

## 大中衔接

## 高中物理与高中数学的协调性

郎君轶

(清华大学附属中学, 北京 100084)

**摘要** 笔者在工作中发现高中生的“应用数学工具解决物理问题”的能力逐渐下降,通过分析实例,发现高中物理与高中数学的协调性发生破坏是其产生的重要原因,包括物理中对数学应用水平的要求降低,物理和数学教学进度、教学内容上的不协调以及教材符号使用的不统一。本文还探讨了解决问题的方法,以促进高中物理的教学。

**关键词** 高中物理;高中数学;物理教学;数学应用;协调性

## THE COORDINATION BETWEEN HIGH SCHOOL PHYSICS AND HIGH SCHOOL MATHEMATICS

LANG Junyi

(Tsinghua University High School, Beijing 100084)

**Abstract** In long-term work, the writer finds high school students' ability of "applying mathematical tools to solve physical problems" is declining, and finds an important reason for that is the coordination between high school physics and high school mathematics is broken, including the declining of demands for mathematics applying levels in physics teaching, the incongruity of teaching progress and teaching content between physics teaching and mathematics teaching, the inconsistency of symbols using in Physics textbooks and Mathematics textbooks. Also the writer discusses the methods to solving these problems, to promote the high school physics teaching.

**Key words** high school physics; high school mathematics; physics teaching; mathematics applying; coordination

笔者是一名北京的高中物理教师,在十多年的教学过程中,逐渐产生了两个切身感受:(1)高中生普遍认为物理是最难的学科,这种困难有一些是物理学科本身带来的,也有相当程度是数学应用带来的。(2)学生们的“数学本领”越来越弱,这个“本领”指的就是“应用数学工具解决物理问题”的能力。为什么会有这些现象呢?众所周知,物理和数学是两门联系非常紧密的学科,数学为

物理提供了精确的描述工具,而物理则为数学提供了实际的应用。但是笔者发现,高中物理和高中数学之间的联系已经开始有些“割裂”了。

## 1 高中物理对数学应用水平的要求降低

笔者举一个最直接的例子。高考作为一个最重要的指挥棒,它的难度、它的侧重点反映了对学

收稿日期: 2023-10-08

作者简介: 郎君轶,清华大学附属中学高中物理老师,中教一级, swordwolf6666@126.com。

引文格式: 郎君轶. 高中物理与高中数学的协调性[J]. 物理与工程, 2023, 33(6): 105-109.

Cite this article: Lang Junyi. The coordination between high school physics and high school mathematics[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(6): 105-109. (in Chinese)

生的要求,也是所有老师必须要认真研究的。我们先来看 2009 年北京高考理综卷的物理最后一题(那时还是理化生一张卷子,即理综卷),通常也是最难的一道题。

**题 1:** (1) 如图 1 所示,  $ABC$  为一固定在竖直平面内的光滑轨道,  $BC$  段水平,  $AB$  段与  $BC$  段平滑连接。质量为  $m_1$  的小球从高位  $h$  处由静止开始沿轨道下滑, 与静止在轨道  $BC$  段上质量为  $m_2$  的小球发生碰撞, 碰撞后两球两球的运动方向处于同一水平线上, 且在碰撞过程中无机械能损失。求碰撞后小球  $m_2$  的速度大小  $v_2$ ;

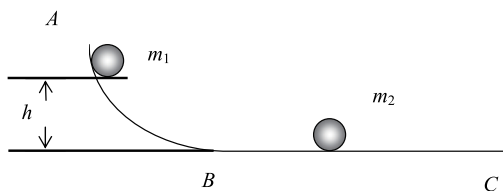


图 1

(2) 碰撞过程中的能量传递规律在物理学中有着广泛的应用。为了探究这一规律, 我们采用多球依次碰撞, 碰撞前后速度在同一直线上, 且无机械能损失的简化力学模型。如图 2 所示, 在固定光滑水平轨道上, 质量分别为  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}, m_n, \dots$  的若干个球沿直线静止相间排列, 给第 1 个球初能  $E_{k1}$ , 从而引起各球的依次碰撞。定义其中第  $n$  个球经过依次碰撞后获得的动能  $E_{kn}$  与  $E_{k1}$  之比为第 1 个球对第  $n$  个球的动能传递系数  $k_{1n}$ 。



图 2

a) 求  $k_{1n}$ ;

b) 若  $m_1 = 4m_0, m_k = m_0, m_0$  为确定的已知量。求  $m_2$  为何值时,  $k_{1n}$  值最大。

这道题的标准解答过程如下:

**【解析】** (1) 设碰撞前的速度为  $v_{10}$ , 根据机械能守恒定律  $m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2$

设碰撞后  $m_1$  与  $m_2$  的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ , 根据动量守恒定律  $m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

由于碰撞过程中无机械能损失  $\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 =$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{上两式联立解得 } v_2 = \frac{2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$\text{最终得 } v_2 = \frac{2m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}$$

$$(2) \text{ a) 考虑到 } E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \text{ 和 } E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

根据动能传递系数的定义, 对于 1、2 两球得

$$k_{12} = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

同理可得, 球  $m_2$  和球  $m_3$  碰撞后, 动能传递系数  $k_{13}$  应为

$$k_{13} = \frac{E_{k3}}{E_{k1}} = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} \cdot \frac{E_{k3}}{E_{k2}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{4m_2 m_3}{(m_2 + m_3)^2}$$

依次类推, 动能传递系数  $k_{1n}$  应为

$$k_{1n} = \frac{E_{kn}}{E_{k1}} = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} \cdot \frac{E_{k3}}{E_{k2}} \cdot \dots \cdot \frac{E_{kn}}{E_{k(n-1)}}$$

$$= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{4m_2 m_3}{(m_2 + m_3)^2} \cdot \dots \cdot \frac{4m_{n-1} m_n}{(m_{n-1} + m_n)^2}$$

$$\text{解得 } k_{1n} = \frac{4^{n-1} m_1 m_2^2 m_3^2 \dots m_{n-1}^2 m_n}{(m_1 + m_2)^2 (m_2 + m_3)^2 \dots (m_{n-1} + m_n)^2}$$

b) 将  $m_1 = 4m_0, m_3 = m_0$  代入可得

$$k_{12} = 64m_0^2 \left[ \frac{m_2}{(4m_0 + m_2)(m_2 + m_0)} \right]^2$$

为使  $k_{13}$  最大, 只需使  $\frac{m_2}{(4m_0 + m_2)(m_2 + m_0)} =$

$$\frac{1}{4m_0^2} \text{ 最大, 即 } m_2 + \frac{4m_0^2}{m_2} \text{ 取最小值}$$

$$\text{由 } m_2 + \frac{4m_0^2}{m_2} = \left( \sqrt{m_2} - \frac{2m_0}{\sqrt{m_2}} \right)^2 + 4m_0 \text{ 可知}$$

$$\text{当 } \sqrt{m_2} = \frac{2m_0}{\sqrt{m_2}}, \text{ 即 } m_2 = 2m_0 \text{ 时, } k_{13} \text{ 最大}$$

我们看到, 上题对于学生的数学能力要求是很高的, 用到的数学工具有联立二元二次方程组, 使用递推关系, 函数求极值(二次函数配方, 或均值不等式)等, 推导过程复杂。我们再来看 2023 年北京高考最后一道题。

**题 2:** 螺旋星系中有大量的恒星和星际物质, 主要分布在半径为  $R$  的球体内, 球体外仅有极少的恒星。球体内物质总质量为  $M$ , 可认为均匀分布, 球体内外的所有恒星都绕星系中心做匀速圆周运动, 恒星到星系中心的距离为  $r$ , 引力常量

为  $G$ 。

(1) 求  $r > R$  区域的恒星做匀速圆周运动的速度大小  $v$  与  $r$  的关系；

(2) 根据电荷均匀分布的球壳内试探电荷所受库仑力的合力为零, 利用库仑力与万有引力的表达式的相似性和相关力学知识, 求  $r \leq R$  区域的恒星做匀速圆周运动的速度大小  $v$  与  $r$  的关系；

(3) 科学家根据实测数据, 得到此螺旋星系中不同位置的恒星做匀速圆周运动的速度大小  $v$  随  $r$  的变化关系图像, 如图 3 所示, 根据在  $r > R$  范围内的恒星速度大小几乎不变, 科学家预言螺旋星系周围 ( $r > R$ ) 存在一种特殊物质, 称之为暗物质。暗物质与通常的物质有引力相互作用, 并遵循万有引力定律, 求  $r = nR$  内暗物质的质量  $M'$ 。

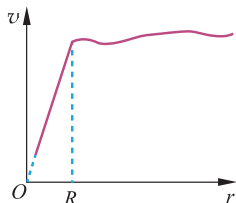


图 3

【解析】(1) 由万有引力定律和向心力公式有

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(2) 在  $r \leq R$  内部, 星体质量

$$M_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}$$

由万有引力定律和向心力公式有

$$G \frac{M_0 m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

解得

$$v = r \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

(3) 对处于  $R$  球体边缘的恒星, 由万有引力定律和向心力公式有

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v_0^2}{R}$$

对处于  $r = nR$  处的恒星, 由万有引力定律和向心力公式有

$$G \frac{(M + M')m}{(nR)^2} = m \frac{v_0^2}{nR}$$

解得

$$M' = (n - 1)M$$

可以明显地看到, 上题解答只有寥寥几步, 对于数学工具的使用非常简单, 没有任何数学技巧。

事实上, 以上所选的两道高考原题具有一定的代表性。北京高考物理学科对于最后一道题的命题以 2013 年为一个分水岭, 前后发生了明显的风格变化。2013 年以前, 最后一题总是所谓的复杂的“模型题”, 假想物理情景, 多研究对象, 多研究过程, 解答过程数学推导长, 使用数学工具多。2013 年及以后, 风格转变为以联系实际题、信息题的“创新题”为主, 考查的侧重变为学生对于模型的建立能力, 对于基本概念的理解, 几乎没有什么数学计算量, 也不使用复杂的数学工具, 解题过程可以在三五步骤中结束。虽然模型题在北京高考中依然存在, 常在倒数第二题的位置, 但是数学计算的复杂度也远远不能跟 2013 年的前相比了, 所使用的数学工具连建立方程组都已经十分罕见。

这样的高考导向作用, 使得北京的高中在平时的教学中, 对于数学稍微复杂一点、要求稍微高一点的题, 不讲、不练; 老师们在平时编制新题的时候, 也不会出那种“旧风格”的题, 如果数学要求高了, 动辄就会被问: “你这道题是考物理还是考数学?” 笔者认为, 这是学生们“应用数学工具解决物理问题的能力”下降的一个重要原因。数学学科可以学得很好, 但是不会在物理学科中应用。那么这种能力重要不重要呢? 笔者认为还是十分重要的。高中物理, 一项重要的任务就是为未来的各自然学科的学习奠定基础, 自然科学越到高深, 数学能力的重要性就越高, 这个能力的基础在高中打不好, 对未来的学习是极为不利的。

## 2 高中数学教学与物理教学不协调和不匹配

在这里, 笔者想举一个简单例子来说明。

题 3: 如图 4 所示, 粗糙的水平面上有一质量为  $m$  的物体, 物体与水平面间的动摩擦因数为  $\mu$ , 物体受到一个大小恒定的力  $F$ , 只改变力的方向,

使物体向右加速运动,求加速度的最大值及此时力的方向。

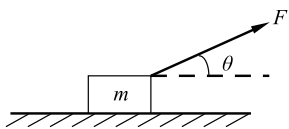


图 4

**【解析】**水平方向上列牛顿第二定律

$$F \cos \theta - \mu(mg - F \sin \theta) = ma$$

整理得

$$F(\cos \theta + \mu \sin \theta) - \mu mg = ma$$

问题即转化为求当  $\theta$  取何值时,  $(\cos \theta + \mu \sin \theta)$  最大,即为  $a$  最大。

这是一道关于牛顿第二定律的比较基本的题,本来在高一上学期就要遇到的,因为牛顿第二定律出现在物理教材(这里的物理教材,指文献[1],北京地区通用,下同)必修第一册第四章“运动和力的关系”。求极值可以用两种数学方法:

**解法 1:** 将  $(\cos \theta + \mu \sin \theta)$  凑出  $\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$  的形式,使用三角公式  $\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\theta - \varphi)$ ,就是所谓的辅助角方法。

**解法 2:** 将  $(\cos \theta + \mu \sin \theta)$  对  $\theta$  求导,令导数为 0,典型的求导求极值方法。

但遗憾的是,现在的学生高一时遇到这道题肯定是做不出来的,因为上面提到的三角公式出现在数学教材(这里的数学教材,指文献[2],下同)必修第三册第八章“向量的数量积与三角恒等变换”中,单看册数就可以知道当物理学到这里的时候,辅助角方法还远远学不到;至于求导的方法,就更远了,在数学教材选择性必修第三册,是全部高中数学课程的最后一部分。这就体现了一个重要的问题——高中数学教学与物理教学在教学安排、教学进度上的不协调。这不只关系上面那道题,其实,这个问题是广泛存在的。综观高中物理主要使用的数学工具:矢量(也叫向量)——矢量的概念、加法、减法、点乘、叉乘;三角函数;平面几何解三角形;解析几何;立体几何;不等式(均值不等式);微积分初步一求导、积分,可以毫不夸张地说,几乎每一种数学工具都是由物理老师首先传授的。举几个实际的例子,物理教材必修第一册,第一章“运动的描述”,第二章“匀变速直线运动的研究”,就是高一刚开始学习的内容,学生

立刻就会接触位移“矢量”的概念,在定义速度和加速度的时候,实质上就需要理解极限、导数的方法,在推导匀变速运动位移与时间关系的时候,其实就采用了积分的思想,而这些数学知识,首次出现在数学教材上分别是必修第二册(矢量),选择性必修第三册(求导),而积分,高中数学则完全没有涉及到。如果我们能更好地安排物理和数学的教学进度、教学内容,使二者更好地进行配合,对学生们理解物理概念、规律一定是非常有好处的,也可以减轻学生的负担。

我们再回到题 3,高三总复习的时候学生全部学科内容都学完了,总该会做了吧?理想情况是应该用求导的方法,非常简便。对不起,大部分还是不行。原因是学生们会产生一个疑问,  $(\cos \theta + \mu \sin \theta)$  求导,  $x$  在哪里?原来,翻看数学教材,所有的函数自变量都是  $x$ ,所以自变量换成其他的符号学生们就不适应了。这就反映了数学和物理不协调的第二个方面——高中数学教材和高中物理教材在符号使用上的不协调。这个问题的关键就是在求导符号的使用上,我们物理教材使用导数工具的时候,例如

$$v = \left. \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad a = \left. \frac{\Delta v}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad E = n \left. \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0}$$

等公式,总是写成这种比例式的形式;而数学教材关于求导除了刚开始采用这种形式,之后马上就on“打撇”的形式表示求导,例如  $f'(x)$  表示函数  $f$  对  $x$  求导,这种写法其实很不适合在物理中使用——物理比例式的写法其实是有明确物理意义的,包含了两个明确的物理量,以及一个逐渐逼近、取极限的过程,而数学“打撇”的写法失去了这些物理意义,尤为重要,“打撇”的写法不能明确指出是对哪个自变量求导(因为数学教材上就总是只有  $x$  这一个自变量),但是物理中多自变量的情况比比皆是,例如简谐运动位移与时间关系  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ ,如果“打撇”的话那么是对谁求导呢?这就造成了混淆。这对于一个已经熟练掌握微积分的学生来说可能不算什么,但是对于我们刚刚接触微积分不长时间的学生却会造成巨大的理解障碍,这就难怪题 3 中没有  $x$  学生们就不会求导了呢。

### 3 结语

本文分析了学生“应用数学工具解决物理问

题”的能力下降的原因,以及揭示了高中数学教学与物理教学的不协调和不匹配的现象。为了解决这些问题,笔者给出如下建议:

(1) 在北京高考试卷命题中,加大数学推导、计算的复杂度以及提高数学工具使用的比重,发挥高考的导向作用,尤其在最后一道题的命制中,可以将“模型题”和“创新题”不同年份交替轮流使用,不必拘泥于某种题型,“不拘一格用题目”,兼顾考查学生的各种物理能力。

(2) 协调数学学科和物理学科的教学安排、教学进度,使二者可以更好地匹配,力争使“数学教在物理前”。

(3) 统一数学教材和物理教材的符号使用,降低学生们由于各教材符号不一致问题造成的物理学习困难。

(4) 在数学教材上更多的使用物理学中的例子,这样就可以让学生熟悉数学是怎样在物理中应用的。

(5) 能否加大“微积分”知识在高中数学中的深度,比如“积分”的概念、方法也能有所涉及,因为高中物理中用到了,对于以后进入大学的学习是百利而无一害的。

总之,就是让物理和数学更好地“融合”!

笔者在“首届‘中学物理教学融合发展’学术研讨会”上作了相同主题的报告。报告后,很多老师主动来跟笔者交流,赞同笔者所提及的情况及解决建议。有一位来自北京建筑大学的王俊平老师,反映她也感受到了大一新生的“数学能力”有所下降,并且指出不光是高中数学和物理教材,大学物理教材与高中物理教材也有不协调的地方(她提到关于热力学第一定律的表述),期待在下一轮的教材改革中能更好地协调起来。关于“数学教在物理前”,在大学同样有这个问题,同会的老师提到美国大学物理系的新生大一只学微积分,不学物理,看来这个问题并不是笔者无的放矢。

#### 参 考 文 献

- [1] 人民教育出版社课程教材研究所物理课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 物理[M]. 北京:人民教育出版社, 2020.
- [2] 人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究所. 普通高中教科书 数学 B 版[M]. 北京:人民教育出版社, 2019.