

关于柔软无弹性轻绳中加速度奇点问题的讨论

刘天齐

(中国科学技术大学少年班学院, 安徽 合肥 230026)

摘 要 不少大学物理教材将“柔软无弹性轻绳”作为一种经典模型并围绕其理想性提出了一系列的题目,而不同的求解方法可能得到不同的答案,这本质上是因为这种模型中隐含着加速度奇点,而各解法对加速度奇点的处理不同。为了系统性地解决不同解法之间的分歧,本文首先选取了有关加速度奇点的三个经典物理问题,然后综述了这些题目的若干解法,接着分析其正确性,最后归纳出了有关加速度奇点的物理问题的一般规律,并提出了多种应对方法,以更准确地处理有关加速度奇点的物理问题。

关键词 大学物理;柔软无弹性轻绳;加速度奇点;微元法

DISCUSSION ON THE ACCELERATION SINGULARITY IN SOFT AND INELASTIC LIGHT ROPES

LIU Tianqi

(School of Gifted Young, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026)

Abstract Many college physics textbooks take “soft inelastic light rope” as a classical physics model and raise a series of questions around its ideality. Different solutions may get different answers, which is essentially because this model contains acceleration singularities, and each solution method handles acceleration singularities differently. In order to systematically solve the contradiction between different solutions, this paper first selects three classical physical problems related to acceleration singularities, then summarizes several solutions to these problems, analyzes their correctness. Finally, this paper summarizes the general laws of physical problems related to acceleration singularities, and proposes various methods to more accurately handle physical problems related to acceleration singularities.

Key words college physics; soft inelastic light rope; acceleration singularity; differential element method

“加速度奇点”^[1]指质量无穷小,但在某瞬时的加速度为无穷大的理想质点,常见于“柔软无弹性轻绳或链条”的经典理想模型中^[2-5],求解这类模型的问题时可能产生不易发现的陷阱。本文将深入探究柔软无弹性轻绳的动力学性质,找到加速度奇点问题的一般规律,以纠正柔软无弹性轻绳中加速度奇点问题的解法上存在的错误。

1 钝角摆问题

1.1 题目

常见的单摆都是锐角摆,即摆角不超过 90° 的单摆,如果摆角超过 90° 则为钝角摆。如图 1(a)所示的一钝角摆,一长为 l 的柔软无弹性轻绳一端系于光滑的钉子上,另一端挂着一个质量为 m 的

收稿日期: 2023-05-15

作者简介: 刘天齐,中国科学技术大学少年班学院在读本科生, pb22000070@mail.ustc.edu.cn。

引文格式: 刘天齐. 关于柔软无弹性轻绳中加速度奇点问题的讨论[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 52-56, 79.

Cite this article: LIU T Q. Discussion on the Acceleration Singularity in Soft and Inelastic Light Ropes[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 52-56, 79. (in Chinese)

小球,一开始绳恰好绷直,高于钉子, θ 为 30° 。无初速度地释放小球,求小球经过最低点时的速度 u 。

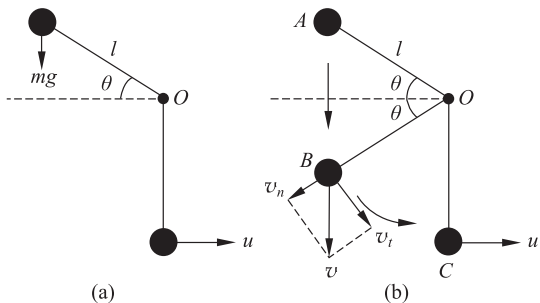


图 1 钝角摆问题

(a) 初末状态; (b) 运动过程

1.2 错误解法

解: 小球从始态到末态质心下降了 $\frac{3l}{2}$, 由机械能守恒定律, 有

$$mg \frac{3l}{2} = \frac{mu^2}{2} \quad (1)$$

解得

$$u = \sqrt{3gl} \quad (2)$$

1.3 正确解法

解: 如图 1(b), 小球在下落到 B 点之前绳子一直处于松弛状态, 设其在下落到 B 点时的速度为 v , 此时绳子突然绷紧, 之后小球做典型的单摆运动。综上分析, 分两个阶段讨论:

阶段一: 从 A 点到 B 点, 小球进行自由落体运动, 小球下降了 l , 由机械能守恒定律得

$$mgl = \frac{mv^2}{2} \quad (3)$$

解得

$$v = \sqrt{2gl} \quad (4)$$

相对于沿钉子的轴, 绳子在绷紧瞬间的拉力的力矩为 0, 重力的大小有限且在此瞬间作用的时间是无穷小, 所以重力的力矩也为 0。由角动量定律, 小球相对于沿钉子的轴的角动量不变, 又因为旋转半径不变, 故小球的沿切向的速度 v_t 不变, 又因为绳无弹性, 所以沿绳方向的速度从 v_n 突变为 0。

综上, 绳子绷紧后小球的速度突变为

$$v_t = v \cdot \cos\theta = \sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad (5)$$

阶段二: 从 B 点到 C 点, 小球进行单摆运动, 小球下降了 $\frac{l}{2}$, 由机械能守恒定律得

$$\frac{mv_t^2}{2} + mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{mu^2}{2} \quad (6)$$

解得

$$u = \sqrt{\frac{5gl}{2}} \quad (7)$$

2 绳落桌问题

2.1 题目

题 a^[6,7]: 如图 2(a) 所示, 一长为 l 的柔软无弹性且密度均匀的轻绳 (图 2 以链条表示) 伸直在光滑桌面上并垂直于桌沿, 因一端略露出桌沿而开始滑落, 桌边有光滑细槽使得绳子一旦离开桌面就会铅直向下滑落, 求另一端刚露出桌沿时绳子的速度 v_a 。

题 b: 如图 2(b) 所示, 将上题的轻绳揉成很小的一团, 且只将一端略露出桌沿, 其余不变, 求另一端刚露出桌沿时绳子的速度 v_b 。

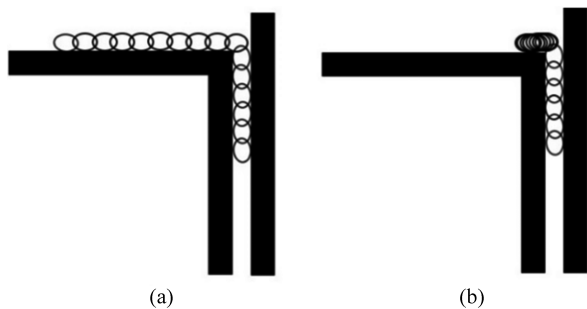


图 2 绳落桌问题

(a) 伸直的绳落桌问题; (b) 紧缩的绳落桌问题

2.2 错误解法

解: 两道题中的绳子的质心从始态到末态都下降了 $\frac{l}{2}$, 由机械能守恒定律得

$$mg \frac{l}{2} = \frac{mv_a^2}{2} = \frac{mv_b^2}{2} \quad (8)$$

解得

$$v_a = v_b = \sqrt{gl} \quad (9)$$

2.3 正确解法

解: 题 a 有位于桌沿处的“加速度奇点”, 但是绳上各点的速度大小一致, 所以机械能仍然守恒, 绳子的质心下降了 $\frac{l}{2}$, 故有

$$mg \frac{l}{2} = \frac{mv_a^2}{2} \quad (10)$$

解得

$$v_a = \sqrt{gl} \quad (11)$$

题 b 有位于桌沿处的“加速度奇点”，此处绳段原本静止，在某一瞬间突然加速至与下方绳段共速，类似于完全非弹性碰撞，可以用变质量物体法处理：

设绳线密度为 λ ， t 时刻下垂着的绳段的长度为 y ，速度为 v ，则绳所受合力等于下垂着的绳端所受重力 $\lambda y g$ ，绳的总动量为 $\lambda y v$ ，由变质量物体的动量定理得

$$\lambda y g = \frac{d(\lambda y v)}{dt} \quad (12)$$

注意到 $v = \frac{dy}{dt}$ ，由此消去 dt 并化简得

$$2g d(y^3) = 3d(y^2 v^2) \quad (13)$$

解此常微分方程并代入初值，得

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{3}} \quad (14)$$

将 $y = l$ 代入式(14)解得

$$v_b = \sqrt{\frac{2gl}{3}} \quad (15)$$

3 绳落钉问题

3.1 题目

在文献[5]中，有这样一道习题：

如图 3(a)所示，一长为 l ，重为 w 的柔软无弹性且密度均匀的轻绳挂在一光滑细钉上，初始时两边的绳长相等时，绳处于平衡状态。在小扰动下绳从钉上滑落，求：滑动到图 3(b)所示的状态，绳长一边为 b ，另一边为 c 时，绳对钉子的压力 N 。书上给出的答案是 $N = \frac{4wbc}{l^2}$ 。

3.2 错误解法

文献[8]给出了如下解析：

解：设钉子的半径为 r ($r \rightarrow 0^+$)，将绳子分为

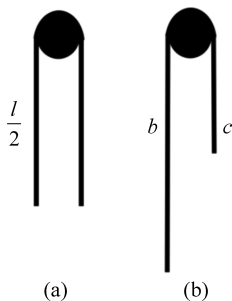


图 3 绳落钉问题的初始状态和滑动后的状态

(a) 初始状态；(b) 滑落后的状态

三段，长为 b 的一段、与钉子接触的一段和长为 c 的一段。长为 b 的一段绳子质量为 m_1 ，与钉子接触的一段质量趋近于 0，长为 c 的一段绳子质量为 m_2 ，段间的拉力分别为 T_1 、 T_2 ，有

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (16)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (17)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{l} \pi r a \quad (18)$$

$$N = T_1 + T_2 \quad (19)$$

$$m_1 = \frac{mb}{l}, \quad m_2 = \frac{mc}{l} = \frac{m}{l}(l - \pi r - b) \quad (20)$$

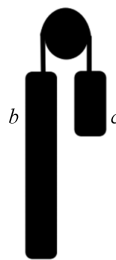
由式(16)~式(18)和式(20)得

$$a = \frac{g}{l}(2b - l + \pi r) \quad (21)$$

由 $r \rightarrow 0^+$ 与式(18)得 $T_1 = T_2$ ，与式(16)、式(17)和式(19)~式(21)联立解得

$$N = \frac{4wbc}{l^2} \quad (22)$$

这种解法本质上是原结构图约化成了图 4 所示的简化模型，也就是忽略了钉子上半圆周的绳段。这种解法看似正确，但是钉子上的小段绳子可能不容忽略，因为虽然其质量是无穷小，但是其加速度却是无穷大，所以其动量的改变量可能不容忽略，也就是说出现了“加速度奇点”，图 4 绳落钉问题错误的简化模型



3.3 准正确解法

为了不忽略钉子上方的“加速度奇点”的影响，可以采用质心运动定理法和变质量物体法，两者本质类似且结论相同，这里采用前者。求解过程中有三个注意事项：(1)“小扰动”类型的问题中，时间这一变量可能不确定或者为无穷大，故应避免以时间 t 作为自变量；(2)“加速度奇点”可能会使机械能不守恒，详见第 4 部分；(3)“沿绳方向参考系”的技巧是可取的，因为其可以由角动量守恒定律导出，见式(23)^[8,9]。

解：

1) 设立未知数

由题设钉子半径为 $r \rightarrow 0^+$ ，绳长为 l ，重为 w ，质量为 m ，则线密度 ρ 为 $\frac{w}{gl}$ ，又设绳端位移为 h 时，绳的速度为 $v(h)$ ，总动量为 $p(h)$ (二者以向

下为正方向),钉对绳的力为 $N(h)$ (以向上为正方向)。

2) 运动学分析

绳端位移为 h 时,以钉子中心为基点,由绳子的角动量定理有

$$\left(h + \frac{l}{2}\right)\rho gr - \left(h - \frac{l}{2}\right)\rho gr = mr \frac{dv}{dt} \quad (23)$$

化简并消除变量 t 得

$$\frac{2gh}{l} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot v \quad (24)$$

解此常微分方程并代入初始条件($h=0$ 时 $v=0$),解得

$$v(h) = \sqrt{\frac{2g}{l}}h \quad (25)$$

故动量为

$$p(h) = \left(h + \frac{l}{2}\right)\rho v - \left(h - \frac{l}{2}\right)\rho v = 2\rho \sqrt{\frac{2g}{l}}h^2 \quad (26)$$

3) 动力学分析

由绳的动量定理得

$$w - N(h) = \frac{dp(h)}{dt} \quad (27)$$

联立式(26)与式(27)得

$$N(h) = w - \frac{8wh^2}{l^2} \quad (28)$$

由题设

$$h = \frac{|b-c|}{2} \quad (29)$$

联立式(28)与式(29)得

$$N(h) = w - \frac{2w}{l^2}(b-c)^2 \quad (30)$$

根据式(30),当 $\frac{\sqrt{2}}{4}l \leq h < \frac{1}{2}l$ 时,绳尚未落完,但 $N \leq 0$,表明绳会向上跃起,可见绳不会一直紧贴于钉子上。

称这种解法为准正确的,是因为这种方法也存在着不严谨性——无法解答如下问题:绳子在整体跃起之前是否会有部分先跃起? 因此,需要引入以下解法。

3.4 正确解法

3.3 节把绳看作整体来处理,没有讨论“加速度奇点”处细节的运动状况。为了细致地考察钉子上方半径为 r 的绳段是否稳定,可采用另一种

较为复杂但更为严谨的方法:微元法。

解: 首先,假设 h 小于一定值时绳未发生畸变(畸变指脱离钉子或运动状态变为非竖直滑落),显然 $h=0$ 时假设成立。接下来讨论绳脱离钉子或发生畸变时 h 的临界值,建立如图 5 所示的极轴向上的极坐标系,以 θ 为空间的自变量,以 h 为时间的自变量,考察一小段圆心角为 $d\theta$ 的绳段,设其速度为 v ,与钉子间的压力为 $\partial N(\theta, h)$, θ 处绳张力为 $T(\theta, h)$,这里以及下文的 ∂N 均是表示对角元 $d\theta$ 所对应的力元,其他未知数的设立同 3.3 节。先不令 $r \rightarrow 0^+$,则钉子上方的绳段长为 πr ,右侧铅直的绳段长为 $\frac{l-\pi r}{2} - h$,左侧铅直的绳段长为 $\frac{l-\pi r}{2} + h$ 。

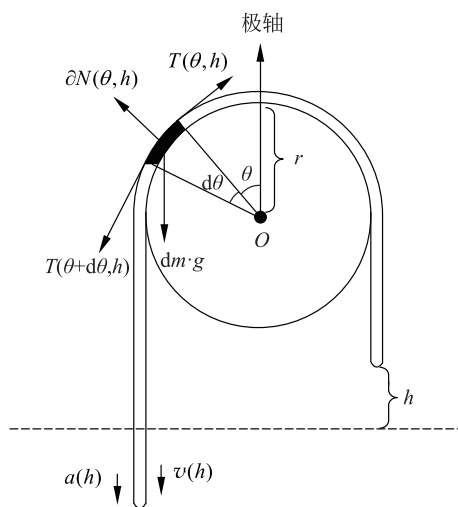


图 5 绳落钉问题的极坐标图

当绳尚未发生畸变时,3.3 节的运动学分析可以沿用,即无论 r 是否趋于 0^+ ,式(25)均成立,故有

$$v(h) = \sqrt{\frac{2g}{l}}h \quad (31)$$

$$a(h) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2g}{l}h \quad (32)$$

考察右侧铅直的绳段,其上不存在加速度奇点,由牛顿第二定律知

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, h\right) - \rho g\left(\frac{l-\pi r}{2} - h\right) = \rho\left(\frac{l-\pi r}{2} - h\right)a(h) \quad (33)$$

得

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, h\right) = \frac{\rho g}{2l}(l^2 - 4h^2 - \pi r l - 2\pi r h) \quad (34)$$

然后,受力分析:

法向:以向外为正,由图 5 得

$$\partial F_n(\theta, h) = \partial N(\theta, h) -$$

$$[T(\theta + d\theta, h) + T(\theta, h)] \sin \frac{d\theta}{2} - dm \cdot g \cos \theta \quad (35)$$

切向:以逆时针方向为正,由图 5 得

$$\partial F_t(\theta, h) = [T(\theta + d\theta, h) - T(\theta, h)] \cos \frac{d\theta}{2} + dm \cdot g \sin \theta \quad (36)$$

接着,由每段微元的牛顿第二定律,列出运动学方程并求解:

$$\partial F_n(\theta, h) = -\frac{dm \cdot v^2}{r} \quad (37)$$

$$\partial F_t(\theta, h) = dm \cdot a(h) \quad (38)$$

联立式(31)、式(32)、式(35)~式(38),令 $d\theta \rightarrow 0^+$,再对 $T(\theta)$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分,代入关于 θ 的初值即式(34),并整理得

$$T(\theta, h) = \frac{2\rho g r h \theta}{l} + \frac{\pi \rho g r h}{l} + \rho g r \cos \theta + \frac{\rho g}{2l}(l^2 - 4h^2 - \pi r l - 2\pi r h) \quad (39)$$

$$\frac{\partial N(\theta, h)}{\partial \theta} = \frac{2\rho g r h \theta}{l} + \frac{\pi \rho g r h}{l} + 2\rho g r \cos \theta + \frac{\rho g}{2l}(l^2 - 8h^2 - \pi r l - 2\pi r h) \quad (40)$$

对 $\partial N(\theta, h)$ 正交分解为水平与竖直方向并各自积分得

$$N_x(h) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \partial N(\theta, h) = \frac{4\rho g h r}{l} \quad (41)$$

$$N_y(h) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \partial N(\theta, h) = \frac{\rho g (l^2 - 8h^2)}{l} \quad (42)$$

其中, $N_x(h)$ 以向左为正, $N_y(h)$ 以向上为正。

在式(41)和式(42)中,令 $r \rightarrow 0^+$,得

$$N_x(h) = 0 \quad (43)$$

$$N_y(h) = \omega - \frac{8\omega h^2}{l^2} \quad (44)$$

最后,由式(40)知,当 $r \rightarrow 0^+$ 时,单位圆心角所对应的轻绳与钉子间的作用力为

$$\frac{\partial N(\theta, h)}{\partial \theta} = \frac{\rho g}{2l}(l^2 - 8h^2) \quad (r \rightarrow 0^+) \quad (45)$$

当 $h < \frac{\sqrt{2}}{4}l$ 时, $\frac{\partial N(\theta, h)}{\partial \theta} \geq 0$, 此时绳子各处

与钉子之间均有作用力,说明绳子未跃起。

当 $\frac{\sqrt{2}}{4}l \leq h < \frac{1}{2}l$ 时, $\frac{\partial N(\theta, h)}{\partial \theta} \leq 0$, 此时绳子

已整体跃起,不再满足以上各式。

综上,此解法不仅导出了与 3.3 节相同的结论,还解答了 3.3 节的解法所不能解答的问题。式(45)右侧不含 θ ,说明当 $r \rightarrow 0^+$ 时整个半圆周上的绳的状态是同步的,不会产生畸变或跃起的时差,即绳子在整体跃起之前不会有部分先跃起。

4 关于加速度奇点的讨论

由上面三个例题可知,“加速度奇点”常存在于各种理想模型中,除了不可伸长的柔软无弹性轻绳与链条之外,还有理想气体分子间的碰撞等模型。从这些模型中可以归纳出应对“加速度奇点”的方法。

第一,“加速度奇点”可能使得质量无穷小的物体产生不容忽略的反作用力。由数学知识可知,处理无穷大量或无穷小量时,最严谨的做法是把做近似或取极限放在最后一步,为此,计算有关“加速度奇点”的问题时应当尽量最后再做近似,例如 3.4 节的解法在最后一步才令 $r \rightarrow 0^+$ 。此外,当柔软无弹性轻绳的运动状态可能会突变时,还应当采用微元法,例如绳落钉问题中,绳子在紧贴着钉子下落的过程中会突然跃离钉子,如果把绳整体化考虑,就容易犯 3.2 节的错误,而 3.4 节把绳微元化考虑,考虑到了绳的每一部分的状态,不易出错,并且 3.4 节相比 3.3 节的解法更为严谨,可以证明绳子在整体跃起之前不会有部分先跃起,且绳子在跃起前不会在离心力的作用下产生畸变。

第二,“加速度奇点”可能使得机械能不守恒,如绳落桌问题的题 b 和钝角摆问题,这两个问题中,绳子上的某一点或整条绳子在某一时刻为“加速度奇点”,且此处的速度大小有突变,类似于非弹性碰撞,机械能不守恒;绳落桌问题的题 a 和绳落钉问题中,绳子上的某处在某一时刻有“加速度奇点”,但此处的速度大小没有突变,类似于弹性碰撞,机械能守恒。综上,可以总结出以下规律:若“加速度奇点”处速度大小有突变,则机械能不守恒;若没有“加速度奇点”,或“加速度奇点”处速度大小不变,则机械能守恒。

第三,“加速度奇点”可能使得物体运动的状

(下转第 79 页)

136 的推荐学时情况下,建设线上课程资源、开展线上教学是满足新基本要求的很好的解决途径。(4)介绍与知识点条目相关的思政元素和教学设计,为教师开展课程思政建设提供参考。当然,这些在《基本要求》中没有给出的部分也为各个高校留下了自主发挥的空间,可以在各自的教学计划和教学大纲中进一步明确。

3 结语

本文详细比较分析了 2023 版与 2010 版《基本要求》在模块结构、内容条目和教学要求的变化,总结了 2023 版《基本要求》的目标优化路径和条目调整方式,对深入理解把握 2023 版《基本要求》,更好地开展课程建设和教学实践具有参考意义。

参 考 文 献

[1] 国家教育委员会高等教育司. 高等学校工科本科基础课程教

学基本要求[M]. 1995 年版. 北京:高等教育出版社,1995.

[2] 教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委员会. 理工科类大学物理课程教学基本要求[M]. 2010 年版. 北京:高等教育出版社,2010.

[3] 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会. 理工科类大学物理课程教学基本要求[M]. 2023 年版. 北京:高等教育出版社,2023.

[4] 顾社. 对于重新制定的《非物理类理工科大学物理课程教学基本要求》的认识和体会[J]. 物理与工程, 2007, 17(1): 1-4, 24.

GU M. Understanding and reflection on the newly revised “Basic requirements for teaching university physics courses in non-physics science and engineering major”[J]. Physics and Engineering, 2007, 17(1): 1-4, 24. (in Chinese)

[5] 胡盘新. 我国工科大学物理教学大纲和教学基本要求的制订概况(1954—1995 年)[J]. 物理与工程, 2007, 17(3): 10-11. HU P X. An overview of the formulation of syllabus and teaching basic requirements for physics instruction in engineering universities in our country(1954—1995)[J]. Physics and Engineering, 2007, 17(3): 10-11. (in Chinese)

(上接第 56 页)

态发生突变,如绳落钉问题中绳子会跃起,又如绳落桌问题,如果没有凹槽的限制,绳在速度达到一定值的时候会脱离桌沿而跃出^[6]。为此,可以先假设系统稳定,再检验系统初值是否满足假设,最后讨论假设态的可持续性。这样就可以证明系统在第一次出现状态突变之前一直是稳定的,也可以导出何时出现第一次状态突变。

5 结语

本文通过讨论三个有关“加速度奇点”的例题,得出了“加速度奇点”可能产生的三个反常物理效果,最终给出了相应的应对方法,可以指导“加速度奇点”问题的建模与计算。未来的研究可进一步探索含有“加速度奇点”的柔软无弹性轻绳在运动状态突变后的行为,例如绳落钉问题中绳在跃起后的运动轨迹。

参 考 文 献

[1] 路峻岭,秦联华,任乃敬. 关于柔软细绳运动问题中加速度奇点的讨论[J]. 大学物理, 2016, 35(12): 7-12.

LU J L, QIN L H, REN N J. A discussion about the acceleration strange point in some questions of soft and thin

cords' movement[J]. College Physics, 2016, 35(12): 7-12. (in Chinese)

[2] 程稼夫. 中学奥林匹克竞赛物理教程力学篇[M]. 合肥:中国科技大学出版社, 2002: 133-134.

[3] 刘斌. 力学[M]. 2 版. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2013: 142-145.

[4] 郑永令,贾起民,方小敏. 力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2002: 119.

[5] 杨维纭. 力学与理论力学:上册[M]. 2 版. 北京:科学出版社, 2014: 283.

[6] 陈思,李岩松. 链条桌边下落问题的探究[J]. 物理与工程, 2018(2): 96-98.

CHEN S, LI Y S. Discussions on the chain falling along the table edge[J]. Physics and Engineering, 2018(2): 96-98. (in Chinese)

[7] 郑国安. 下降链条的能量损失[J]. 物理教师, 2005(5): 41-42.

ZHENG G A. Energy loss of descending chain[J]. Physics Teacher, 2005(5): 41-42. (in Chinese)

[8] 杨维纭. 力学与理论力学学习题解答:上册[M]. 2 版. 北京:科学出版社, 2014: 48-49.

[9] 刘斌. 充分发挥习题的作用培养学生独立解决问题的能力[J]. 物理与工程, 2014, 24(4): 11-19.

LIU B. Give full play to the role of exercises and cultivate students ability to solve problems independently[J]. Physics and Engineering, 2014, 24(4): 11-19. (in Chinese)