

“橡皮筋上的球”运动规律的研究

刘 旭 赵泉翔 王振宇 刘 伟
(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

摘 要 本文对 2022 年 IYPT 的一道题目“橡皮筋上的球”进行了研究,在对橡皮筋扭转力和阻尼作线性假设的条件下,建立了二自由度线性阻尼自由扭振模型描述双球橡皮筋运动规律,建立了弹性圆轴的剪切形变力学模型描述橡皮筋的力学性质,并给出解析解。本文解释了双球橡皮筋系统的“钟摆”行为,定量探究了此行为与相关参数的依赖关系;通过 Tracker 软件得到了相关实验数据,验证了模型的正确性,并对实验中的等时性破缺现象进行了半定量解释,对非线性公转半径 r 随时间 t 的变化进行了定性分析。

关键词 橡皮筋;球;线性扭振;剪切形变;振动

RESEARCH ON THE MOVEMENT LAW OF “BALLS ON AN ELASTIC BAND”

LIU Xu ZHAO Quanxiang WANG Zhenyu LIU Wei

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract A topic of 2022 IYPT “Balls on an Elastic Band” is studied. Under the condition of linear assumption of torsion force and damping of rubber band, a two-degree of freedom linear damping free torsional vibration model is established to describe the motion law of elastic band with double ball. A shear deformation mechanical model of elastic circular axis is established to describe the mechanical properties of elastic band, and the analytical solution is given. The pendulum behavior of the double ball rubber band system is explained, and the dependence between the behavior and the related parameters is explored quantitatively. The Tracker software was used to obtain relevant experimental data to verify the correctness of the model. The constant period breaking phenomenon in the experiment was explained semi-quantitatively, and the change of the nonlinear revolution radius r with time t was analyzed qualitatively.

Key words elastic band; ball; linear torsional vibration; shear deformation; vibration

2022 年 IYPT 有一道题目是有关“橡皮筋上的球”运动现象的研究:“Connect two metal balls with an elastic band, then twist the elastic band and put the balls on a table. The balls will begin

收稿日期: 2023-07-01

通讯作者: 王振宇, 北京理工大学物理学院实验师, wangzy@bit.edu.cn; 刘伟, 北京理工大学物理学院高级实验师, liuwei73150@bit.edu.cn.

引文格式: 刘旭, 赵泉翔, 王振宇, 等. “橡皮筋上的球”运动规律的研究[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 130-136.

Cite this article: LIU X, ZHAO Q X, WANG Z Y, et al. Research on the movement law of “Balls on an elastic band”[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 130-136. (in Chinese)

to spin in one direction, then in the other. Explain this phenomenon and investigate how the behaviour of such a “pendulum” depends on the relevant parameters.”

分析题目发现,我们需要一根弹力带将两个硬质球连接起来提供扭转恢复力矩。常见的弹力带一般有织物弹力带、橡胶弹力带(又称橡皮筋)两类,此外也可使用金属材料的扭转弹簧(又称扭簧)提供扭转恢复力矩。考虑到织物弹力带由于其纺织工艺存在经纬向的差别带来的各向异性,其虽具有出色的纵向伸缩弹性,但是其横向剪切弹性却并不好;并且考虑到实验可行性,硬质球直径在10mm量级,因此弹力带的长度和直径分别在10cm、1mm量级,长径比约100:1量级,这也是金属扭簧难以实现的。综上,可以完美符合实验要求的橡皮筋变成了实验的首选。

为了解题目,进行如下预实验:(1)用502胶水将单根橡皮筋与两个金属球连接;(2)手持球,扭转橡皮筋约几十圈,然后在橡胶垫上释放。观察到系统做周期性的扭转振动,两球会先向一个方向公转数周,再向相反的方向公转数周,如此反复几次直至系统能量耗尽,即双球橡皮筋系统呈现出“钟摆”振荡行为:小球的自转角度、公转角度、公转半径、公转线速度均呈现准期性的特征。

前人的研究主要针对橡皮筋拉伸与弹出建立的动力学数学模型^[1],球在振动弹性膜上反弹的动力学模型^[2]或者以扭曲实现扭转制冷的能量分析方法^[3]。本文通过构建理论动力学模型分析“橡皮筋上的球”,将橡皮筋与球视为一个系统整体分析,从理论力学力矩分析的角度将线性部分的模型进行定量计算,对“橡皮筋上的球”全新模型进行建模。

本文建立二自由度线性阻尼自由扭振模型描述双球橡皮筋系统的运动,建立弹性圆轴的剪切形变力学模型描述橡皮筋的力学性质,给出了系统的扭振周期的表达式。在实验中调整小球质量、半径、橡皮筋长度、并联橡皮筋条数等参数,并测量其扭振周期,对影响系统周期性的参数进行定量分析,反推出了橡皮筋的剪切模量,从多方面验证了理论的合理性。此外还发现双球橡皮筋系统运动周期的非等时性,认为非线性系统阻尼和橡皮筋的多阶盘绕是导致周期等时性破缺的两个主要因素,并做了相应的半定量分析。本文还对

公转半径 r 随时间 t 近似呈振荡衰减的关系以及系统能量耗散的来源进行了定性分析。

该实验虽然装置简单,但现象引人入胜,实际上双球橡皮筋系统的“钟摆”振荡行为中蕴含着极为丰富的力学知识,对该问题的研究不仅有助于同学们更深刻地理解理论力学,尤其是振动相关的知识,并且该问题所蕴含的非线性等内容更是当今控制科学与自动化领域的基础问题,对该问题的研究将增进人们对该领域的理解,也可以极大激发同学的学习和研究兴趣。

1 理论分析

设两球为质量均匀的球体,质量分别为 m_1, m_2 ,半径分别为 R_1, R_2 ,绕质心的转动惯量分别为 I_{10}, I_{20} ,绕地面接触点的转动惯量分别为 I_1, I_2 ,则有

$$\begin{cases} I_1 = I_{10} + m_1 R_1^2 = \frac{7}{5} m_1 R_1^2 \\ I_2 = I_{20} + m_2 R_2^2 = \frac{7}{5} m_2 R_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

为反映双球橡皮筋系统的“钟摆”振荡行为的主要特征,作以下简化假设:

(1) 主要关注小球的自转公转情况,不考虑径向运动的情况,忽略橡皮筋长度这一自由度的变化,令两小球绕橡皮筋分别转过的角度 θ_1, θ_2 为系统的广义坐标。

(2) 橡皮筋粘性阻尼线性假设:将橡皮筋在整个运动过程中的本构关系近似为线弹性,记橡皮筋扭转刚度系数为 k ,将小球所受橡皮筋的阻力矩近似为成正比于小球绕橡皮筋转动角速度的粘性阻尼,记橡皮筋阻力矩的粘性阻尼系数为 c 。

(3) 滚动阻尼线性假设:假设小球受到的除橡皮筋阻力矩以外的滚动阻力矩正比于小球绕质心转动惯量 I_{10}, I_{20} (也因此正比于绕地面接触点的转动惯量 I_1, I_2)和小球绕橡皮筋转动的角速度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 的乘积,故记其大小为 $\sigma I_1 \dot{\theta}_1, \sigma I_2 \dot{\theta}_2$,其中 σ 为比例系数。

基于以上假设,由相关理论力学知识,下面建立双球橡皮筋系统“钟摆”振荡行为的粘性线性阻尼扭振模型^[4-7]。

双球橡皮筋系统在线性阻尼作用下做二自由度的自由扭振,得到系统的扭振动力学方程为

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma I_1 + c & -c \\ -c & \sigma I_2 + c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

可简记为以下形式

$$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (3)$$

其中, M 为惯性矩阵, C 为阻尼矩阵, K 为刚度矩阵。

若系统无任何阻尼, 即阻尼矩阵 $C=0$ (即 $c=0$), 可以解得无阻尼时系统的两个扭振频率

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \sqrt{k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \end{aligned} \quad (4)$$

对应的特征向量

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = (1 \quad 1)^T \\ \phi^{(2)} = (I_2 \quad -I_1)^T \end{cases} \quad (5)$$

振型矩阵

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & I_2 \\ 1 & -I_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

求得主惯性矩阵 M_p 、主阻尼矩阵 C_p 、主刚度矩阵 K_p 如下

$$M_p = \phi^T M \phi = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & I_1 I_2 (I_1 + I_2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_p &= \phi^T C \phi \\ &= \begin{bmatrix} \sigma(I_1 + I_2) & 0 \\ 0 & \sigma I_1 I_2 (I_1 + I_2) + c(I_1 + I_2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$K_p = \phi^T K \phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k(I_1 + I_2)^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

注意到在振型矩阵的变换下, 不仅主惯性矩阵 M_p 、主刚度矩阵 K_p 是对角化的, 主阻尼矩阵 C_p 也被同时对角化了, 这是因为阻尼矩阵 C 恰好可以写成惯性矩阵 M 与刚度矩阵 K 的线性组合, 这与假设(2)(3)中假定橡皮筋粘性阻力矩和滚动阻力矩分别正比于角速度和转动惯量与角速度的乘积密切相关。

简正坐标应满足关系式

$$M_p \ddot{\theta}_p + C_p \dot{\theta}_p + K_p \theta_p = 0 \quad (10)$$

进而得到解耦的方程组

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_{p1} + \sigma \dot{\theta}_{p1} = 0 & (a) \\ \ddot{\theta}_{p2} + \left(\sigma + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) \dot{\theta}_{p2} + k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \theta_{p2} = 0 & (b) \end{cases} \quad (11)$$

式(11-a)是双球系统绕过双球的轴的刚体转动自由度(即两球同向扭振)动力学方程, 式(11-b)是双球系统绕过双球的轴相对转动自由度(即两球反向扭振)的动力学方程。

利用方程组写出一般解

$$\theta_p = (\theta_{p1} \quad \theta_{p2})^T = \begin{pmatrix} Be^{-\sigma t} + D \\ Ae^{-\beta t} \cos(\omega_r t + \delta) \end{pmatrix} \quad (12)$$

或表示为

$$\begin{aligned} \theta &= A \phi^{(1)} \theta_{p1} + B \phi^{(2)} \theta_{p2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (Be^{-\sigma t} + D) + \begin{pmatrix} I_2 \\ -I_1 \end{pmatrix} Ae^{-\beta t} \cos(\omega_r t + \delta) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\sigma + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{c}{\bar{I}} \right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2} = \sqrt{k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} - \frac{\left(\sigma + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{\bar{I}} - \frac{\left(\sigma + \frac{c}{\bar{I}} \right)^2}{4}} \approx \sqrt{\frac{k}{\bar{I}}} \left[1 - \frac{(\sigma \bar{I}^2 + c)^2}{8k\bar{I}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 令 $\bar{I} = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}$ 。解式(13)中的两项分别表示该二自由度系统系统的两个简正自由度, 第一项对应式(11-a)的解, 表示有阻尼情况下的双球系统绕过双球的轴的刚体转动(同步转动), 简正坐标 θ_{p1} 呈指数衰减; 第二项对应式(11-b)的解, 表示有阻尼情况下的双球系统绕过双球的轴相对转动, 即双球的相对扭转振动, 简正坐标 θ_{p2} 呈指数衰减的振荡。我们要研究的是系统在有阻尼情况下的双球的相对扭转振动自由度(以下简称扭振自由度), 即解的第二项。解中 A 、 B 、 D 、 δ 为待定常数 ω_r , 需通过初始条件确定。

为了得到橡皮筋扭转角度与恢复力矩的关系, 需对橡皮筋的扭转形变建立力学模型。保留橡皮筋横截面积 S 、橡皮筋原长 L 等关键参数, 对橡皮筋建立弹性圆轴的剪切形变模型, 该模型认为橡皮筋有一个等效截面圆半径 a , $S = \pi a^2$, 在扭转过程中形变均匀, 即原横截面保持形状、大小不变, 且横截面之间的间距不变^[8]。

橡皮筋的剪切应变公式为

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (16)$$

在形变均匀的条件下有 $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{L}$ 。综上可以得出恢复力矩

$$M = \int_0^a \gamma \cdot 2\pi\rho d\rho \cdot \rho = \frac{\pi G a^4}{2} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{GS^2}{2\pi L} \varphi = k\varphi \quad (17)$$

由此得到无阻尼时的扭振周期 τ_0 , 可近似作为系统扭振周期

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\frac{GS^2}{2\pi L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi}{G} \frac{\sqrt{mL}}{NS_0}} \\ &= \alpha \frac{\sqrt{IL}}{N} \end{aligned} \quad (18)$$

2 实验研究

实验中用到不同长短的橡皮筋, 不同大小、不同材质的球, 部分实验材料如图 1 中所示。实验方法为: 用摄像机以 120fps 的高帧率拍摄一次从开始运动到静止的完整视频, 将视频导入 Tracker 软件, 跟踪小球的运动, 获得运动数据, 并进行分析。



图 1 部分实验材料

改变小球半径 R 、质量 m 、橡皮筋长度 L 等参数, 采用多种参数组合, 测得扭振角度(自转角度) θ 、极角(公转角度) Θ 、极径(公转半径) r 、扭振周期 τ 、速率周期 $T = \tau/2$ 等, 并和理论结果对照。

T 为小球轨道运动速度(公转速度)从零开始到下一次零为止的时间间隔, 故称为速率周期; τ 是系统完成一个完整的扭转振动的周期, 每一个扭振周期包含正向、反向两个速率周期, 因此可以

认为速率周期 T 是扭振周期 τ 的一半。

2.1 公转角度和自转角度随时间的变化

将质量为 63.1g、半径为 12.5mm 的两个不锈钢球, 通过一根长度为 13.2cm 的橡皮筋用胶水固定的方式连接, 扭转 50 圈后释放, 拍摄运动视频并提取球的运动数据, 得到公转角度 Θ 随时间 t 变化的曲线如图 2 所示, 自转(扭振)角度 θ 随时间 t 变化的曲线如图 3 所示。

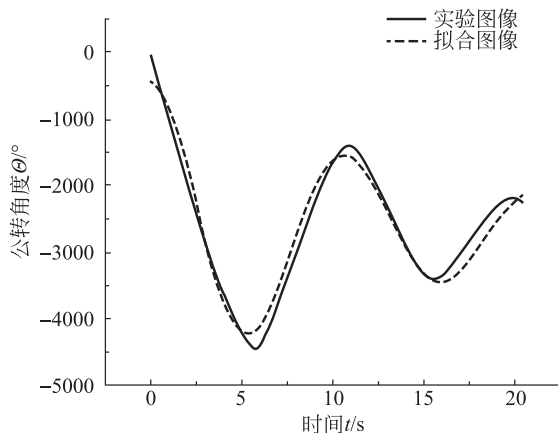


图 2 公转角度 Θ 随时间 t 的变化

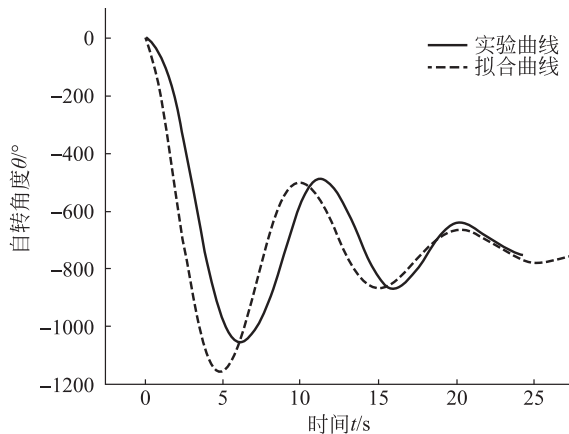


图 3 自转角度 θ 随时间 t 的变化

由理论分析部分可推导出公转角度在线性阻尼下衰减振荡的公式为

$$\Theta = Ae^{-Bt} \cos(\Omega t + \Delta) - A \quad (19)$$

图 2 中虚线为理论拟合数据, 实线为实验数据, 实验和理论符合得较好。

自转角度在线性阻尼下衰减振荡的公式为

$$\theta = ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) - a \quad (20)$$

图 3 中虚线为理论拟合数据, 实线为实验数据。可以看到理论曲线和实验曲线基本吻合, 回归指数 R^2 达 0.982。

2.2 估测橡皮筋剪切模量

由前述理论分析,扭振周期 $\tau_0=2\pi\sqrt{\frac{2\pi\sqrt{mL}}{GNS_0}}=\alpha\frac{\sqrt{IL}}{N}$, 可知 $\tau_0\propto\frac{\sqrt{IL}}{N}$, 其比例系数 $\alpha=\alpha(G,A_0)$ 为橡皮筋剪切模量 G 和单根橡皮筋横截面积 A_0 的函数, 所涉及的橡皮筋长度 L 、约化转动惯量 $\bar{I}$ 和扭振周期 τ_0 都是可测值。忽略阻尼, 取各组实验数据速度周期作为系统的扭振周期 τ_0 , 做 7 组实验, 如表 1 所示, 可定出比例系数 α 的平均值为 $\bar{\alpha}=1.89\times10^{10}N^{-\frac{1}{2}}m^{-1}$, 其不确定度 $u(\alpha)=0.08\times10^{10}N^{-\frac{1}{2}}m^{-1}$, 相对不确定度为 $E(\alpha)=4\%$ 。

由 α 与 S_0 的值, 可估测橡皮筋剪切模量

$$G=\frac{8\pi^3}{S_0^2\alpha^2}=1.4\times10^2\text{kPa}\tag{21}$$

由相关文献, 硫化橡胶的剪切模量约为 400~700kPa^[9], 本实验中推算的结果在数量级上与文献一致。

2.3 扭振周期与横截面积的关系

实验中考虑到橡皮筋横截面积过大不符合模型, 故采用两根橡皮筋并联(即根数 $N=2$)代替对横截面积的改变, 对两根和一根橡皮筋的情况进行多次重复实验, 得到数据如表 2 所示。

表 2 中 T 为速率周期, $\tau=2T$ 为扭振周期。由实验数据可知, 扭振周期长短与横截面积成反比, 即横截面积越小, 扭振周期越长。

表 1 估测橡皮筋剪切模量的实验数据

组别	τ/s	m_1/g	R_1/mm	m_2/g	R_2/mm	L/cm	$\alpha/\cdot10^{-10}N^{\frac{1}{2}}m$
1	5.454	66.2	12.5	66.2	12.5	5.7	1.70
2	9.683	30.7	10.0	30.7	10.0	10.5	2.04
3	16.439	63.8	12.5	63.8	12.5	13.2	1.71
4	17.417	227.2	16.0	227.2	16.0	8.8	1.84
5	16.221	63.1	12.5	63.1	12.5	10.5	1.90
6	18.117	63.1	12.5	63.1	12.5	14.7	1.80
7	13.267	63.8	12.5	30.7	10.0	10.5	2.26

表 2 扭振周期与橡皮筋横截面积(并联根数 N)的关系

组别	S_0/mm^2	T/s	τ/s	m_1/g	R_1/mm	m_2/g	R_2/mm	L/cm	N
1	2.25	3.989	7.978	63.1	12.5	63.1	12.5	13.2	2
2	2.25	8.562	17.124	63.1	12.5	63.1	12.5	14.7	1

2.4 扭振周期与小球质量和半径的关系

遵循控制变量的法则, 保持小球的半径不变, 通过改变小球的材质来改变小球的质量, 研究扭振周期与小球质量的关系; 同样, 保持小球的质量不变, 通过改变小球的材质改变小球的半径, 研究扭振周期与小球半径的关系。实验中选取了铜、不锈钢和铝三种材料进行研究, 表 3 给出了扭振周期与小球质量平方根 $\sqrt{m}$ 的关系, 表 4 给出了扭振周期与小球半径 r 的关系。实验结果表明, 扭振周期和小球质量平方根 $\sqrt{m}$ 的大小成正相关的关系, 扭振周期与小球半径 r 也是正相关的关系。

表 3 扭振周期和小球质量平方根 $\sqrt{m}$ 的关系

组别	$m_1 = \sqrt{m} / m_2 / \text{g}$	$R_1 = \sqrt{g} / R_2 / \text{mm}$	L / cm	N	τ / s	
铜	72.1	8.49	12.5	10.5	1	17.644
不锈钢	63.1	7.94	12.5	10.5	1	16.221
铝	21.7	4.66	12.5	10.5	1	10.221

表 4 扭振周期与小球半径 r 的关系

组别	$m_1=m_2/g$	$R_1=R_2/mm$	L/cm	N	τ 平均/s
铜	63.2	11.9	10.5	1	14.442
不锈钢	63.1	12.5	10.5	1	16.221
铝	63.1	17.7	10.5	1	23.568

2.5 系统扭振周期的非等时性

本文的理论模型基于对阻尼和扭矩做线性近

似的基本假设,此时系统扭振自由度满足的动力学方程为

$$\ddot{\theta}_{p2} + \left(\sigma + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) \dot{\theta}_{p2} + k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \theta_{p2} = 0 \quad (22)$$

方程解出角频率

$$\omega_r = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2} \quad (23)$$

虽小于固有频率 ω_2 ,但仍为常数,即线性阻尼并不破坏系统的等时性。然而从图 3 中 $\theta-t$ 实验曲线可以看出,系统已经不再表现出等时性,扭振周期和速率周期长度随周期数增加逐渐变短,速率周期的变化如表 5 所示。

表 5 不同实验条件下周期变化的实验数据

序号	R/mm	m/g	N	L/cm	T/s	T 平均/s
1	12.5	66.2	2	5.5	3.367	2.727
					2.750	
					2.538	
					2.254	
2	10	30.7	1	10.5	6.088	4.842
					5.146	
					4.675	
					4.225	
3	12.5	63.8	1	13.2	9.900	8.219
					8.283	
					6.475	

我们分析等时性破缺可能来自于阻尼和橡皮筋扭转恢复力矩的非线性性质。系统的扭振自由度满足的动力学方程

$$\ddot{\theta}_{p2} + \left(\sigma + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) \dot{\theta}_{p2} + k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \theta_{p2} = 0 \quad (24)$$

将方程记为

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (25)$$

把原本的常阻尼系数 λ 看做是 $\dot{\theta}$ 的函数,有

$$\lambda = \epsilon f(\dot{\theta}) \quad (26)$$

当 λ 为常数时,方程退化成线性阻尼自由振动。

这里使用三级数法来解决非线性问题^[6],三级数法是一种渐进法,特点为将通解取为三个级数表达的形式

$$\theta = a \cos \varphi + \epsilon u_1(a, \varphi) + \epsilon^2 u_2(a, \varphi) + \dots \quad (27)$$

于是有

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots \end{cases} \quad (28)$$

非线性系统在第一阶近似(线性近似)时的解仍具备“等时性”(周期相同),在高阶近似时则失去了“等时性”,考虑到第二阶近似时有

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \epsilon^2 B_2(a) = \omega \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right] \quad (29)$$

一般来说 λ 是 $\dot{\theta}$ 的单增函数,则 ω' 是 $\dot{\theta}$ 的单减函数,在系统振动时, $\dot{\theta}$ 变小, λ 亦变小,引起 ω' 变大,故实验数据中扭振周期呈递减趋势。

3 误差分析

实验与理论偏离的误差来源分析主要有以下四点,其中分为主要误差与次要误差。

主要误差分为两点,分别涉及模型建立假设与不可避免的能量耗散,导致与实验结果出现偏差。

(1) 系统的扭振振幅已经偏离小振动范畴,非线性阻尼和橡皮筋多阶盘绕对系统运动产生较大影响,前者的影响已在 2.5 中分析。实际系统运动过程中,橡皮筋的扭转形变已经远远超出了“弹性圆轴剪切形变模型”所能描述的程度,在此过程中橡皮筋存在明显的多阶缠绕现象^[3]。橡皮筋的多阶盘绕一方面使得扭转恢复力具有非线性性质,使得扭振角度 θ 的变化规律变得更加复杂,不再具有等时性;另一方面则使得橡皮筋的长度在运动过程中发生较大变化。

(2) 实验显示,系统运动过程中橡皮筋会出现横向振动(如图 4 照片所示),多根橡皮筋并联时该自由度的振动机械能会迅速耗散,带来更多的能量耗散,对实验结果产生影响。



图 4 橡皮筋的横向振动

次要误差主要为系统误差,且可以通过特定的方式缩小影响,主要有以下两点。

(1) 打滑与弹跳的影响。质量和半径都较大的球转动惯量大,滚动摩擦力矩大,启动困难,在经历第一个振荡周期后,难以自发进行后续的振荡周期,导致周期性参量测量误差较大;质量小的球($r < 10\text{mm}$),与平面接触的正压力小,最大静摩擦力小,导致橡皮筋最大扭矩超过了不打滑的阈值,使得系统在扭振过程中,出现严重的球打滑或者弹跳现象,造成不必要的能量衰减,带来误差。选择质量适中、密度较大的钢球在橡胶垫上进行实验可以有效减少打滑和弹跳,使其对实验影响几乎忽略不计。

(2) 用502胶水连接橡皮筋与球时,会使橡皮筋与小球接触的一小段硬化,导致实验与模型出现偏差,影响较小。

4 结语

本文针对双球橡皮筋系统,创新性构建了二自由度的线性阻尼自由振动模型和弹性剪切形变模型,对“钟摆”行为与橡皮筋横截面积、小球质量及半径的关系等进行了实验研究。实验数据表明理论模型与实验结果拟合良好,解释了系统的运动规律,并对系统周期的非等时性进行了分析。本实验材料获取容易,操作简单方便,但是实验现

象却直观有趣,并蕴含了丰富的力学知识,可用于大学物理实验教学的研究型项目拓展。

参 考 文 献

- [1] LI X, SUN B, ZHANG Y, et al. Dynamics of rubber band stretch ejection[Preprints]. 2021, 2021030294. <https://doi.org/10.20944/preprints202103.0294.v1>
- [2] EICHWALD B, ARGENTINA M, NOBLIN X, et al. Dynamics of a ball bouncing on a vibrated elastic membrane[J]. Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics, 2010, 82(1 Pt 2):016203-016203.
- [3] WANG R, FANG S, XIAO Y, et al. Torsional refrigeration by twisted, coiled, and supercoiled fibers[J]. Science, 2019: 216-221.
- [4] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2009:224-229.
- [5] RAO S S. 机械振动[M]. 4版. 李欣业,张明路,译. 北京:清华大学出版社, 2009:94-96.
- [6] 刘延柱,陈立群,陈文良. 振动力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2019:147-149.
- [7] 陈予恕. 非线性振动[M]. 1版. 北京:高等教育出版社, 2002:30-35.
- [8] 刘鸿文. 简明材料力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2016:65-68.
- [9] 王进文. 硫化体系对天然橡胶低温动态剪切模量的影响[J]. 世界橡胶工业, 2004, 31(12): 30-36.
WANG J W. Effects of vulcanization system on dynamic shear modulus of natural rubber at low temperature[J]. World Rubber Industry, 2004, 31(12): 30-36. (in Chinese)
- [10] (上接第113页)
- [12] 李扬. 基于小型麦克风阵列的声源定位系统设计与实现[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2014.
- [13] 周婧洁,陈建平,吉晓东. 几种数字混响器模型的分析[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2010, 9(2): 23-28.
ZHOU J J, CHEN J P, JI X D. Comparison and analysis of several digital reverberator models[J]. Journal of Nantong University (Natural Science Edition), 2010, 9(2): 23-28. (in Chinese)
- [14] 陈晓辉,孙昊,张恒,等. 基于声源阵列的空间麦克风定位方法研究[J]. 计算机应用研究, 2020, 37(5): 1437-1439.
CHEN X H, SUN H, ZHANG H, et al. Research on spatial microphone location based on sound source array[J]. Applied Research of Computer, 2019, 37(5): 1437-1439. (in Chinese)
- [15] 张晓光,吕海峰,吕传茂,等. 四元十字麦克风阵声源定位算法研究[J]. 中国测试, 2020, 46(2): 96-102.
ZHANG X G, LV H F, LV C M, et al. Research on sound source location algorithm of four-element cross microphone array[J]. China Test and Technology, 2019, 46(2): 96-102. (in Chinese)
- [16] SMITH J O, ABEL J S. The spherical interpolation method of source localization[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1987, 12(1): 246-252.
- [17] 王伟,张晶涛,柴天佑. PID参数先进整定方法综述[J]. 自动化学报, 2000(3): 347-355.
WANG W, ZHANG J T, CHAI T Y. Summary of advanced tuning methods for PID parameters[J]. Acta Automatica Sinica, 2000(3): 347-355. (in Chinese)
- [18] 程方晓,刘璐,姚清华,等. 基于改进时延估计的声源定位算法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(3): 681-687.
CHANG F X, LIU L, YAO Q H, et al. Sound source location algorithm based on improved time delay estimation[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2018, 56(3): 681-687. (in Chinese)
- [19] 李海鹏,孙大军,郑翠娥. 强干扰环境下水声时延估计技术研究[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(3): 873-880.
LI H P, SUN D J, CHENG C E. Research on underwater acoustic time delay estimation under strong interference environment[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 201, 43(3): 873-880. (in Chinese)