

第 52 届国际物理奥林匹克竞赛理论第 3 题介绍与解答

李文华^{1,2} 王 瑾^{1,2} 宋 峰¹ 张天浩¹ 孔勇发^{1,2}

(南开大学¹物理科学学院; ²基础物理国家级实验教学示范中心, 天津 300071)

摘 要 第 52 届国际物理奥林匹克竞赛理论试题共三道, 分别为永磁体 (Permanent magnets)、詹姆斯韦伯太空望远镜 (James Webb Space Telescope) 和比例法则 (Scaling laws)。考试采用远程线上形式进行。文章主要对理论第三题的命题和解答进行介绍, 并对题目间的联系以及所有获奖选手的答题情况进行了简要分析。

关键词 标度律; 力矩平衡; 表面张力; 相对论; 阻尼振荡; 国际物理奥林匹克竞赛

INTRODUCTION AND ANSWERS TO THE THIRD PROBLEM OF THE 52ND INTERNATIONAL PHYSICS OLYMPIAD THEORY EXAM

LI Wenhua^{1,2} WANG Jin^{1,2} SONG Feng¹ ZHANG Tianhao¹ KONG Yongfa^{1,2}

(¹ School of Physics; ² National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract There are three theoretical problems in the 52nd International Physics Olympiad, namely Permanent magnets, James Webb Space Telescope and Scaling laws. The exam was conducted remotely and online. This paper mainly introduces the proposition and solution of the third theoretical problem, and provides a brief analysis of the connections between the questions and the answers of all award-winning contestants.

Key words scaling law; moment balance; surface tension; relativity; damped oscillation; International Physics Olympiad

2022 年 7 月 10 日至 17 日, 南开大学物理科学学院率领中国代表队参加了由瑞士主办的第 52 届国际物理奥林匹克竞赛 (International Physics Olympiad, IPhO)。参赛的 5 名中学生全部获得金牌, 并取得团体第一、总分第一、实验总分第一和理论总分第一的优异成绩^[1]。比赛采取线上方式举行, 理论试题有三道, 分别为“Permanent magnets”、“James Webb Space Telescope”和

“Scaling laws”, 翻译为“永磁体”、“詹姆斯韦伯太空望远镜”和“比例法则”^[2]。理论试题总分 30 分, 试题 1 计 10 分, 试题 2 计 12 分, 试题 3 计 8 分。本文主要对理论试题 3 的命题和解答进行介绍, 并对题目结构以及国际学生和中国学生的答题情况进行简要分析。文中部分小题给出了不只一种解答思路, 希望对学生更好地理解相关物理概念有所启发。

收稿日期: 2023-06-04

基金项目: 南开大学 2022 实验课程改革项目-开放实验类(22NKSYP02)。南开大学 2023 本科教育教学改革项目(NKJG2023023)。

作者简介: 李文华, 女, 实验师, 主要从事基础物理实验教学, 研究方向为非线性光学, liwenhua@nankai.edu.cn。

通讯作者: 张天浩, 男, 教授, 研究方向为光学和凝聚态物理, zhangth@nankai.edu.cn; 孔勇发, 男, 教授, 研究方向为光学和凝聚态物理, kongyf@nankai.edu.cn。

引文格式: 李文华, 王瑾, 宋峰, 等. 第 52 届国际物理奥林匹克竞赛理论第 3 题介绍与解答[J]. 物理与工程, 2023, 33(6): 110-115.

Cite this article: LI W H, WANG J, SONG F, et al. Introduction and answers to the third problem of the 52nd International Physics Olympiad Theory Exam[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(6): 110-115. (in Chinese)

1 题目:比例法则

比例法则描述了两个物理量在一个较大区间内与尺度有关的函数关系。这种函数关系可以是幂函数,但也有其他的可能。通常情况下,无法得到物理量间的精确关系式,但仍可通过比例法则推导出比例关系。

1.1 A 部分:意大利面

A.1(2.0 分)一根意大利面条形状的草棍,直径为 d ,平放在位于其中心的支点上保持平衡,如图 1 所示。如果 $d=1\text{mm}$,那么当这根草棍的长度达到 $l=50\text{cm}$ 时,它就会在自身重力的作用下折断。如直径变为 $d'=1\text{cm}$,意大利面条形状的草棍在自身重力下不断折的最大长度 l' 为多少?

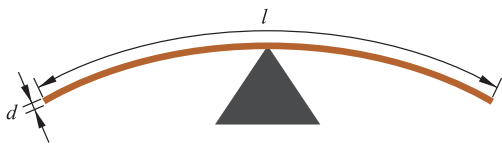


图 1 草棍示意图

1.2 B 部分:沙堡

B.1(2.0 分)粗砂粒的平均体积是细砂粒的 10 倍。湿的细砂和湿的粗砂都具有最佳的含水量(即用其制作的结构具有最大强度)并被用来建造两个形状和大小完全相同的圆柱体。将圆柱压在两块平行板之间,可测试圆柱体的耐压强度。当加在两块板上的压力达到 $F_c=10\text{N}$ 时,由湿粗砂制成的圆柱体就会被破坏。试问:破坏由湿细砂制成的圆柱,需在板上施加多大的力 F_f ? 忽略重力的影响。

1.3 C 部分:星际旅行

C.1(2.0 分)星际探险的宇宙飞船沿直线飞行,其固有加速度大小恒为 $g=10\text{m/s}^2$,即宇宙飞船在瞬时静止的惯性参考系中的加速度。乘客必须能够在剩余的 50 年预期寿命内返回地球。飞船到达的距地球的最远距离为 d 。如果加速度增大到 $g'=15\text{m/s}^2$,飞船能够到达更远的距离 d' ,则 d'/d 是多少?

提示 1. 你可能希望使用相对论速度加法公式,但是还有更多其他方法。

提示 2. 你可能需要使用如下定义的双曲函数: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

提示 3. 根据你的方法,你可能需要以下一种或多种积分: $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{atanh}(x) + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$

$\text{asinh}(x) + C$, $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$, 这里 $\text{asinh}(x)$ 和 $\text{atanh}(x)$ 是相应双曲函数的反函数。

1.4 D 部分:浸在水中的感觉

D.1(2.0 分)一个半径为 r_0 的实心木球浮在水面上。忽略摩擦作用时,其小幅振动的频率为 ω_0 。由于粘滞,木球被竖直释放后作阻尼振动,其频率实际为 $0.99\omega_0$ 。试问浮在水中的木球竖直振动时,可发生小幅振动的最小半径 $r_{\min}$ 是多少?

提示:作用在给定物体上的黏性阻力与其速度和线度成正比,与流体的黏度 η 成正比。黏度的单位是 $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 。

2 试题解答

2.1 A 部分:意大利面

横梁的断裂主要取决于梁内的应力是否能超过其最大可承受应力,本题目中的草棍断裂也可以用梁的模型去分析。如图 2 所示,考虑草棍支点位置的横截面 nn' ,对其左半边进行受力分析。草棍处于平衡状态,则

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mg + F_s = F_R & (a) \\ \int_0^{l/2} \frac{m}{l} \cdot x dx = M & (b) \end{cases} \quad (1)$$

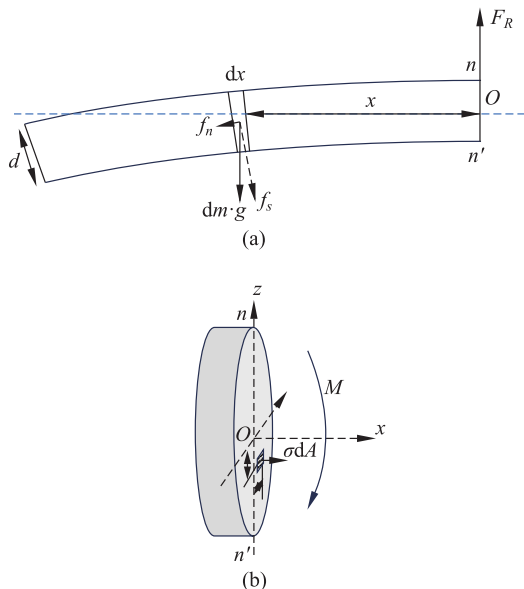


图 2 草棍受力示意图

(a) 草棍受力分析图; (b) 草棍横截面力矩示意图

其中, m 为草棍的质量, F_s 为截面 nn' 内的切向力, F_R 为草棍受到的支持力, M 为截面 nn' 的弯矩。

由图 2(a) 可知, 草棍弯曲主要由自身重力引起, 在草棍直径和长度分别为 d 和 l 的时候, 草棍发生断裂, 则此时草棍内的应力已达到最大断裂应力, 则可以根据力矩平衡找到应力与草棍直径和长度的比例关系。草棍质量 $m \propto d^2 l$, 由式(1b)可以得到

$$M \propto ml \propto d^2 l^2 \quad (2)$$

此力矩由草棍的轴向应力梯度引起, 如果轴向应力为 σ , 草棍横截面积为 A , 则截面 nn' 所受轴向力为^[3]

$$F_N = \sigma A \propto \sigma d^2 \quad (3)$$

轴向应力相对截面形心产生的弯矩为

$$M \propto F_N d \propto \sigma d^3 \quad (4)$$

由式(2)、式(4)可以得到, 力矩平衡状态下, 草棍临界折断时, 满足

$$\sigma d^3 \propto d^2 l^2 \Rightarrow l \propto \sqrt{d} \quad (5)$$

则草棍直径为 d' 时, 草棍的断裂长度为

$$l' = \sqrt{\frac{d'}{d}} l = \sqrt{10} \cdot 50 = 158 \text{ cm}$$

2.2 B 部分: 沙堡

湿砂粒表面的水分在液体表面张力的作用下, 可以像胶水一样将砂粒黏到一起, 这意味着整体砂粒需要由空气-水的界面束缚到一起。在水分最佳的情况下考虑两个相邻的砂粒, 如图 3 所示, 两种作用使砂粒黏合到一起^[4], 一种是表面张力 $F_s = \gamma l$, l 为固液界面周长, γ 为液体表面张力系数。 l 与砂粒半径 r 相当, 则 $F_s \sim \gamma r$ 。另一种作用是砂粒间液桥弯曲界面的附加压力, $F_p = \Delta p a$, 其中 a 为液桥的横截面积, 附加压差 $\Delta p \sim \gamma/r$ 。则 $F_p \sim \frac{\gamma}{r} \cdot r^2 = \gamma r$ 。可见两种作用具有相同的比例关系。

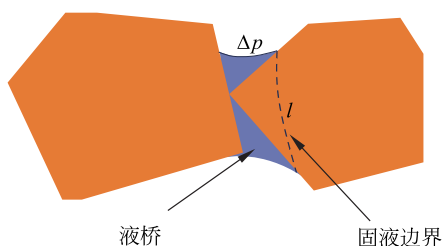


图3 两个砂粒黏合模型

解法1: 考虑横截面积为 A 的圆柱形沙堆, 其中单个砂粒的体积为 V 。由之前的讨论可知, 将两个砂粒分开的力 $F_g \propto r$, 则将一层砂粒分开的力 $F_l \propto F_g N_l$, 其中 $N_l \sim A/r^2$ 为一层砂粒的个数。则摧毁砂粒圆柱的力满足

$$F \propto F_g N_l \propto 1/r \propto 1/\sqrt[3]{V} \quad (6)$$

则两种体积差 10 倍的砂粒, 破坏由湿细砂堆成的圆柱需要的力为

$$F_f = \frac{\sqrt[3]{V_c}}{\sqrt[3]{V_f}} \cdot F_c = \sqrt[3]{10} \cdot 10 = 21.5 \text{ N}$$

其中, V_c 、 V_f 分别为粗砂和细砂的颗粒体积。

解法2: 压力用于破坏砂粒间的表面张力, 考虑将一层砂粒压入下一层砂粒所需要的能量 $E \propto Fr_g$, F 为所需要的压力, r_g 为砂粒层的厚度(即单个砂粒的特征长度)

另一方面 $E = \gamma \Delta A$, ΔA 为层中砂粒间所有的“水键”被破坏前水的表面积增大值, ΔA 正比于圆柱体横截面积 A , 因此对于粗砂和细砂来说为一常量, 因此 $E \propto Fr_g = C$, 则 $F \propto r_g^{-1}$ 。同样得到式(6)的结果。

2.3 C 部分: 星际旅行

如图 4 所示, 宇宙飞船在直线旅行远离地球再返还需经历 4 个阶段, 总用时为 T , 最远距离为 d , 则在第一个 $T/4$ 旅程中, 飞船为固定加速阶段, 加速度为 g , 第二个 $T/4$ 旅程中, 飞船为减速阶段, 加速度为 $-g$, 直到速度减为 0, 再开始返航。返航过程与启程过程相同。

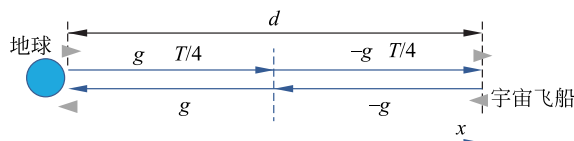


图4 星际旅行示意图

解法1: 利用速度加法公式^[5]。设在实验室坐标系中, 飞船的速度为 $v = \beta c$, 其中 c 为光速, 时间为 t , 飞船的固有时间为 τ 。考虑以恒定速度 v 移动的坐标系中, 飞船由静止加速, 在经历 $d\tau$ 时间后, 实验室坐标系中飞船的速度为 $v + dv$, 飞船坐标系中飞船的速度为 dv' , 由速度变换关系可以得到

$$\begin{aligned} v + dv &= \frac{v + dv'}{1 + \frac{v dv'}{c^2}} \approx v \left(1 + \frac{dv'}{v} \right) \left(1 - \frac{v dv'}{c^2} \right) \\ &\approx v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dv' \end{aligned} \quad (7)$$

则

$$d\beta = (1 - \beta^2) \frac{g d\tau}{c} \quad (8)$$

因此

$$\frac{d\beta}{1 - \beta^2} = \frac{g d\tau}{c} \quad (9)$$

两边积分得

$$\beta = \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \quad (10)$$

由相对论时间膨胀公式^[5]得

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) d\tau \quad (11)$$

则旅行距离为

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} &= \int v dt = c \int_0^{\frac{T}{4}} \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) d\tau \\ &= c \int_0^{\frac{T}{4}} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) d\tau = \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{则 } \frac{d'}{d} = \frac{g_1 \left(\cosh\left(\frac{g_2 T}{4c}\right) - 1 \right)}{g_2 \left(\cosh\left(\frac{g_1 T}{4c}\right) - 1 \right)} \approx 480。$$

解法 2: 相对论中速度加法已不再是线性变换, 通过引入快度避免非线性变换, 快度的定义为^[6]

$$\omega = \tanh^{-1}(v) \quad (13)$$

其中, v 为飞船在实验室坐标系的速度, 则 $v = \tanh\omega$, 洛伦兹变换因子 $\gamma = \cosh(\omega)$, 飞船的动量为 $p = m_0 \sinh(\omega)$ 。

飞船以恒定加速度加速, 则

$$F = m_0 g = \frac{dp}{dt} = m_0 \cosh(\omega) \frac{d\omega}{dt} \quad (14)$$

进一步得到

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{\cosh(\omega)} \quad (15)$$

同时由 $t = \gamma\tau$ 得到

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\tau} = g \quad (16)$$

对式(16)积分可以得到 $\omega = g\tau$ 。则飞船在 $1/4$ 旅程中走过的距离为

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} &= \int v dt = \int_0^{\frac{T}{4}} v \gamma d\tau = \int_0^{\frac{T}{4}} \tanh(\omega) \cosh(\omega) d\tau \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} \sinh(g\tau) d\tau = \left(\cosh\left(\frac{gT}{4}\right) - 1 \right) / g \end{aligned} \quad (17)$$

得到与解法 1 相同的结果。

2.4 D 部分: 浸在水中的感觉

如图 5 所示, 考虑半径为 r , 质量为 m 的木球, 当其静止时, 水提供的浮力 F_f 与球自身重力 mg 平衡, 若借助外力使其浸在水中的高度改变 dx , 不考虑阻力, 此时小球所受恢复力为

$$F_r = mg - (F_f - dF_f) \approx \rho_{\text{水}} g \pi r^2 dx \quad (18)$$

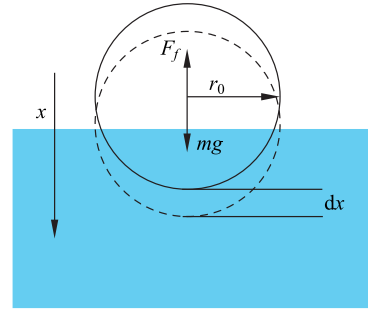


图 5 球在水面上振动示意图

解法 1: 半浸入于水中的小球, 做上下小幅度振动时, 变化的浮力为其提供恢复力, 其与小球浸入水中的体积成正比, 即

$$F_r \propto r^2 x \quad (19)$$

水的粘滞作用产生的阻尼力

$$F_d \propto rv = r\dot{x} \quad (20)$$

则可以列出小球的振动方程为

$$m\ddot{x} = F_r - F_d \quad (21)$$

进一步可以得到:

$$k_1 r^3 \ddot{x} + k_2 r \dot{x} + k_3 r^2 x = 0 \quad (22)$$

式中 k_1, k_2, k_3 为常数。在没有粘滞阻力时, $k_2 = 0$, 式(22)化为

$$\ddot{x} + \frac{k_3}{k_1 r} x = 0 \quad (23)$$

为简谐振动, 可解得振动频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_3}{k_1 r}} \quad (24)$$

在有黏滞阻力时, 方程(22)为阻尼振动方程, 当

$\frac{k_2^2}{4k_1^2 r^4} < \omega_0^2$ 时可得^[5]

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_2^2}{4k_1^2 r^4}} \quad (25)$$

进一步得到

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{k_2^2}{4k_1^2 r^4 \omega_0^2} \right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{k_2^2}{4k_1 k_3 r^3} \right) \quad (26)$$

在 $r=r_{\min}$ 时, $\omega=0$, $\frac{k_2^2}{4k_1k_3}=r_{\min}^3$, 则

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{r_{\min}^3}{r_0^3}\right) \quad (27)$$

$$\frac{r_{\min}}{r_0} = \sqrt[3]{1-0.99^2} = 0.271$$

解法 2: 半浸入小球在重力驱动下振动, 则在无阻尼时, 小球的振动频率取决于重力加速度 g 和小球的半径 r , 为^[7]

$$\omega_0 \propto \sqrt{g/r} \quad (28)$$

题目中提示阻尼力 F_d 与小球速度 v [m/s]、半径 r [m] 以及粘滞系数 η [Pa·s] 成正比, 即 $F_d \propto \eta r v$, 则由式(21)可得阻尼因子^[5]为

$$\beta = \frac{F_d}{2mv} \propto \frac{\eta r}{m} \quad (29)$$

又 $m \propto r^3$, 所以

$$\beta \propto \frac{1}{r^2} \quad (30)$$

由式(28)、式(30)可得

$$\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \propto \frac{1}{r^3} \quad (31)$$

已知在 $\beta/\omega_0 < 1$ 的情况下, 阻尼振动的频率满足 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}$, 则可以得到

$$\frac{\beta^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (32)$$

则 $\beta/\omega_0 = 1$, 即 $\omega = 0$ 为临界状态, 则由式(31)和式(32)可得

$$\frac{r_{\min}}{r_0} = \frac{\frac{1}{r_0}}{\frac{1}{r_{\min}}} = \sqrt[3]{\frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{1}} = \sqrt[3]{1-0.99^2} = 0.271$$

3 分析讨论

3.1 题目分析

比例法则, 又称标度律, 最早是伽利略在其著作《关于两门新科学的对话》^[8]中提出的, 与量纲分析^[9]类似, 但在量纲分析中, 需要考虑物理关系中某些物理常量的量纲, 而标度律分析中, 不需考虑常数项的影响, 相对量纲分析, 标度律分析过程可以更加简化。巧合的是 2022 年的亚洲物理奥林匹克竞赛理论第三题对量纲分析进行了

考核^[10]。

本题目在奥赛理论题中占分较低, 题量较少, 但涉及较多力学相关的知识点, 比如 A.1 中有关力矩、弯曲变形、应力等概念, B.1 中有关表面张力和附加压差的概念, C.1 中狭义相对论相关的洛伦兹变换、速度加法和快度的概念, D.1 中阻尼振动相关的概念。相关内容在大学力学教材中均可以找到相应的知识点, 考生都可以基于力学的基本内容给出一种解法。唯一比较陌生的可能是 C.1 中“快度”的概念, 其主要在高能粒子物理中出现^[6], 但使用狭义相对论中的速度变换关系也可以解出。各题目之间没有具体的关联性, 都是对不同知识点的独立考查, 考生如果解不出其中一道题目, 不影响其对其他题目的解答。官方参考答案中有些小题给出了不只一种解法, 本文在其基础上对个别解题思路进行了介绍, 内容上与参考答案稍有不同。

3.2 答题情况分析

如图 6 所示, 为中国选手各小题的平均得分率与所有获奖选手平均得分率的对比, 中国选手的平均得分率都是远高于所有获奖选手的, 且四道题目有相似的得分变化趋势, 都是 B.1 部分得分最少。通过参照中国选手的答题情况分析, 此题目失分的原因主要是参考答案要求在分析砂粒之间的作用力时需要体现出表面张力和砂粒间弯曲液桥的附加压力两种作用, 虽然两者都与砂粒半径 r 成正相关, 只体现一种作用也可以得到与答案相同的结果。而 D.1 部分的得分, 是所有获奖选手平均得分率最高的一题, 这可能是因为简谐振动以及阻尼振动为力学中最典型的物理模

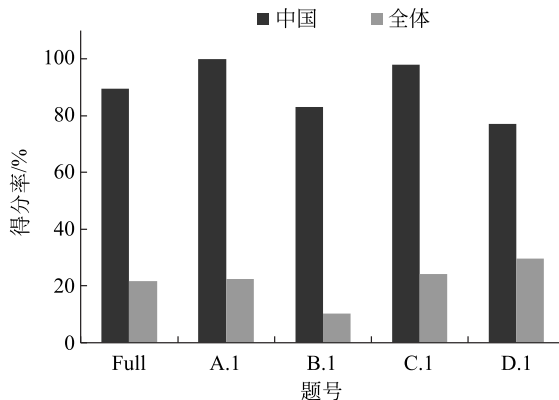


图 6 所有获奖人员与中国选手在理论 3 题中各题平均得分率的对比

型,被广大学生所熟知而致。但对于中国选手,此题得分率较低,主要原因是部分细节的疏忽导致的,比如对于 $\omega \propto \sqrt{g/r}$ 的关系没有给出具体的说明等。

所有获奖选手(优秀奖以上)约占总参赛人数368人的82%。理论第3题总分的平均得分率人数占比分布如图7所示,得分率在60%以上的有22人,约占总人数的6%,中国队选手的平均得分率为89.5%,相对较高。该题中得分率在40%以下的约占总人数的70%,可能正是由于各分题目之间没有联系,考查的知识点较多导致学生没能取得较高的成绩。

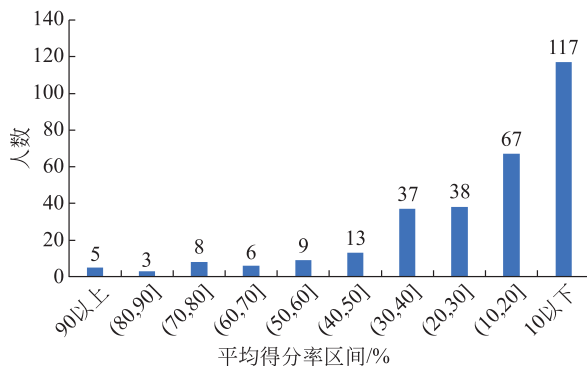


图7 理论第3题总分各得分率区间人数占比

4 结语

本文对第52届国际物理奥林匹克竞赛理论第三题的命题和解答进行了详细介绍,并对考生的答题情况进行了简单分析。题目主要考查了力学相关的知识点,各分题之间比较独立,涵盖知识面较广,有一定难度。有的题目不只一种答题思路,对

学生理解相关物理概念也有一定的启发作用。

致谢:感谢参与本次奥赛培训、选拔与远程考试的各位老师!感谢志愿者王诗团同学!感谢中国科学技术协会、中国物理学会、天津市物理学会等单位 and 部门对赛事的支持!

参 考 文 献

- [1] International Physics Olympiad 2022 official website, Results of the game[OL]. [2022. 07]. <https://ipho2022.com/results/>.
- [2] International Physics Olympiad 2022 official website, Theory exam problems[OL]. [2022. 07]. <https://ipho2022.com/exam-problems/theory-exam/>.
- [3] 刘鸿文. 材料力学 I[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社, 2011.
- [4] SHEN Z F, JIANG M J, THORNTON C. Shear strength of unsaturated granular soils: three-dimensional discrete element analyses[J]. Granular Matter, 2016, 18(3): 1-13.
- [5] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2004.
- [6] 黄卓然. 高能重离子碰撞导论[M]. 张卫宁, 译. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2002.
- [7] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 3 版. 南京:南京大学出版社, 2012.
- [8] 伽利略. 关于两门新科学的对话[M]. 武际可, 译. 北京:北京大学出版社, 2020.
- [9] 马尔科姆·朗盖尔. 物理学中的理论概念[M]. 向守平, 郑久仁, 朱栋培, 等, 译. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2017.
- [10] 李文华, 刘丽飒, 惠王伟, 等. 第22届亚洲物理奥林匹克竞赛理论第3题介绍与解答[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 115-119.

LI W H, LIU L S, HUI W W, et al. Introduction and Answers to Question 3 in the Theory Part of the 22nd Asian Physics Olympiad Experiment Exam[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 115-119. (in Chinese)