

“从爱因斯坦质能关系式推出勾股定理”之荒谬

葛惟昆

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘要 一本数学教科书提出并“证明”勾股定理可以用爱因斯坦质能关系式推导出来。教科书的编写者混淆了爱因斯坦少年时对勾股定理的简洁而睿智的纯数学推导, 与多年后提出的著名的物理大发现——质能关系式。科学和教育界类似的荒谬贻害深远, 必须予以澄清。

关键词 勾股定理; 质能关系式; 荒谬

A RIDICULOUS DEDUCTION OF THE PYTHAGOREAN THEOREM FROM EINSTEIN'S MASS ENERGY RELATION EQUATION

GE Weikun

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract A middle school mathematics textbook, mixes up the intelligent mathematical proof of the pythagorean theorem by teenager Albert Einstein, with his later great discovery of the mass-energy relation equation. This kind of consusion would lead to very harmful consequence in a long term, hence should be clearly clarified.

Key words pythagorean theorem; mass-energy relation equation; ridiculous

1 故事的由来

最近关于人民教育出版社义务教育教科书八年级《数学自读课本》^[1] (以下简称“教科书”) 的“勾股定理与爱因斯坦质能关系式”的匪夷所思的勾连, 引起物理界一阵感叹。勾股定理与爱因斯坦质能关系式在科学上都是重量级的发现, 而把它们勾连在一起, 也可以算是这本号称“教科书”的编写者的相当惊人的发现。教科书的封面就以勾股定理作图, 可见它的编写者们是拿这件事很以为傲的。

爱因斯坦本人在 11 岁时还真的给出一个勾股定理的证明, 于是想象力丰富的编者就杜撰了下面的故事:



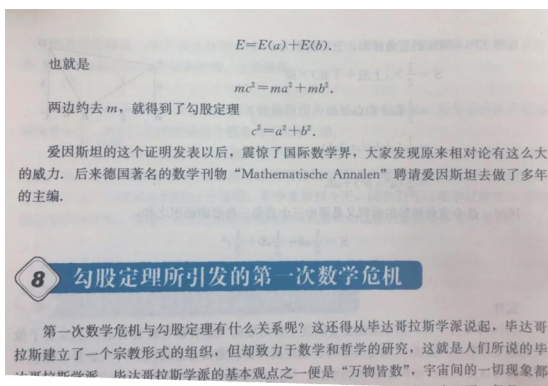
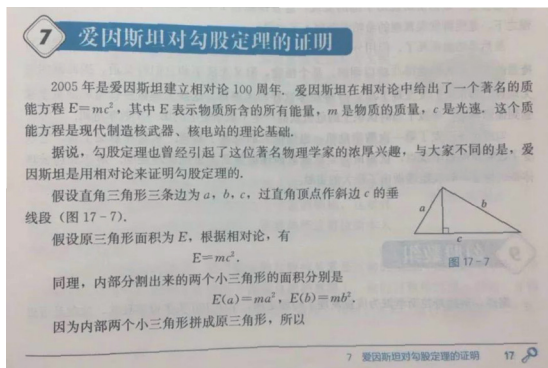
“2005 年是爱因斯坦建立相对论 100 周年。爱因斯坦在相对论中提出了一个著名的质能方程 $E=mc^2$, 其中 E 表示物质所含的所有能量, m 是

收稿日期: 2023-09-29

作者简介: 葛惟昆, 香港科技大学荣休教授, 清华大学物理系教授, wkg@pku.edu.cn。

引文格式: 葛惟昆. “从爱因斯坦质能关系式推出勾股定理”之荒谬[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 11-15.

Cite this article: GE Weikun. A ridiculous deduction of the pythagorean theorem from Einstein's mass energy relation equation[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 11-15. (in Chinese)



物质的质量, c 是光速。这个质能方程是现代制造核武器、核电站的理论基础。”到这儿, 没大毛病。接下去:

“据说, 勾股定理也曾经引起了这位伟大的物理学家的浓厚兴趣,” 这也没错。然后: “与众不同的是, 爱因斯坦是用相对论来证明勾股定理的。”读到这儿, 笔者不由惊出一身冷汗。相对论可以证明勾股定理, How? 这怎么可能呢, 怎么有关联了呢? 学了这么多年物理竟然不知这等妙闻? 有趣的还在下面, 这个“证明”原来如此:

假设直角三角形的三条边为 a, b, c , 过直角顶点作斜边 c 的垂线段。

假设原三角形面积为 E , 根据相对论, 有 $E = mc^2$ 。

同理, 内部被分割出来的两个小三角形的面积为

$$E(a) = ma^2, E(b) = mb^2$$

因为内部两个小三角形拼成原三角形, 所以

$$E = E(a) + E(b)$$

也就是

$$mc^2 = ma^2 + mb^2$$

两边约去 m , 就得到了勾股定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$

看到这里, 不禁拍案叫绝, 原来爱因斯坦质能

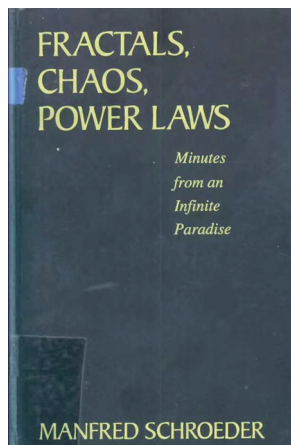
关系式可以用来算直角三角形的面积! 原来质能关系式中的光速 c , 可以就是直角三角形的斜边长度 c 。这种类比真是异想天开, 匪夷所思。为了让故事更吸引人, 教科书继续编造:

“爱因斯坦这个证明发表以后, 震惊了国际数学界, 大家发现相对论原来有这么大的威力。后来德国著名的数学刊物 ‘Mathematische Annalen’ 聘请爱因斯坦去做了多年的主编。”

好一个完美动听的故事。爱因斯坦发表过这样的证明吗? 他因此而震惊了国际数学界了吗? 物理界和数学界的朋友们听到这里都目瞪口呆: 谎言就这样明目张胆地写入官方教科书里?

2 爱因斯坦对勾股定理的天才论证

事实又是如何呢? 爱因斯坦证明过勾股定理还真是历史事实, 但那是他 11 岁时的天才萌发, 离他发明相对论还有 15 年之久, 谈何以相对论证明勾股定理? 一本著名的科学史著作《分形、混沌和指数律 (Fractals, chaos, power laws)》^[2], 论述了勾股定理 (西方称之为毕达哥拉斯定理) 的由来, 其中介绍了爱因斯坦的证明。那一节的题目就是爱因斯坦的名言: “我要稍微想一想” (I will a little think)。这个稍微想一想, 发生在爱因斯坦 11 岁学习欧几里得几何学时。他那时已经有了追求简约的思想风格, 因此觉得欧几里得关于毕达哥拉斯定理的证明是不必要的繁复 (如果你认真看看欧几里得最初的证明, 那里有若干条辅助线, 一定会同意爱因斯坦的看法), 于是只经过简单的思考 (A little thinking), 爱因斯坦给出了一个十分简洁的证明, 只需要一根辅助线。这根辅



助线把原来的三角形分成两个,显然这两个小三角形和原来的大三角形彼此相似。如果大三角形斜边长度为 c ,两个直角边长度分别为 a 和 b ,则 a 和 b 分别成为两个小三角形的斜边长度(见图 1)。根据相似三角形的欧几里得几何学,可以证明这三个三角形的面积之比等于它们相应的一个边(例如斜边)长度平方之比,因此,这三个三角形的面积可以用 $E_a = ma^2$ 、 $E_b = mb^2$ 和 $E_c = mc^2$ 来表示, m 是个无量纲的常数。简单来说,直角三角形的面积是两个直角边长度的乘积之半,而两个直角边长度之比取决于内角,例如图中 $b = aa$,面积即可以写成 $ab/2 = aa^2/2$,也就是与一个边长的平方成正比。图中的三个三角形是相似三角形,这个比例系数 a 是相同的,所以这三个三角形的面积之比等于它们相应的一个边(例如斜边)长度平方之比。这样,这三个三角形的面积之间显然有下列关系:

$$E_a + E_b = E_c$$

即

$$ma^2 + mb^2 = mc^2$$

约去常数 m , 就得到勾股定理。

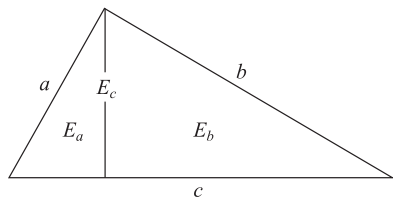


图 1

多么巧妙而简洁的证明,出自一位 11 岁少年之手。细心的读者可能会发现,这里真出现了类似相对论质能关系式的公式: $E_c = mc^2$, 于是“教科书”大加发挥,说成是爱因斯坦用相对论的质能关系式证明了勾股定理。这些编辑绝对是没经过大脑,也不想想在上面的勾股定理证明中, m 只是个无量纲的常数而不是质量, c 是个长度而不是光速, E 也不是能量而是面积。两者之间的关系,除了表面形似,可以说风马牛不相及! 让人不得不佩服编辑们的想象力!

3 勾股定理的各种传奇证明

至于震惊了国际数学界,更是一个神话。勾股定理的证明从公元前 400 多年,至今 2600 多

年,有无数智者徜徉于其中寻求乐趣。就连一位后来当了美国总统的加菲尔德先生,也给出一个颇为聪明的证法(见图 2),后被戏称为总统证法^[2]。如图 2 所示,三角形 ABC 的面积是 $c^2/2$, AEB 和 CBD 两个三角形面积都是 $ab/2$ 。这三者面积之和为直角梯形 $ABED$ 的面积 $(a+b)(a+b)/2$ 。因此

$$\frac{c^2}{2} + ab = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = ab + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

因而

$$a^2 + b^2 = c^2$$

这个证明也颇有新意,说明这位后来的美国总统确实智力过人。

总而言之,勾股定理自古至今堪称人类智慧的一个大赛场,包括吸引了 11 岁的爱因斯坦,但是无论如何,与相对论无关,与质能关系式完全无关。

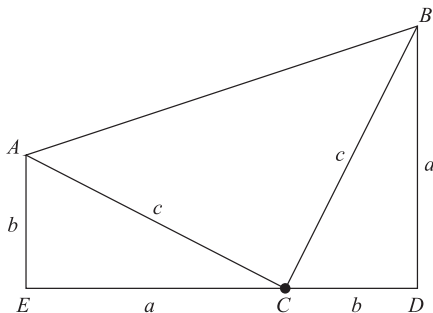


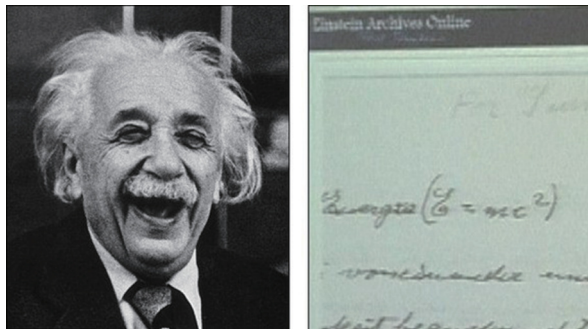
图 2

4 相对论质能关系式

那么相对论质能关系式又是何方神圣呢? 让我们引述张天蓉在《上帝如何设计世界: 爱因斯坦的困惑》的介绍^[3]:

“爱因斯坦善于‘从一团乱麻中找出最重要最核心的东西’,他天才地在狭义相对论中导出了描述能量质量关系的质能公式: $E = mc^2$, ……这个公式已经深入人心,是人类历史最有名的公式之一,已成为人类文化的一部分。”

“狭义相对论中,三维空间被四维时空所代替: (t, x, y, z) , 质能关系表明了静止质量 m 和其内禀能量的关系。它表明物体相对于一个参照系



静止时仍然有能量 mc^2 。反之,在真空中传播的一束光,其静止质量是 0,但由于它们有运动能量,因此它们也有所谓因运动而具有的‘相对论质量’……这个等式所描述的不是质量和能量的互相转化,而是表明了质量能量是同一个东西,物体的质量实际上就是它自身能量的量度。”

质量和能量这种关联,不但是物理学的重大飞跃,也是哲学上非凡的突破,是人类认识史一个里程碑式的发展。

质能关系式的证明,正需要四维时空的概念。在四维时空中,可以定义一个协变的四维速度:

$$U = \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, c 是真空中光速。

进而就有了协变的四维动量: $P = m\eta_{\mu\nu}U^\nu$, 其中 $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, 为闵可夫斯基时空的度规张量。四维动量中的时间分量:

$$P_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow E = P_0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

爱因斯坦很快意识到这一项应该被理解为能量,因为当速度 v 极大地小于光速 c 的时候,可以用平方根式的二项式展开而得到:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \sim 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

E 中包含了两部分,后面一项显然就是牛顿力学中质量为 m 的粒子的动能表达式,而第一项则可看成是粒子内部的能量。当速度 $v=0$ 时,便得到: $E=mc^2$, 即众所周知的质能关系。

5 结语

关于这个勾股定理与质能关系式的纠缠故事到此可以落幕了。“教科书”的编者现在感到尴尬,于是发了个声明,表示“确有文献记载爱因斯坦在少年时,曾运用相似、利用两个小直角三角形的面积和等于大直角三角形的面积,证明过勾股定理。但其证明过程中涉及的公式 $Ec = mc^2$ 等与相对论的质能方程具有类似的形式是一种偶然,并不能说明他是利用相对论证明了勾股定理,因此自读课本中的有关表述存在错误。”这里用“偶然”和“表述存在错误”来轻描淡写,实在看不出诚意所在。他们承认:“在自读课本中出现这样的问题,说明我们在编辑、审稿过程中不够严谨科学。”然而这仅仅是不够严谨和科学吗? 这是在亵渎科学,是以伪科学在误导孩子。最后,这个声明的着眼点,其实是欲盖弥彰、息事宁人,不想太丢人而已:“现在这个事已经形成了一波舆情,还请老师看到有关内容后不再转发。”如果真正认识到自己的错误,以及危害之严重,为什么要遮遮掩掩呢? 难道不应该勇敢地向最广大的读者群承认错误,挽回损失吗?

真诚地认识和承认错误,是改正错误的开始。其实这个错误也不完全在几位编者,他们水平有限、自以为是,固然是事件的直接起因,但更要追究的是:谁把教科书这样重大的社会责任交付给他们? 在美国,像费曼这样顶尖的物理学家曾经是中小学数学课标的评审人。我们这里呢? 谁把中小学教育和他们的教科书真正当回事了? 教育,当然要从娃娃抓起,幼儿、儿童和少年的教育会奠定一个人一生认知的基础,其无可替代的重要性是不言而喻的!

借鉴于这个小小的事件,我们期待教育的改革和发展,期待中国教育强盛的一天。

6 “荒谬”又一例

最近,一则小魔术风靡一时。表演者摆出六张带人物形象的扑克牌(J, Q, K),请观众任选一张,默记于心。表演者声称可以读出你选的是哪张牌。然后洗牌,重新亮出五张,观众选定的那张牌果然不见了。看起来非常神奇、不可思议,号称

世纪之谜。于是各种解释匪夷所思。最荒谬的一种是把这说成是“量子纠缠”效应,认为表演者基于量子纠缠,“读出”了观众的量子信息。

其实说穿了,这是一个极为简单的魔术。带人物形象的扑克牌总共有 12 张。表演者先摆出任意六张,然后从另外剩下的六张中任选五张摆出,当然原先的都不在里面。所以你任意选定一张,都不会出现。如此而已。请看下图。这样简单的魔术骗过了许多人。



魔术师开始亮出的六张牌 魔术师第二次亮出的五张牌

由此可见,关于量子纠缠,已经被误解到何种程度。笔者在《物理》杂志上曾经撰文阐述 2022 年诺贝尔物理学奖的科学内涵^[4],其摘要为:

“2022 年的诺贝尔物理学奖,被一些人误解

为证明了量子纠缠现象。实际上,包括爱因斯坦本人都承认量子纠缠,关键在于如何诠释。今年诺贝尔物理学奖的价值在于这几位物理学家以无可争辩的实验事实,证明了基于定域隐变量的贝尔不等式是不对的。目前的一些介绍文字,没有认真解释量子力学在理论上是如何批驳贝尔不等式的,同时虽对量子纠缠的物理价值多有阐述,但对其哲学意义却鲜有评述,对社会上滥用纠缠概念缺少直接批判和阐释。本文希望在这两方面有所补充。”有兴趣的读者可以参考。

参 考 文 献

- [1] 人民教育出版社课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心. 数学 八年级下册 自读课本[M]. 北京:人民教育出版社.
- [2] SCHROEDER M. Fractals, chaos, power laws: Minutes from an Infinite Paradise[M]. New York: Dover Publications, 2009.
- [3] 张天蓉. 上帝如何设计世界:爱因斯坦的困惑[M]. 北京:清华大学出版社, 2015.
- [4] 葛惟昆. 2022 年物理学诺贝尔奖的科学内涵辨析[J]. 物理, 2022, 51(12): 821.
GE W K. On the interpretation of the 2022 Nobel Prize in physics[J]. Physics, 2022, 51(12): 821. (in Chinese)

简讯

全国基础物理课程青年教师发展联盟成立

日前,在首届全国物理基础课程青年教师讲课比赛论坛暨物理青年教师哈尔滨冬令营上,教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会王青主任宣布成立全国基础物理课程青年教师发展联盟(简称“全国物理青椒联盟”)。首届联盟成员由参加历届全国高等学校物理基础课程青年教师讲课比赛全国决赛的 122 人组成,设顾问委员会为青年教师教育教学和发展提供咨询指导,王青任顾问委员会主任。全国物理青椒联盟在大物教指委直接指导下开展工作,以“提升基础物理青年教师教学水平”为着力点和落脚点,开展示范教学、经验交流、教师培训等工作;探索提升青年教师教

学水平的有效途径与措施,推动建设高水平基础物理青年教师队伍,切实提高全国高等学校大学物理课程教学质量。哈尔滨工业大学孟庆鑫担任联盟主任,西南交通大学樊代和、空军工程大学李智强任联盟副主任,哈尔滨工业大学周可雅、高等教育出版社马天魁、机械工业出版社张金奎任联盟秘书长。联盟网址: <https://www.dwjzw.cn/home/group/group.html?id=10050>;联系邮箱: zhoukeya@hit.edu.cn。

(周可雅/文)