

## 物理实验



## 居家实验：硬币弹跳

董佳豪<sup>1</sup> 王 瑾<sup>1,2</sup> 李文华<sup>1,2</sup> 文小青<sup>1,2</sup> 惠王伟<sup>1,2</sup>(南开大学<sup>1</sup>物理科学学院; <sup>2</sup>基础物理国家级实验教学示范中心, 天津 300071)

**摘 要** 本文给出了居家环境下基于智能手机研究硬币弹跳的声学频率和产生的共振模式一种方案。理论上首先根据圆板的振动方程, 给出了硬币固有振动频率的表达式。之后结合特定边界条件, 利用有限元的方法分析了三种类型硬币的固有振动模式及对应频率。实验上利用智能手机测量了不同硬币在自由振动时产生的声音频率, 并与模拟计算结果进行比较, 给出了合理的误差分析。该居家实验方案简单有趣, 物理原理丰富, 易于在基础物理实验教学中推广。

**关键词** 硬币; 声学频率; 智能手机; 居家实验

HOME EXPERIMENT  
—COIN BOUNCINGDONG Jiahao<sup>1</sup> WANG Jin<sup>1,2</sup> LI Wenhua<sup>1,2</sup> WEN Xiaoqing<sup>1,2</sup> HUI Wangwei<sup>1,2</sup>( <sup>1</sup> School of physics;<sup>2</sup> National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Nankai University, Tianjin 300071)

**Abstract** In this paper, the smart phone was used to study the acoustic frequency and resonance mode of coin bouncing in home environment. Firstly, according to the vibration equation of the circular plate, the expression of the natural vibration frequency of the coin is given. Then combined with specific boundary conditions, the natural vibration modes and corresponding frequencies of three types of coins are analyzed by finite element method. In the experiment, the acoustic frequency produced by the free vibration of different coins is measured by smart phone, and compared with the simulation results, then a reasonable error analysis is given. This home experiment scheme is rich in physical principles, simple and interesting, and easy to be popularized in basic physics experiment teaching.

**Key words** coin; acoustic frequency; smart phone; home experiment

探究式学习通过以学生为中心的探索、反思和讨论, 深入了解自然现象和背后原理, 有效培养本科生严谨求实的科学态度、自主学习能力和实

践创新能力等。由于疫情影响, 居家实验已经成为了中外诸多高校的实验教学替代方案<sup>[1-3]</sup>。居家实验要求实验取材简单广泛, 源于生活, 同时

收稿日期: 2022-08-08

基金项目: 2020 高等学校教学研究项目(DJZW202010hb), 港澳与内地高等学校师生交流计划项目(202111120070); 南开大学“四新”专业课程改革项目(21NKSYX02)。

通讯作者: 王瑾, 南开大学物理科学学院高级实验师, wangjin8208@nankai.edu.cn。

引文格式: 董佳豪, 王瑾, 李文华, 等. 居家实验: 硬币弹跳[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 97-105.

Cite this article: DONG J H, WANG J, LI W H, et al. Home experiment—coin bouncing[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 97-105. (in Chinese)

具有可定量测量、可探究、物理思想和原理丰富的特点。智能手机的普及以及其集成的高精度传感器,为居家开展探究式实验学习提供了可能。

1904年,瑞利获得诺贝尔奖,他对现代声学理论基础做出了开创性的工作。其撰写的两卷本《声学原理》为近代声学奠定了基础<sup>[4]</sup>。物体振动模式研究一直是基础物理实验教学中的重要内容,主要包括弦振动、板振动、膜振动等形式,如利用弦振动实验测量驻波波长<sup>[5]</sup>、通过频率共振测量动态杨氏模量<sup>[6]</sup>、2017年IYPT第十四题 **Resonating Glass**、2022年IYPT第十四题 **Ball on Membrane** 实验<sup>[7]</sup>等。物体振动会产生一定频率的声波,因此可以利用智能手机收集声音信号并进行频谱分析,探究物体振动频率。Rakestraw等利用智能手机测量了若干种不同的实心硬币的振动,并从硬币材质、历史等方面进行了比较与探讨<sup>[8]</sup>。Manas等利用声音振动来鉴别硬币真伪<sup>[9]</sup>。

本文介绍了一种居家环境下基于声学特性研究硬币弹跳的方法。实验中使用了日常生活中常见的实心硬币、外圆中空的日本硬币、乾隆通宝和面积较大的银元。通过智能手机上的声学软件探测硬币撞到坚硬的表面时产生本征振动声音的频率,进行建模和实验验证。该居家实验可以让同学们了解平板振动的规律,即平板振动的频率与平板的物理性质相关,包括其质量分布、形状、尺寸、弹性模量和泊松比等。

## 1 实验方法与原理

实验中采用的模型是圆形平板振动模型。1882年瑞利曾根据圆形平板的振动原理设计出测量质点速度的仪器——瑞利盘<sup>[4]</sup>。

对于杆振动方程,一般比较容易理解。当向杆的轴向方向施加力时,引起杆的纵振动,振动方程<sup>[10]</sup>为经典的波动方程形式,表示为

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中, $\epsilon(x,t)$ 为杆的纵向位移, $E$ 为杆的杨氏模量, $\rho$ 为杆的密度。

当杆受到与杆轴向垂直的力时,杆发生弯曲,引起杆在与轴垂直方向的振动,其振动微分方程<sup>[10]</sup>为

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{4\rho}{Ea^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

其中, $\eta(x,t)$ 为杆的横向位移, $a$ 为杆的横截面半径。

对于圆板,其在空气中的经典振动微分方程为<sup>[10]</sup>

$$D \nabla^4 w(x,y,t) + \gamma \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

其中, $w(x,y,t)$ 代表板表面上任何一点在垂直方向上的位移。抗弯曲刚度  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $\gamma$  是圆板的面密度, $E$ 为杨氏模量, $\nu$ 是泊松比, $h$ 是圆板厚度。同时, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ ,  $\nabla^2$ 为拉普拉斯算符。

在极坐标下,圆板振动位移满足如下方程

$$w(r,\theta,t) = W(r,\theta) \cos \omega t \quad (4)$$

其中, $\omega$ 是圆频率, $r$ 代表板表面任何一点到中心的距离, $\theta$ 为极角, $W(r,\theta)$ 为板表面振动位移方程的二维函数。将式(4)代入式(3)可得

$$(\nabla^4 - k^4) W(r,\theta) = 0 \quad (5)$$

其中, $k^4 = \frac{\gamma \omega^2}{D}$ ,  $W(r,\theta)$ 的通解为

$$\begin{aligned} W(r,\theta) = & \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + \\ & C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)] \cos n\theta + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [A'_n J_n(kr) + B'_n Y_n(kr) + \\ & C'_n I_n(kr) + D'_n K_n(kr)] \sin n\theta \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $J_n$ 为第一类贝塞尔函数, $Y_n$ 为第二类贝塞尔函数, $I_n$ 为第一类修正贝塞尔函数, $K_n$ 为第二类修正贝塞尔函数。系数  $A_n \cdots D'_n$  决定了平板振型,并可根据边界条件求得。

同时定义特征值

$$\lambda_{ij}^2 = \omega_{ij}^2 a^2 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} = k_{ij}^2 a^2 \quad (7)$$

其中, $a$ 为圆板的半径, $k_{ij}$ 为上述*i*阶贝塞尔函数组合的第*j*个解。其中*i*确定了节径数,*j*确定了节圆数。因此圆板的固有频率可以表示为

$$f_{ij} = \frac{k_{ij}^2}{2\pi} \left[ \frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left[ \frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

可以看出,不同的根值  $\lambda_{ij}$  对应着圆板不同的振动模式及其振动频率。结合  $W(r,\theta)$  的通解和特定边界条件,即可得到各振动模式所对应的特征值  $\lambda_{ij}$ 。

本次实验共探究了三种不同类型的硬币所对应的本征频率,分别为实心型、中心带圆孔型、中心带方孔型的三种圆形硬币,其各自对应的边界条件为:

(1) 实心型。硬币自由振动时,其边界的弯矩、扭矩和剪力都为0,故边界方程可表示为

$$-D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (9)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (10)$$

(2) 中心带圆孔型。硬币自由振动时,外圆边界满足边界方程式(9)和式(10),同时内圆边界也需满足弯矩、扭矩和剪力都为0,需增加边界方程

$$-D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=b} = 0 \quad (11)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=b} = 0 \quad (12)$$

其中, $b$ 为圆孔半径。

(3) 中心带方孔型。硬币自由振动时,外圆边界满足边界方程式(9)和式(10),方孔四个边界也需满足弯矩、扭矩和剪力都为0,需增加边界方程

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}} = 0 \quad (13)$$

$$-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{(2-\nu) \partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}} = 0 \quad (14)$$

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}} = 0 \quad (15)$$

$$-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{(2-\nu) \partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{y=\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}} = 0 \quad (16)$$

其中, $l$ 为方孔长度, $t$ 为方孔宽度。

由于硬币表面呈现不规则图案,硬币的有效厚度采用下式计算

$$h = \frac{m}{\rho S} \quad (17)$$

其中, $m$ 为硬币质量, $\rho$ 为硬币密度, $S$ 为硬币表面积。

本次实验共选取了三种类型的11块硬币进行实验,如图1所示,分别为:第一类实心型硬币:一角硬币、五角硬币、一元硬币、5美分硬币、25美分硬币、一元银元硬币,对应的样品编号为a~g;第二类中心带圆孔型硬币:日本五元硬币,样品编号为h;第三类圆形中心带方孔型硬币:三枚不同尺寸的乾隆通宝铜钱对应的样品编号为i~k。实验中所用硬币的具体参数如表1和表2所示。

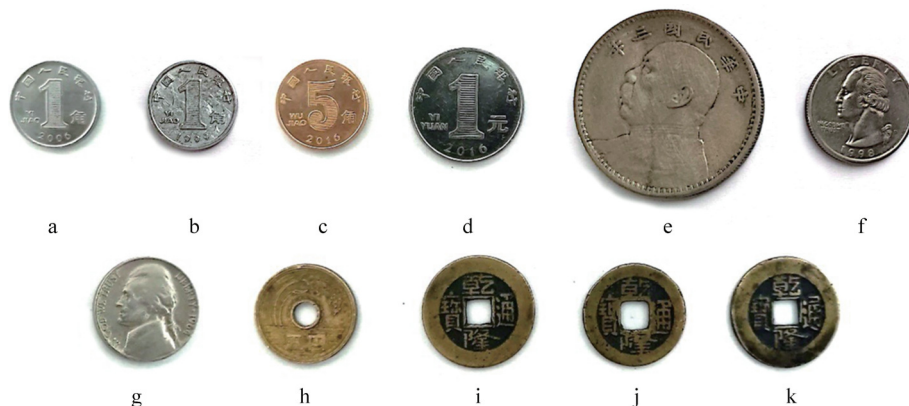


图1 实验测量所用硬币(从左往右依次为:a~k样品)

表1 实验硬币形状参数

| 样品标号 | 硬币类型 | 外径/mm | 内径/内周长/mm | 质量/g | 流通国家 | 生产时间/年 | 材质 |
|------|------|-------|-----------|------|------|--------|----|
| a    | 一角硬币 | 9.30  | 0.00      | 3.20 | 中国   | 2006   | 钢制 |
| b    | 一角硬币 | 9.30  | 0.00      | 1.15 | 中国   | 1999   | 铝制 |
| c    | 五角硬币 | 10.33 | 0.00      | 3.81 | 中国   | 2016   | 钢制 |
| d    | 一元硬币 | 12.50 | 0.00      | 5.97 | 中国   | 2016   | 钢制 |

续表

| 样品标号 | 硬币类型  | 外径/mm | 内径/内周长/mm | 质量/g  | 流通国家 | 生产时间/年  | 材质 |
|------|-------|-------|-----------|-------|------|---------|----|
| e    | 一元银元  | 19.75 | 0.00      | 19.32 | 中国   | 1914 以后 | 银质 |
| f    | 25 美分 | 12.04 | 0.00      | 5.67  | 美国   | 1998    | 白铜 |
| g    | 5 美分  | 10.55 | 0.00      | 4.98  | 美国   | 1964    | 白铜 |
| h    | 五元硬币  | 10.94 | 2.50      | 3.76  | 日本   | 1990    | 黄铜 |
| i    | 铜钱 1  | 11.90 | 10.20     | 4.65  | 中国   | 清朝      | 铜质 |
| j    | 铜钱 2  | 11.11 | 12.10     | 3.67  | 中国   | 清朝      | 铜质 |
| k    | 铜钱 3  | 12.00 | 10.80     | 3.70  | 中国   | 清朝      | 黄铜 |

表 2 实验硬币材质参数

| 样品标号 | 硬币类型  | 泊松比  | 杨氏模量/<br>GPa | 密度/<br>(g/cm <sup>3</sup> ) |
|------|-------|------|--------------|-----------------------------|
| a    | 一角硬币  | 0.30 | 200.00       | 7.90                        |
| b    | 一角硬币  | 0.30 | 70.60        | 2.70                        |
| c    | 五角硬币  | 0.30 | 200.00       | 7.90                        |
| d    | 一元硬币  | 0.30 | 200.00       | 7.90                        |
| e    | 一元银元  | 0.35 | 80.00        | 9.86                        |
| f    | 25 美分 | 0.33 | 140.00       | 8.90                        |
| g    | 5 美分  | 0.33 | 140.00       | 8.90                        |
| h    | 五元硬币  | 0.33 | 110.00       | 8.75                        |
| i    | 铜钱 1  | 0.34 | 123.00       | 8.93                        |
| j    | 铜钱 2  | 0.34 | 123.00       | 8.93                        |
| k    | 铜钱 3  | 0.32 | 95.00        | 8.50                        |

注：硬币材质参数参考了文献[11]。

本实验中采用了智能手机(Redmi K20,小米科技有限责任公司)的 Spectroid 软件进行声音的频谱分析。实验可以选择在不同材质桌面(例如地板、木桌、实验台等)进行,本实验中选用的是宿舍的木质桌面。实验操作如图 2 所示,在安静的环境中打开手机测量软件。为了满足自由空间振动的条件,硬币被两手指夹持在桌面上方约 1 厘米处,垂直释放银币并记录其在桌面弹跳的声音频谱。

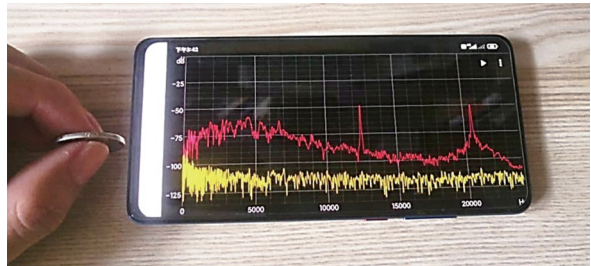


图 2 实验操作示意图

在进行从时域到频域的转换时,有几个重要参数将影响频域的测量效果。Spectroid 软件参数设置界面如图 3 所示,需要设置的参数 Sampling rate、FFT size、Desired transform interval 分别对应于采样率、傅里叶变换采样点规模、期待数据转换时间间隔。采样频率表示单位时间内从连续信号中提取并组成离散信号的采样个数。FFT size 设置了每个傅里叶变换 FFT 计算中包

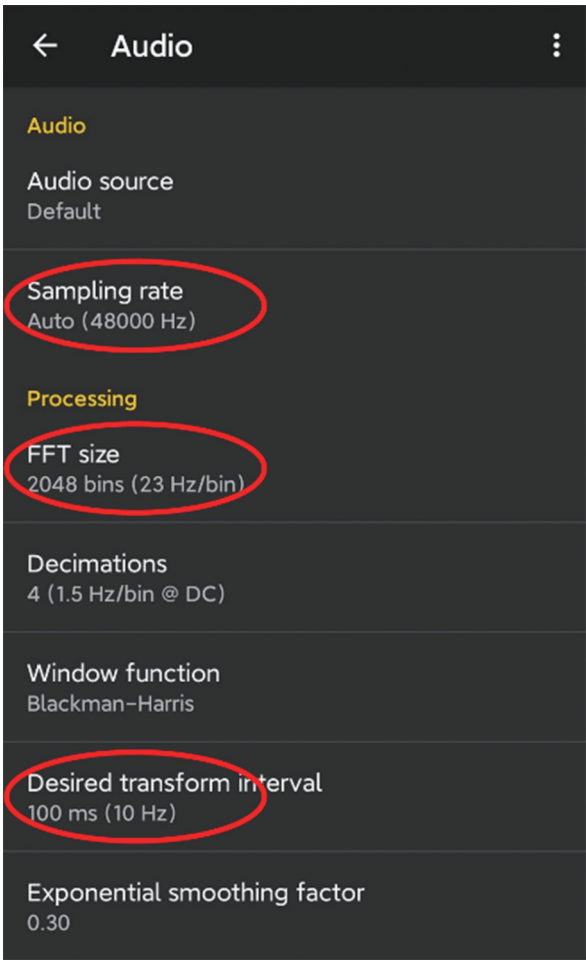


图 3 Spectroid 软件参数设置界面

含的数据点的数量,通常可取 256、512、1024、2048、4096、8192 或 16385。计算中包含的数据点越多,频域中的带宽越小。Desired transform interval 参数可以反映 FFT 计算的次数,求平均值以提高信噪比测量的结果。综合权衡时间分辨率和频率带宽之间的关系,本实验采样频率为 48kHz,FFT 采样点数参数为 2048,期待数据转换时间间隔为 100ms,实验中设定的显示的最高频率为 24kHz。

## 2 理论模拟

采用 COMSOL 软件的特征频率模块进行模态分析和固有振动频率的理论值计算。建模步骤为,首先按照硬币的几何形状建立模型,再写入硬币金属材料的物理属性,然后采用自由四面体的方式对模型进行网格划分,划分大小为超细化,划分结果如图 4 所示。最后将约束条件设为自由状态,对硬币结构进行模态求解。

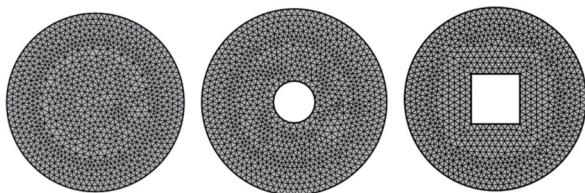


图 4 三种类型硬币的网格划分

模拟结果如图 5 至图 7 所示,可以看出,三种类型硬币的本征振动模式具有相似性,因为它们

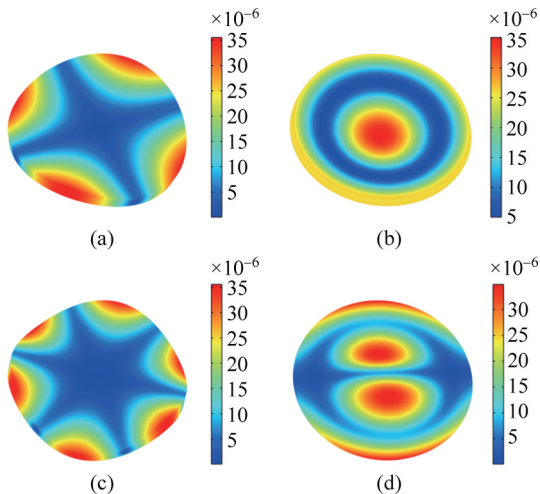


图 5 实心硬币的模态振型

(a) (2,0); (b) (0,1); (c) (3,0); (d) (1,1)

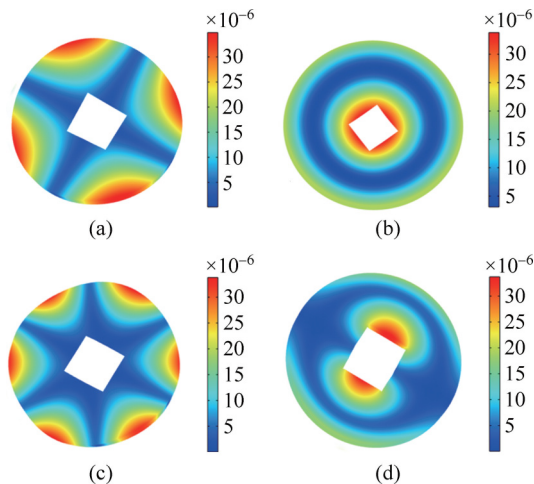


图 6 带圆孔形硬币的模态振型

(a) (2,0); (b) (0,1); (c) (3,0); (d) (1,1)

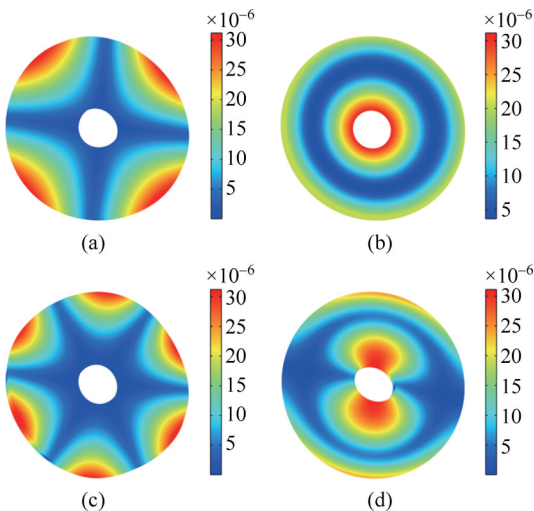


图 7 带方孔形硬币的模态振型

(a) (2,0); (b) (0,1); (c) (3,0); (d) (1,1)

具有如式(6)所示的相同的振动频率表达式。由于其需要满足不同的边界方程,故  $\lambda_{ij}$  具有不同的取值。对于许多不同类型的板(例如圆盘、矩形、环形圆盘)和许多不同类型的边界条件(例如自由、夹紧、简支),文献中已将系数  $\lambda_{ij}$  制成表格<sup>[10]</sup>。

通过软件的模拟,我们得到各硬币的理论振动频率如表 3 所示。

## 3 实验结果与讨论

### 3.1 实心硬币实验结果

实心硬币的实验结果如表 4 所示,实验值为多次测量的平均值。Spectroid 软件可以探测和

表 3 不同硬币理论模拟结果 单位:kHz

| 模态  | 一角硬币 a | 五角硬币 | 一元硬币 | 一元银元 | 25 美分 | 5 美分 | 日本五元 | 铜钱 1 | 铜钱 2 | 铜钱 3 |
|-----|--------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| 2,0 | 20.0   | 17.9 | 12.5 | 3.0  | 9.4   | 15.0 | 8.3  | 6.5  | 7.9  | 5.5  |
| 0,1 | 33.5   | 29.9 | 21.0 | 5.2  | 16.1  | 25.7 | 14.0 | 10.9 | 13.7 | 9.1  |
| 3,0 | 45.1   | 40.4 | 28.5 | 6.9  | 21.4  | 33.8 | 20.0 | 15.8 | 19.9 | 13.4 |
| 1,1 | 72.8   | 65.3 | 46.4 | 11.7 | 35.4  | 55.6 | 30.6 | 23.9 | 27.7 | 19.7 |
| 4,0 | 76.5   | 68.6 | 48.9 | 12.0 | 36.8  | 57.4 | 34.6 | 27.7 | 34.8 | 23.5 |

表 4 实心硬币的实验结果 单位:kHz

| 频率类型   | F <sub>1</sub> |      |      | F <sub>2</sub> |      |      | F <sub>3</sub> |      |      |
|--------|----------------|------|------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| 硬币类型   | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 |
| 一角硬币 a | 20.7           | 20.0 | 3.5% |                |      |      |                |      |      |
| 五角硬币   | 17.3           | 17.9 | 2.2% |                |      |      |                |      |      |
| 一元硬币   | 12.5           | 12.5 | 0.0% | 20.5           | 21.0 | 2.4% |                |      |      |
| 25 美分  | 9.3            | 9.4  | 1.1% | 15.6           | 16.1 | 6.2% | 21.4           | 21.4 | 0.0% |
| 5 美分   | 14.2           | 14.0 | 1.4% |                |      |      |                |      |      |

显示的声波频率范围是有限的,实验中设定的显示的最高频率为 24kHz。和表 3 模拟结果相比较,只有部分模态的频率数据可以被探测到。将实验结果与理论计算的结果进行比较,我们发现,实验结果与理论模拟相对误差小于 7%,证明了实验的可靠性。

3.2 中心孔对硬币振动测量结果的影响

将四枚含孔型硬币的实验结果与理论计算结果相比较,如表 5 所示,实验值为多次测量的平均值。我们发现,实验结果与理论模拟的总体相对误差小于 8%。其中,除铜钱 3 硬币的(0,1)振动模式频率,其他实验值与理论值相对误差都低于 6%,其相对误差范围与实心硬币的相对误差范围是一致的,说明此实验方法对含孔型硬币的振动测量依然有效,且实验精度相当。

为进一步探究中心孔对硬币振动模式的影响,我们根据四枚带孔硬币的尺寸和材料特性重

新建模(去除中心孔),将方孔和圆孔的理论结果与实心模型相比,如表 6 所示。

经过比较,可以发现:由于中心孔边界条件的限制,会使得相应模式的振动频率降低。例如日本五元圆孔型硬币,在含圆孔时(2,0)模式的振动频率为 8.3kHz,要比不含圆孔时的振动频率低 0.5kHz。这与文献[12]的分析结果是一致的。

3.3 实验的可重复测量

由表 7 可知,本实验有很好的可重复性。

3.4 模式分裂现象探究

在实验过程中,观察到多枚硬币(一角硬币、一元硬币、5 美分硬币、25 美分硬币、日本五元硬币、铜钱 1 硬币)在(2,0)振动模态的共振声学频率明显分为两个可分辨频率。如图 8(a)所示,一角硬币 a 的两个频率分别为:20789Hz 和 21961Hz;如图 8(b)所示,25 美分的两个频率分别为:9258Hz 和 9352Hz;如图 8(c)所示,日本五元的两个频率

表 5 四枚含孔型硬币的实验结果 单位:kHz

| 频率类型 | F <sub>1</sub> |      |      | F <sub>2</sub> |      |      | F <sub>3</sub> |      |      | F <sub>4</sub> |      |      |
|------|----------------|------|------|----------------|------|------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| 硬币类型 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 | 实验测量           | 理论数值 | 相对误差 |
| 日本五元 | 8.2            | 8.3  | 1.2% | 13.8           | 14.0 | 1.4% | 20.3           | 20.0 | 1.5% |                |      |      |
| 铜钱 1 | 6.4            | 6.5  | 1.5% | 10.7           | 10.9 | 1.8% | 16.4           | 15.8 | 3.8% | 22.5           | 23.9 | 5.9% |
| 铜钱 2 | 7.6            | 7.9  | 3.8% | 13.0           | 13.7 | 5.1% | 19.1           | 19.9 | 4.0% |                |      |      |
| 铜钱 3 | 5.2            | 5.5  | 5.5% | 8.4            | 9.1  | 7.7% | 13.6           | 13.4 | 1.5% |                |      |      |

表 6 四枚含孔型硬币去除中心孔后振动频率理论值

单位: kHz

| 硬币类型 | 日本五元 |      |      | 铜钱 1 |      |      | 铜钱 2 |      |      | 铜钱 3 |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 模态   | 实心   | 圆孔   | 相差数值 | 实心   | 方孔   | 相差数值 | 实心   | 方孔   | 相差数值 | 实心   | 方孔   | 相差数值 |
| 2,0  | 8.8  | 8.3  | 0.5  | 6.9  | 6.5  | 0.4  | 8.8  | 7.9  | 0.9  | 5.9  | 5.9  | 0.0  |
| 0,1  | 15.1 | 14.0 | 1.1  | 12.1 | 10.9 | 1.2  | 15.4 | 13.7 | 1.7  | 10.1 | 9.1  | 1.0  |
| 3,0  | 20.1 | 20.0 | 0.1  | 16.0 | 15.8 | 0.2  | 20.2 | 19.9 | 0.3  | 13.6 | 13.4 | 0.2  |
| 1,1  | 33.4 | 30.6 | 2.8  | 26.8 | 23.9 | 2.9  | 33.9 | 27.7 | 4.2  | 22.7 | 19.7 | 3.0  |
| 4,0  | 34.6 | 34.6 | 0.0  | 27.7 | 27.7 | 0.0  | 34.9 | 34.8 | 0.1  | 23.8 | 23.5 | 0.3  |

表 7 实验多次测量数据记录表

单位: kHz

| 频率类型  | 一角硬币 a | 五角硬币 | 一元硬币 | 25 美分 | 5 美分 | 日本五元 | 铜钱 1 | 铜钱 2 | 铜钱 3 |
|-------|--------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| $F_1$ | 20.8   | 17.3 | 12.5 | 9.3   | 14.1 | 8.2  | 6.4  | 7.6  | 5.2  |
|       | 20.7   | 17.3 | 12.6 | 9.4   | 14.2 | 8.2  | 6.5  | 7.6  | 5.2  |
|       | 20.7   | 17.3 | 12.5 | 9.3   | 14.2 | 8.2  | 6.4  | 7.6  | 5.2  |
| 平均值   | 20.7   | 17.3 | 12.5 | 9.3   | 14.2 | 8.2  | 6.4  | 7.6  | 5.2  |
| $F_2$ |        |      | 20.5 | 15.6  |      | 13.8 | 10.7 | 13.0 | 8.4  |
|       |        |      | 20.6 | 15.6  |      | 13.9 | 10.7 | 13.0 | 8.3  |
|       |        |      | 20.5 | 15.6  |      | 13.8 | 10.7 | 13.1 | 8.4  |
| 平均值   |        |      | 20.5 | 15.6  |      | 13.8 | 10.7 | 13.0 | 8.4  |
| $F_3$ |        |      |      | 21.4  |      | 20.3 | 16.4 | 19.0 | 13.6 |
|       |        |      |      | 21.4  |      | 20.4 | 16.4 | 19.1 | 13.5 |
|       |        |      |      | 21.4  |      | 20.3 | 16.4 | 19.1 | 13.6 |
| 平均值   |        |      |      | 21.4  |      | 20.3 | 16.4 | 19.1 | 13.6 |

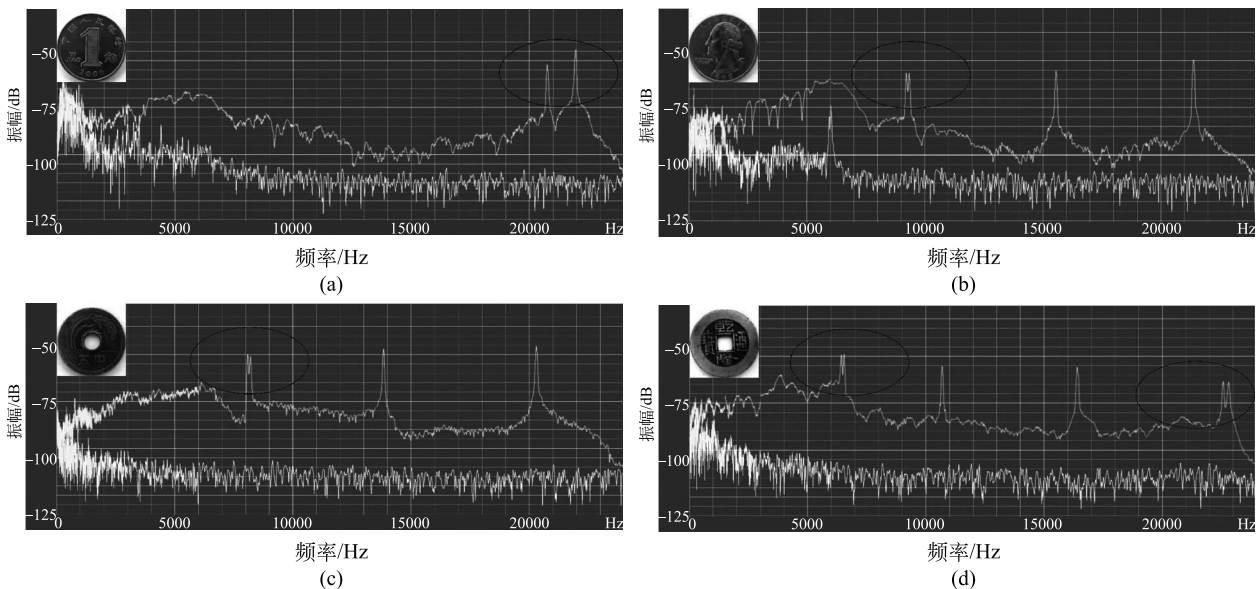


图 8 四种硬币的共振频谱

(a) 一角硬币 a; (b) 25 美分硬币; (c) 日本五元硬币; (d) 铜钱 1

分别为:8109Hz 和 8227Hz。同时,在第一枚铜钱的(1,1)振动模态处也观察到了两个模式分裂现

象,如图 8(d)所示,在(2,0)模式下的两个相近频率分别为 6422Hz 和 6539Hz,在(1,1)模式下的两

个相近频率分别为 22570Hz 和 22805Hz。Manas<sup>[9]</sup>指出,这些硬币不是简单的扁平圆盘,由于造币过程的不对称,可能是造成分裂的原因。

3.5 材质对于测量结果的影响

硬币制造所用的材料会根据实用性和成本而更改变<sup>[13]</sup>。硬币的材料成分变化会导致杨氏模量和泊松比发生变化,进而导致物理尺寸接近的硬币的振动频率发生显著差异。如我国的第五套兰花一角硬币共有两种材质,一种是铝材质(1999年发行,杨氏模量 70.6Gpa),一种是钢材质(2005年发行,200Gpa),其物理尺寸几乎完全一致<sup>[14]</sup>。如表 8 所示,在(2,0)模式的共振频率处,钢材质硬币的共振频率要高于铝材质硬币的共振频率。尽管铝和铁的杨氏模量明显不同,但由于铝和铁密度的显著差异,分别为 2.102g/cm<sup>3</sup> 和 7.810g/cm<sup>3</sup>,使得它们在(2,0)模式的振动频率相近。同时,它们在模式(2,0)处都发生了频率分裂现象。

表 8 两种一角硬币频率的实验测量结果

| 硬币种类          | $F_1/\text{Hz}$ |       |
|---------------|-----------------|-------|
| 铝兰花一角硬币(1999) | 20414           | 21047 |
| 钢兰花一角硬币(2006) | 20719           | 21938 |

3.6 面积和硬币边缘的影响

在所有的样品中,只有表面积较大的银元可以在实验中探测到清晰的 6 种模式的共振频率,实验值为多次测量的结果(表 9)。由理论计算可知,银元的共振模式中,共振频率低于 24 kHz 的共有 8 种。通过实验测量共观测到其中的 6 种共振频率,其中有一种共振频率的相对误差为 6.7%,三种共振频率的相对误差为 10%左右,一种共振频率的相对误差为 20%左右,相对误差值要高于上述硬币的实验结果。

表 9 银元频率的理论值与实验测量结果 单位:Hz

| 模式  | 理论值   | 实验值   | 相对误差 |
|-----|-------|-------|------|
| 2,0 | 2980  | 未观测到  |      |
| 0,1 | 5231  | 4348  | 17%  |
| 3,0 | 6885  | 7359  | 9.5% |
| 1,1 | 11651 | 10406 | 11%  |
| 4,0 | 12002 | 14695 | 22%  |
| 5,0 | 18251 | 16395 | 10%  |
| 2,1 | 19700 | 18375 | 7%   |
| 0,2 | 21582 | 未观测到  |      |

经分析,误差主要来源可能是硬币成分和边缘影响。由于历史和政治原因,所用的民国三年银元曾发行过多个版本,先后在天津、江苏、湖北、浙江、安徽、沈阳等各省造币厂铸造。在新中国建国初期(1949—1951),随着解放军向西北、西南等地挺进及解放西藏等,沈阳造币厂和四川省分行等也铸造过不同形态的该版本银元<sup>[15]</sup>。不同时期铸造的硬币其成分和尺寸或略有差异,共振频率也会有所改变。我们使用的银元质量为 19.32g,与一般所说的七钱二分(合 26.8g)有差异<sup>[15]</sup>,不排除伪造或者磨损严重的因素。

另外,银元硬币的侧边为齿状分布,而非光滑的圆面,导致其边界方程发生改变,进而使理论值计算产生一定误差,如图 9 所示。



图 9 一元银元侧边

3.7 实验中的其他误差分析

硬币振动将会产生声波,可以使用智能手机的麦克风精确测量。其他物体与硬币的任何接触都会影响其边界条件,从而会影响其振动模式和振动频率,因此应当测量硬币在自由空间振动时的共振声学频率。

对于本实验所产生的误差,还可能产生于以下方面:(1)硬币的表面并不是平整光滑的,而是有图案的凹凸形表面。建模时简化为表面平整光滑的平板,会造成一定的误差。(2)硬币的材料大多为合金材料,其杨氏模量和泊松比等物理参数较为复杂。建模中,我们选择硬币中主要金属成分的杨氏模量和泊松比进行模拟计算,会造成一定误差。(3)硬币在长期使用过程中会造成一定的磨损,从而对硬币的厚度、边缘光滑性造成影响,进而影响硬币的振动频率。(4)硬币在使用过程中会粘上一些非金属材质的污垢,其物理属性与金属的物理属性相差较大,对硬币的振动频率会造成影响。

4 结语

本文通过对不同种类的硬币弹跳的共振声学

频率的探究,提供了一个生动有趣的居家实验方案。通过此项实验,可以培养学生以下方面的能力:(1)探索平板振动中的力、表面波和能量等物理概念与原理。(2)研究表征本征振动的频率模式如何取决于样品的形状尺寸和材料特性。(3)培养提出问题和解决问题的能力,将实验结果与模型进行比较,构建解释并发现新问题。在这个实验学习过程中,可以通过货币探究来学习历史。

由于篇幅限制,其他多边形硬币(例如六边形和十二边形的英国硬币,十二边形的香港紫荆花硬币)、不同桌面弹跳结果对比、模式分裂现象等还有待继续研究。此外,玻璃、瓷器、保温杯等更复杂物体的本征振动声学问题也可以逐步在基础物理教学中开展。

**致谢:** 本文部分实验测量在南开大学物理科学学院公能创新实验室完成,感谢提供实验室开放的老师 and 助教同学。

#### 参 考 文 献

- [1] 张增明. 64 学时大学物理实验线上教学方案及其设计思路[J]. 物理与工程, 2020, 30(2): 7-10.  
ZHANG Z M. 64 class hours online teaching scheme of college physics experiment and its design ideas[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(2): 7-10. (in Chinese)
- [2] 乐永康. 新冠肺炎疫情下美国物理实验教学及中美情况对比[J]. 物理与工程, 2020, 30(2): 11-13.  
LE Y K. Physics experiment teaching in the United States and comparison between China and the United States under the COVID-19[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(2): 11-13. (in Chinese)
- [3] 王瑾, 朱江, 李文华, 等. 启发式的多层次居家物理实验设计探索[J]. 物理实验, 2020, 40(4): 31-37.  
WANG J, ZHU J, LI W H, et al. Heuristic design of multi-level home physics experiment[J]. Physics Experimentation, 2020, 40(4): 31-37. (in Chinese)
- [4] LINDSAY R B, RAYLEIGH J. Lord Rayleigh—The man and his work[M]. Pergamon Press, 1970.
- [5] 张宇亭, 赵斌, 王茂香. 弦振动实验中驻波波长的测量方法[J]. 实验科学与技术, 2016, 14(1): 42-45.  
ZHANG B T, ZHAO B, WANG M X. Measurement method of standing wave wavelength in string vibration experiment[J]. Science Technology and Engineering, 2016, 14(1): 42-45. (in Chinese)
- [6] 张凡, 姜伟, 吕丹. 关于动态法测量金属杨氏模量实验的两个重要方面的研究[J]. 大学物理实验, 2007(4): 35-38, 42.  
ZHANG F, JIANG W, LV D. Research on two important aspects of dynamic method for measuring Young's modulus of metals[J]. Physical Experiment of College, 2007(4): 35-38, 42. (in Chinese)
- [7] 国际青年物理学家竞赛[EB/OL]. <https://www.iypt.org/problems/>
- [8] KRALJEVSKI I, DUCKHORN F, JU Y C, et al. Acoustic Resonance Recognition of Coins[C]//2020 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC) mentation & Measurement Technology Conference. IEEE, 2020.
- [9] MANAS A. The music of gold: can gold counterfeited coins be detected by ear? [J]. European Journal of Physics, 2015, 36(4): 045012.
- [10] CHAKRAVERTY S. Vibration of plates[M]. Florida: The Chemical Rubber Company Press, 2009.
- [11] 李立碑, 孙玉福. 金属材料物理性能手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [12] 梁清香, 戴保东, 王灵卉. 圆孔对中厚圆板固有频率影响的研究[J]. 太原重型机械学院学报, 2003(2): 103-105, 109.  
LIANG Q X, DAI B D, WANG L H. Study on the influence of circular hole on the natural frequency of medium thick circular plate[J]. Journal of Taiyuan Heavy Machinery Institute, 2003(2): 103-105, 109. (in Chinese)
- [13] 王永立. 硬币及硬币材料的发展[J]. 材料科学与工程, 1997(1): 68-70.  
WANG Y L. Development of coins and coin materials[J]. Journal of Materials Science and Engineering, 1997(1): 68-70. (in Chinese)
- [14] 孙克勤. 中国现代流通硬币标准目录[M]. 3 版. 上海: 上海科学技术出版社, 2020.
- [15] 寇尚民. 袁大头银币铸成数量考述[J]. 中国钱币, 2013(2): 24-30.  
KOU S M. Research on the number of yuan Datou silver coins[J]. China Numismatics, 2013(2): 24-30. (in Chinese)