, 而近场不携带。由于式(7)所给出的是消逝场, 在目前的近场光学中一般就称之为近场, 此时近场就是总场。如果要和式(6)的拆分类比, 我们需要定义“远场=0”, 才能满足“总场=近场+远场”的关系。

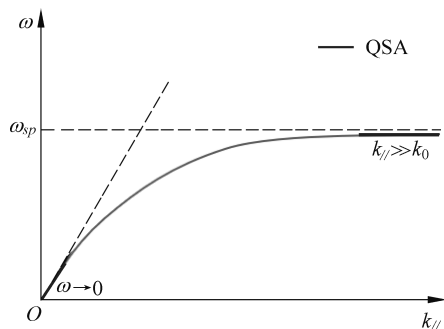


图2 表面等离激元色散关系曲线

以上的讨论, 也可以从面源对应的亥姆霍兹算子的格林函数来理解。位于 $z=0$ 处的面源对应的格林函数为

$$G_{H,2}(x, y, z) = -\frac{i}{2k_z} e^{-\kappa_z |z|} e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (8)$$

其形式与式(7)中给出的 SPP 场的形式非常类似。与教科书中给出的面源^[8] 略有不同的是, 这里讨论的面源允许沿着平面方向存在一个传播的平面波的形式。根据波矢平行分量与总波矢的关系,

可以分为两种情况: 一种对应 SPP, 满足 $k_{//} > \omega/c$, 此时 z 方向波矢 k_z 为虚数, 沿 z 方向不是传播的平面波而是消逝波; 另一种是普通的面源, 满足 $k_{//} < \omega/c$, z 方向波矢 k_z 为实数, 上述格林函数可视为从原点出发沿 $\pm z$ 以相反方向传播的两束平面波。因此 $k_{//} = \omega/c$ 是一个临界值, 小于这个值的时候原来的消逝波会变为传播的平面波释放出来。此时则与 SPP 恰恰相反, 总场中只有远场部分没有近场部分。或者说假设“总场=近场+远场”这个关系, 需要定义“近场=0”。这种情况在后面关于 FP 腔品质因子部分还会继续讨论。

以上是有关面源的近场和远场的探讨。此外, 面源还有其他与点源的不同之处。例如, 点源的近场部分可以和静态场对应。但是, 作为面源的一个特例, SPP 是一种典型的波动现象, 一般不能满足静态场的拉普拉斯方程。仔细分析可知, 在两种特殊情况下它仍然可以近似满足拉普拉斯方程, 适用于准静态近似。第一种是平庸的情况, 即频率 $\omega \rightarrow 0$, 同时波矢 $k_{spp} \rightarrow 0$, 对应图 2 的原点附近。这种情况下退化为静态场, 与点源是完全相同的。另一种极端情况是 $\omega \rightarrow \omega_{sp}$, ω_{sp} 亦称为表面等离体频率, 是 $k_{spp} \rightarrow \infty$ 的渐近频率。此时的波矢平行分量趋于无穷大, 电磁波的群速度趋于零, 反而具有静态场特性, 证明如下。

考虑 SPP 处于空气中的电磁波部分, 其仍然满足空气中的波动方程, 其对应的亥姆赫兹算符仍为: $\nabla^2 + k_0^2$, 此处我们用 k_0 替代之前的波矢 k , 是为了避免和金属中的波矢混淆。假如 SPP 的平行方向波矢 $k_{//} \gg k_0$, 其垂直界面的波矢分量的虚部 $\kappa_{\perp} = \sqrt{k_{//}^2 - k_0^2} \gg k_0$ 。由于此时 SPP 波矢的两个分量一实一虚, 均远远大于 k_0 , 故其对应的亥姆赫兹算子 $\nabla^2 + k_0^2$ 实际上可近似为拉普拉斯算子 ∇^2 , 因而亦适用于准静态近似 (即 k_0 很小, 可以忽略)。注意, 准静态近似并不等同于长波近似 ($\lambda \rightarrow \infty$)。二者的区别在此处也是显然的, 即由拉普拉斯算子 ∇^2 得到的近似解虽然是准静态的, 但其在面内传播而且波矢 $k_{//}$ 非常大, 恰恰不能忽略其波动性。

1.3 线源

线源是一种过渡情况, 如图 1(b) 所示。它既具有点源的特征, 也具有面源的特征^[8]。我们同

样可以用格林函数来理解它的特性。线源下亥姆霍兹方程的格林函数为

$$G_{H,1}(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|, z) = \frac{e^{ik_z z}}{4i} H_0^{(1)}(k_{\parallel} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \quad (9)$$

其中, $H_0^{(1)}$ 表示零阶第一类汉克尔函数。该格林函数中的 $H_0^{(1)}$ 部分赋予其类似点源的特征, 我们可以类似点源根据电磁场随着 ρ 的变化分拆其远场和近场部分。另一方面, 沿着线源方向的平面波因子则类似于面源具有可以沿着平面方向传播的性质。一个例子是沿着金属纳米线也存在 SPP 的元激发。

1.4 小结

将辐射场视为远场, 总场减去辐射场剩下的部分视为近场, 则总场中近场和远场的构成情况依赖于源的维度性。对于点源, 总场中 $1/r$ 衰减的部分为远场, 剩下的近场中衰减最快的部分 ($1/r^3$) 与静态场对应。因此准静态近似下得到的是总场中局域性最强的一部分。对于面源, 情况则不相同。当其沿着平面的波矢分量大于总波矢 ($k_{\parallel} > k$), 其总场中只有近场部分没有远场; 当 $k_{\parallel} < k$ 时, 其总场中只有远场部分没有近场。SPP 作为前者的典型例子, 也是近场光学中的主角之一。这种近场和点源产生的近场不同, 它不能和静态场建立一般的对应。只有在低频 ($\omega \rightarrow 0$) 和大波矢 ($k_{\text{spp}} \rightarrow \infty$) 这两个极限下才能采用准静态近似。

2 应用举例

由于近场不具备向远处辐射功率的能力, 因此近场可以有效地维持辐射源的能量。为了衡量储存于近场的能量之于远场的辐射功率, 品质因子 (Q) 是一个合适的物理量, Q 值越高, 就意味着相对于储存的能量来说所需付出的能量耗散越少^[10]。其定义如下

$$Q = \omega \frac{\text{Energy stored}}{\text{Power loss}} = \frac{\omega}{\Delta\omega} \quad (10)$$

本文暂不考虑介质本身的损耗, 只考虑辐射损耗。根据上文电磁场近场和远场行为的分析, 维度性决定了近场行为的差异, 因此必然会体现在不同维度微腔的品质因子之上。我们以图 3 所示的两个模型为例, 来估计二者的品质因子。在图 3(a) 中, 考虑无限大介质平板中的 FP 共振模

式, 设想一个局域的共振模式, 随之产生向两头辐射的场使其能量泄漏到无穷远。假定平板的厚度为 L , 面积为 A , 折射率为 n , 仅考虑正入射时最低阶的 FP 模式, 平板内电场分布约为

$$\mathbf{E}_{\text{ins}} = E_0 \cos(\pi x/L) e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z$$

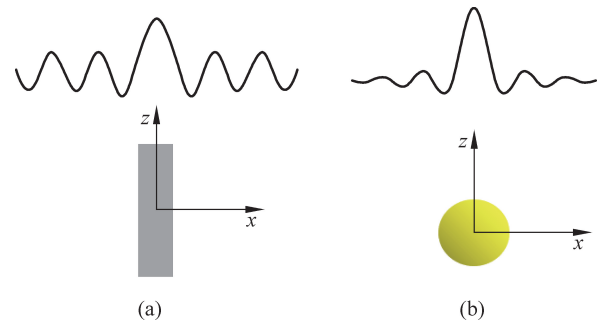


图 3

(a) 介质薄膜的 FP 模式; (b) 金属球的米氏共振模式

平板内一个周期的平均能量密度为

$$\langle \omega \rangle = \int \left\langle \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}_{\text{ins}}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}_{\text{ins}}^2 \right\rangle dx = \frac{1}{4} \epsilon |E_0|^2 \quad (11)$$

平板外的平均能流密度为

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_{\text{out}}^* \times \mathbf{H}_{\text{out}}] = \frac{k_0 |E_0|^2}{2\mu_0 \omega} \mathbf{e}_x \quad (12)$$

不考虑介质的磁响应 ($\mu = \mu_0$) 和热损耗, 该系统能量主要存储在介质平板中, 辐射是损耗的唯一途径。利用式 (11) 和式 (12), 我们可以估算该系统的品质因子为

$$Q_{\text{FP}} \sim \omega \frac{AL \langle \omega \rangle}{2A \langle \mathbf{S} \rangle} = \frac{n\pi}{4} \quad (13)$$

其中, n 为介质折射率。我们发现, 介质薄膜辐射的品质因子正比于介质薄膜的折射率^[12], 其数量级为 $O(1)$ 。

对于图 3(b) 金属小球的米氏共振, 设金属球半径为 a , 介电常数为 ϵ 。为了简化起见, 考虑真空波长远大于其半径, 则实际上类似瑞利散射, 可以采用准静态近似来分析^[12,13], 其内部的电场为

$$\mathbf{E}_{\text{ins}} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

其等效的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

电偶极子的远场辐射总功率为

$$P_{\text{rad}} = \oint |\langle \mathbf{S} \rangle| r^2 d\Omega = \frac{\omega^4 \mu_0 |\mathbf{p}|^2}{12\pi c} \quad (14)$$

电偶极子的近场中,磁场有一项正比于 r^{-2} ,电场有两项分别正比于 r^{-2} 和 r^{-3}

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{ik e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r^2} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}] \quad (15)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}] \quad (16)$$

不考虑平方后带来的交叉项,我们先计算电场正比于 r^{-3} 项对应的能量

$$\langle W_3 \rangle = \iiint_{\Omega} \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}_3|^2 dV = \frac{|\mathbf{p}|^2}{24\pi\epsilon_0 a^3} \quad (17)$$

当 $\epsilon + 2\epsilon_0 \approx 0$ 时发生电偶极子的表面等离激元共振 (SPR)。可以估算该共振模式的远场辐射对应的品质因子为

$$Q_{\text{rad}} \approx \omega \frac{\langle W_3 \rangle}{P_{\text{rad}}} = \frac{\lambda^3}{16\pi^3 a^3} \quad (18)$$

我们可以对比一下平板和金属小球两个系统的品质因子,即式(13)和式(18)。 Q_{sp} 与介质的折射率 n 在同一量级,通常量级为 $O(1)$; 而 Q_{ball} 量级为 $O(\lambda^3/a^3)$, 与波长关系极大。对于我们所考虑的亚波长模型,波长远大于小球半径,因此 $Q_{\text{ball}} \gg 1$ 。注意,金属不可避免地存在欧姆损耗,由此导致 SPR 模式品质因子有所降低。因此,也可以说上式估计的是该模式品质因子的上限。至于欧姆损耗会对 Q_{ball} 带来多大的影响,下文会进一步讨论。我们还可以对比式(15)和式(16)给出的电场中的两项分别对应的近场能量,以及小球内电场的能量。电场正比于 r^{-2} 项的储存的能量为

$$\langle W_2 \rangle = \iiint_{\Omega} \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}_2|^2 dV = \frac{\pi |\mathbf{p}|^2}{2\epsilon_0 a \lambda^2} \quad (19)$$

$\langle W_2 \rangle$ 与 $\langle W_3 \rangle$ 的比值为

$$\frac{\langle W_3 \rangle}{\langle W_2 \rangle} = \frac{\lambda^2}{12\pi^2 a^2} \quad (20)$$

小球内电场储存的能量为

$$\langle W_{\text{ins}} \rangle = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{4} \epsilon |\mathbf{E}_{\text{ins}}|^2 = \frac{\pi a^3 \epsilon}{3} \left| \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \right|^2 \quad (21)$$

$\langle W_{\text{ins}} \rangle$ 与 $\langle W_3 \rangle$ 的比值为

$$\frac{\langle W_3 \rangle}{\langle W_{\text{ins}} \rangle} = \frac{2(\epsilon - \epsilon_0)^2}{9\epsilon\epsilon_0} \quad (22)$$

从式(20)可以看出,若波长远大于半径,则 $\langle W_3 \rangle$ 远大于 $\langle W_2 \rangle$ 。考虑 Drude-Lorentz 模型,在 SPR 共振频率附近,金属小球的相对介电常数约为 -2 ,由式(22)知此时内部能量与近场能量相近。故知

在金属小球的模型中,近场和内部场存储了同量级的能量。以上理论同样适用于介质材料的 ϵ 很大的情况。同样由式(22)知小球的相对介电常数约为 $\epsilon \approx 6.34$ 时,近场和内部场存储了相同的能量。

以上理论还可以进一步计算金属材料由于欧姆损耗而产生的损耗功率

$$\begin{aligned} P_{\text{abs}} &= \iiint_{\Omega} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \rangle dV = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}] dV \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \omega \text{Im}(\epsilon) |\mathbf{E}_0|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

从式(23)可以看出金属小球的欧姆损耗也与内部电场大小成正比,其正比系数为 $\text{Im}(\epsilon)$ 。根据 ϵ 的实虚部的情况,由以上式子可以推断金属小球品质因子中吸收损耗与辐射损耗分别的贡献。

由式(14)及式(23)可知,在 SPR 共振频率处 ($\omega \approx \omega_p/\sqrt{3}$), P_{abs} 与 P_{rad} 的比值约为

$$\frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{rad}}} \approx \frac{9\sqrt{3}\lambda^3\gamma^3}{16\pi^3 a^3 \omega_p^3} \quad (24)$$

其中, ω_p 称为金属小球的体等离子频率, γ 为损耗因子。从式(24)可以看出 P_{abs} 与 P_{rad} 的比值正比于 $(\lambda^3/a^3) \cdot (\gamma^3/\omega_p^3)$ 。其亚波长性质,即 $\lambda/a \gg 1$, 与作为小量的欧姆损耗 γ 存在竞争关系。若 $\lambda/a = 20$, 则当 $\gamma/\omega_p \approx 0.16$ 时,金属小球的吸收损耗近似等于远场辐射损耗。

进一步计算金属小球品质因子中吸收损耗对应的品质因子为

$$Q_{\text{abs}} \approx \omega \frac{\langle W_3 \rangle}{P_{\text{abs}}} \approx \frac{\omega_p^3}{9\sqrt{3}\gamma^3} \quad (25)$$

由式(18)和式(25)可以得到金属小球在该共振频率处 ($\omega \approx \omega_p/\sqrt{3}$) 总的品质因子为

$$\begin{aligned} Q_{\text{total}} &\approx \omega \frac{\langle W_3 \rangle}{P_{\text{rad}} + P_{\text{abs}}} \\ &\approx \frac{1}{16\pi^3 (a/\lambda)^3 + 9\sqrt{3}(\gamma/\omega_p)^3} \end{aligned} \quad (26)$$

另外,上文中计算能量均假设 ϵ 在 SPR 附近色散比较小。若色散很大,即 $|d\epsilon/d\omega| \gg 1$, 则计算能量时需进一步考虑色散的影响。

从电磁场能流的分布入手,我们还可以进一步做分析。频率为 ω 的电偶极子产生的磁场分布为:

$$\mathbf{H}_d = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \quad (27)$$

从式(6)和(27)可以看出,电偶极子的总电场有三项,磁场有两项,计算平均能流密度时一共有6项。注意,上文所提到的在求电磁场的时候,如果“ ∇ ”算符作用于相位项 e^{ikr} ,就会得到 ik 的成正比系数。如果作用偶数次,该系数为实;作用奇数次,该系数为虚。如果总电场和磁场中的项的相位相差 $\pi/2$,则二者交叉乘积得到的能流时间平均值为0。由于这个原因,上述6项中有三项为零。由此可得远场的平均能流密度为

$$\langle \mathbf{S}_{\text{far}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_{\text{far}}^* \times \mathbf{H}_{\text{far}}] = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{p}|^2}{32\pi^2 c r^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_r \quad (28)$$

而近场总平均能流密度为

$$\langle \mathbf{S}_{\text{near}} \rangle = \langle \mathbf{S}_{\text{far}} \rangle + \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_3^* \times \mathbf{H}_{\text{far}} + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_{\text{near}}] \quad (29)$$

由式(6)和(27)可以看出,电场 $\mathbf{E}_{\text{far}}$ 方向为 $\mathbf{e}_\theta$ 方向, $\mathbf{H}_{\text{far}}$ 沿着 $\mathbf{e}_\varphi$ 方向,因此远场的能量沿着径向向外辐射[见式(28)];而对于近场,电场的近场项 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ [见式(15)、(16)]有 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 方向,而磁场的近场也在 $\mathbf{e}_\varphi$ 方向,因此近场的能流看似沿着径向 $\mathbf{e}_r$ 和角向 $\mathbf{e}_\theta$ 都有分布,然而式(29)右边后面两项的 $\mathbf{e}_\theta$ 分量恰好抵消,因此近场能流也是沿着径向。

3 结语

本文利用不同维度亥姆霍兹方程和泊松方程的格林函数,重点分析了点源与面源产生的两种近场的区别,同时也阐述了近场与静态场的关系。并以平板和微腔作为实例给出了近场在电磁体系中维持能量的重要作用。

致谢:作者之一(韩)感谢与周磊、王青和王振林教授的有益讨论和他们提供的意见。

参 考 文 献

- [1] HU L, ARVIND N, CHEN X Y, et al. Near-field thermal radiation between two closely spaced glass plates exceeding Planck's blackbody radiation law[J]. *Applied Physics Letters*, 2008, 92: 133106.
- [2] 赵凯华. 光学[M]. 重排本. 北京:北京大学出版社, 2017.
- [3] DURING U, POHL D W, ROHNER F. Near-field optical scanning microscopy[J]. *Journal of Applied Physics*, 1986, 59(10): 3318.
- [4] XU H X, ERIK J B, MIKAEL K, et al. Spectroscopy of single hemoglobin molecules by surface enhanced raman scattering[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83 (21): 4357-4360.
- [5] NIE S M, EMERY S R. Probing single molecules and single nanoparticles by surface-enhanced raman scattering[J]. *Science*, 1997, 275(21): 1102-1106.
- [6] BERTHELOT J, ACIMOVIC S S, JUAN M L, et al. Three-dimensional manipulation with scanning near-field optical nanotweezers[J]. *Nature Nanotechnology*, 2014(9): 295-299.
- [7] JACKSON J D. *Classical electrodynamics*[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2001.
- [8] 王振林. 现代电动力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2022.
- [9] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2008.
- [10] 赵凯华. 电磁学[M]. 4版. 北京:高等教育出版社, 2018.
- [11] NOVOSELOV K S, MISHCHENKO A, CARVALHO A, et al. 2D materials and van der Waals heterostructures[J]. *Science*, 2016(353): 6298.
- [12] LIN J, QIU M, ZHANG X Y, et al. Tailoring the line-shapes of coupled plasmonic systems based on a theory derived from first principles[J]. *Light: Science and Applications*, 2020(9): 158.
- [13] STEFAN A M. *Plasmonics fundamentals and applications* [M]. Berlin: Springer, 2007.

开放审稿意见(摘录)

韩德专:王老师,您好!差不多两周前您来重庆大学开会,我请教了您关于散射矩阵 poles 的问题。您提到的传统的路数和近十几年的发展,我正在了解和学习。另外,我和您提到我们一篇教学论文,关于近场和静态场的关系和概念辨析,修改好了,发给您请多指正!还有,不知是否适合发在《物理与工程》上面?谢谢!

韩德专:王老师,有空帮我们看看这篇合不合适发?

王青:肯定可以发,只是我先学习一下,因为您讨论的问题我也感兴趣,属于我电动力学教学的范畴,俺近水楼台先得月,先研究一下。

韩德专:好的,请多多指教!

王青:相当于主编直接评审一下哟,然后再推荐给编辑部。我后面边学边问啦。

韩德专:您客气了。

王青:我知道的辐射场都定义为场强按照 $1/R$ 衰减的项(或能量能流到无穷远的场),这个在您文中是只代表远场,还是也包括近场啊?

王青:您的辐射场的定义是什么呢?

韩德专:您这个问题很好。原本辐射应该仅指能跑出去的那部分,顾名思义。但是有了近场光学以后叫法有点儿混乱,有时指总场。也许辐射仅指远场辐射,总场分为

远场和近场两部分,这样合理一点。我再检查统一一下概念。

王青:进场叫法没问题,但那些非 $1/R$ 的项似乎不好再叫辐射场。

韩德专:是的,不是 radiation。

王青:作为教学文章,您把基础的部分只引一些文献似乎不够,因为读者一般不会去查文献。为了让您的文章的起点读者能接受,建议还是补充一些基本的内容,让读者能从他知道的结果(例如,麦克斯韦方程组,而不是现在直接的格林函数)出发看懂您的出发点。

韩德专:好的。

王青:目前您的文章是直接从格林函数出发开始讨论的,我们杂志的读者主要是教大学物理的老师,他们不一定熟悉格林函数的细节,需要一些基本的公式帮他们了解您的格林函数的出处。否则人家可能就不往下看了。

韩德专:好的,我在前面补一段麦克斯韦方程中有局部的辐射源是怎么处理的。

王青:最好能从郭硕鸿书的某个结果出发,毕竟此书是大家公认的电动力学教材。

韩德专:好的,引用一下教材的公式,增强可读性。

王青:我没太看出您后面的陈述是咋回答文章最前面提出的两个问题的。至少目前不是很清晰明确的回答。

王青:那两个问题提得很好,也是促使我想继续往下看的原因。可后面都是各种细节讨论,至少到最后缺少汇总对这两个问题的一个整体性的回答。

韩德专:哦,我再检查一下前后呼应。主要就是点源:总场=近场+远场;面源:总场=远场,或者近场。导致一般说的近场在一维和高维是不同的。二者的差异体现在微腔的品质因子上。FP腔没有近场协助储存能量,所以

品质因子低。金属纳米小球品质因子高,主要靠近场存储了能量。

王青:既然谈分类,就该给出明确的有多少类的信息,而不是一下就直接进入某几个类的具体细节。

韩德专:好的。

王青:在有了总的分类框架后,才好聚焦某个类,具体谈细节。

王青:您的分类是不是想按源的维度来分啊?

王青:如果是的话,那就涉及不同维度近场的共性是啥?不同之处又是啥?

王青:您文章的另一个焦点是谈静场与近场的关系,至少在文章的最后,能否脱离具体细节总结一下这些关系都是啥?

韩德专:是的。我们在厘清不同维度下说的近场是不一样的,这个概念需要澄清。

韩德专:我根据您的意见修改一下再发给您哈。谢谢您的宝贵意见!

韩德专:王老师,根据您的意见,我们修改了稿子。具体有:1. 加入了教科书中的关于辐射的背景简介,并从书中结果出发,对格林函数的相关讨论作了对接。2. 明确地给出了近场分类的结论,并用小结的方式突出了文章的结论。3. 尽可能地引用了教科书中的公式和内容。4. 明确了远场即是辐射场,避免了辐射场与总场概念的混用。上面是干净的 word 版和高亮的 pdf 版。感谢您的宝贵意见,请您抽空再看看指导指导!

王青:看了一下,应该可以啦。之后的流程请编辑部处理。