

前沿物理与工程

非线性光纤光学中非线性薛定谔方程推导逻辑的探讨

肖晓晟 刘欣格 张晓光

(北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876)

摘要 非线性薛定谔方程是描述光脉冲在光纤中非线性传输的基本方程, 广泛应用于光纤通信、光纤激光器等领域。在现有的非线性光纤光学的经典教材中对非线性薛定谔方程的推导, 采用的是直接在非线性介电常数中引入非线性折射率效应。本文指出了该方法对于传输方程非线性项处理的局限甚至不妥之处, 给出了一种非线性薛定谔方程较严格的推导方法, 即从非线性的波动方程出发, 讨论不同非线性效应的非线性极化强度驱动源的不同表现形式, 并将方程作横向积分处理。本文详细阐述了从非线性源的角度出发推导非线性薛定谔方程的方法, 并以四波混频等非线性效应为例, 帮助读者理解非线性效应对于传输方程的影响; 此外, 还探讨了在推导非线性薛定谔方程中的正负频表示等问题。

关键词 非线性光纤光学; 非线性薛定谔方程; 四波混频

DISCUSSION ON THE LOGIC OF THE DERIVATION OF NONLINER SCHRÖDINGER EQUATION IN NONLINEAR FIBER OPTICS

XIAO XiaoSheng LIU XinGe ZHANG XiaoGuang

(School of Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract The nonlinear Schrödinger equation is the basic equation describing the nonlinear transmission of optical pulses in optical fibers, and is widely used in optical fiber communications, fiber lasers and other fields. In the existing classical textbooks on nonlinear fiber optics, the nonlinear Schrödinger equation is derived by directly introducing the nonlinear refractive index effect into the nonlinear dielectric constant. Herein, the limitations and even inappropriateness of this method for dealing with the nonlinear term of the transmission equation are pointed out. A more rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation is given, i. e., starting from the nonlinear wave equation, discussing the different manifestations of the nonlinear polarization driving sources for different nonlinear effects, and making the equation a transversal integral. The method of deriving the nonlinear Schrödinger equation from the perspective of nonlinear sources is elaborated in detail, and examples of nonlinear effects, such as four-wave mixing, are given to help readers understand the influence of nonlinear effects on

收稿日期: 2023-08-23

基金项目: 北京邮电大学教育教学研究与改革项目(2021年度研究生专业课程建设, 编号: 3721101152, 以及2022年度高新课程建设)资助。

作者简介: 肖晓晟, 男, 副研究员, 主要从事光学教学与研究, 研究方向为非线性光纤光学及光纤激光器等, xsxiao@bupt.edu.cn。

通讯作者: 张晓光, 男, 教授, 主要从事物理教学与光通信研究, 研究方向为光纤中的偏振现象与控制, 光纤通信信号处理等, xgzhang@bupt.edu.cn。

引文格式: 肖晓晟, 刘欣格, 张晓光. 非线性光纤光学中非线性薛定谔方程推导逻辑的探讨[J]. 物理与工程, 2023, 33(6): 90-97.

Cite this article: XIAO X S, LIU X G, ZHANG X G. Discussion on the logic of the derivation of nonlinear schrödinger equation in nonlinear fiber optics[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(6): 90-97. (in Chinese)

the transmission equation. In addition, issues such as positive and negative frequency representations in deriving the nonlinear Schrödinger equation is also discussed.

Key words nonlinear fiber optics; nonlinear Schrödinger equation; four-wave mixing

自 1960 年激光器发明以来,非线性光学是现代光学发展最强劲的领域之一,其中光纤中的非线性光学,即非线性光纤光学,在光纤通信、光纤激光器、光纤传感、超连续谱、光学频率梳等领域具有重要应用。在非线性光纤光学领域内,阿戈沃(G. P. Agrawal)教授的《非线性光纤光学》是被大家广泛认可并使用的教材之一。这本书于 1989 年出版第 1 版^[1],到 2019 年,该书已经出到了第 6 版^[2],说明此书在国际上影响力很大。全书的内容都是围绕光脉冲在光纤中的非线性传输基本方程(即非线性薛定谔方程)展开讨论的。该书在 2.3 节对非线性薛定谔方程给出了一种推导,然而推导的过程存在一些缺陷。正是由于这些,在后续的讨论中,也存在一些错误。虽然这些错误不至于造成致命的结果,但是鉴于该书的影响非常大,光纤传输相关专业的研究生、科研工作者乃至工程师一般都会以这本书作为他们进一步研究的蓝本,让科技人员和高校师生在学习这段内容时造成一些错误认识,其影响是巨大的,需要指出并纠正。本文给出了一种非线性薛定谔方程较严格的推导方法^[3,4],通过对这两种推导方法进行比较,指出前者在推导过程中对于非线性项处理的局限,阐述了从非线性极化源的角度出发推导方法的优势,并应用此推导方法正确处理了光纤中非线性四波混频效应和受激拉曼效应的非线性传输方程。以此为例,帮助读者理解非线性薛定谔方程在建立时的理论逻辑,以及应用它处理光纤中非线性效应时应该注意的问题,比如量纲的不同选取、描述光场时正负频的不同选取以及光场振幅是否取 1/2 因子等,其非线性薛定谔方程所具有的形式会有哪些不同,基于这些不同选择,对所讨论问题的结论的数学形式有什么不同。

1 非线性薛定谔方程的推导逻辑和推导方法比较

本节按照以下的顺序展开:首先简述非线性

光纤光学基本方程应有的推导逻辑,按照这个逻辑展开我们的推导,给出推导单模光纤中非线性薛定谔方程的全过程,然后指出阿戈沃教授在《非线性光纤光学》推导非线性薛定谔方程的过程中存在的问题。

众所周知,电动力学是研究电磁场的本性,以及电磁场与介质相互作用机制的科学,其中描述电磁场本性的基本方程是麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 分别为电场强度和电位移矢量, $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为磁场强度和磁感应强度。另外,描述介质极化与磁化需要根据具体的极化和磁化过程决定。介质极化对电场的影响通过 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 之间的关系来描述。我们知道, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 其中 ϵ_0 为真空介电系数, $\mathbf{P}$ 为介质的极化强度。

对于光波在透明介质中传输线性极化的场景,有自由电荷 ρ_0 为零和传导电流 $\mathbf{j}_0$ 为零,且有

$$\mathbf{P}_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (3)$$

表示介质极化和磁化都是线性的,其中 $\mathbf{P}_L$ 的脚标 L 表示线性极化。

将极化和磁化式(2)和式(3)代入麦克斯韦方程组(1),可以得到线性极化介质中的电磁波传输方程^[3]

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_r \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (4)$$

这是光波场在线性极化介质中传输的“波动方程”,它是齐次的线性方程, ϵ_r 是线性介质的相对介电张量。

当光波在非线性极化介质中(比如强光在光纤中)传输时,介质极化除了有线性极化项 $\mathbf{P}_L$ 以外,还表现出非线性极化项 $\mathbf{P}_{NL}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} \quad (5)$$

在光纤中非线性极化表现为光克尔效应、受激拉

曼散射效应、受激布里渊散射效应等。

将非线性极化介质公式(5)代入麦克斯韦方程组(1)后,可得非线性介质中的波动方程^[3-5]

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (6)$$

相比于线性极化介质中的波动方程(4),非线性极化介质中的波动方程是非线性的,也是非齐次的。其中 $-\mu_0 \partial^2 \mathbf{P}_{NL} / \partial t^2$ 是这个方程的非线性驱动源。正是由于它的存在,使光场的各个频率组分相互耦合、相互作用,从而产生非线性效应。

假定介质中存在各种频率 ω_n 组分的光场,写成复指数形式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_n \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (7)$$

其中,将实余弦函数光场进行了正负频项的分离,并约定负频有如下关系

$$-\omega_n = \omega_{-n}, \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega_n) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega_n) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_{-n}) \quad (8)$$

因此,式(7)中的求和项中的 n 包含正整数及对应的负整数。

另外非线性极化也有各种频率组分

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_n \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (9)$$

将光场和极化强度各个频率组分(式(7)和式(9))代入非线性极化介质中的波动方程(6),并作慢变振幅近似,且将 $\boldsymbol{\epsilon}_r$ 作标量处理, $\epsilon_r(\omega) = n^2(\omega)$,令 $\beta(\omega) = n(\omega)\omega/c$,其中 $n(\omega)$ 为(线性)折射率, c 为真空中的光速,得到某个频率组分满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \beta^2(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, \omega) \quad (10)$$

方程(10)实际上是非线性介质中的亥姆霍兹方程。

考虑到光纤中传输的光场有横向结构,将光场写成如下形式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mathbf{e}} F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) e^{i\beta_0 z} \quad (11)$$

其中, β_0 是中心频率处的传播常数, $\hat{\mathbf{e}}$ 表示光场偏振态的单位矢量, $F(x, y)$ 为无量纲的横向分布函数。式(11)代入式(10),则有

$$[\nabla_{\perp}^2 F(x, y)] \tilde{A}(z, \omega) + F(x, y) \left[2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega)}{\partial z} + (\beta^2(\omega) - \beta_0^2) \tilde{A}(z, \omega) \right] = -\mu_0 \omega^2 \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\beta_0 z} \quad (12)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 是光场拉普拉斯算符的横向部分。

到此处,在某种非线性效应下光脉冲在光纤中的传输方程就已经建立起来了。下面需要将该非线性效应具体的非线性极化强度 $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)$ 的表达式列出。比如具体的非线性是光克尔效应中的自相位调制(SPM)效应时,有

$$\mathbf{P}_{SPM}(z, \omega) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (13)$$

其中,不失一般性假设光场的偏振方向为 x 方向。如果具体的非线性效应是受激拉曼散射时,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{Raman}^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) \\ = \frac{3}{2} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} : \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, \omega_p) \mathbf{E}_p^*(\mathbf{r}, \omega_p) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega_s) \end{aligned} \quad (14)$$

其脚标 p 和 s 分别表示泵浦光和斯托克斯光。

如果讨论的是 SPM 效应,将式(13)代入式(12),得到

$$\begin{aligned} |F(x, y)|^2 \left[2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega)}{\partial z} + (\beta^2(\omega) - \beta_0^2) \tilde{A}(z, \omega) \right] \\ = -2\beta \frac{\omega n_2}{c} |F(x, y)|^4 |\tilde{A}(z, \omega)|^2 \tilde{A}(z, \omega) \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$n_2 = \frac{3}{8n} \chi_{xxxx}^{(3)} \quad (16)$$

是光克尔效应的非线性折射率。

将方程(15)进行横向 x 和 y 的积分,并定义参量

$$B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \quad (17)$$

光束的光功率 P 与光脉冲复振幅的关系为

$$P = B^2 |\tilde{A}(z, \omega)|^2 \quad (18)$$

并定义新的复振幅

$$\tilde{U}(z, \omega) = B \tilde{A}(z, \omega) \quad (19)$$

注意 $\tilde{A}(z, \omega)$ 与电场强度的量纲相同,单位用 V/m ,而 $\tilde{U}(z, \omega)$ 的量纲与 $\sqrt{P}$ 的量纲相同,单位是 $W^{1/2}$ 。

因此将式(15)进行横向积分并利用上述变换后,得到方程

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \tilde{U}(z, \omega)}{\partial z} + (\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{U}(z, \omega) \\ = -\gamma |\tilde{U}(z, \omega)|^2 \tilde{U}(z, \omega) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, γ 是光纤的非线性参量

$$\gamma = \frac{\omega n_2}{c A_{eff}} \left/ \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c n \right) \right. \quad (21)$$

而光纤横向的有效截面积为

$$A_{eff} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \right)^2 \quad (22)$$

将方程(20)中的 $\beta(\omega)$ 在中心频率处进行泰勒展开, 保留到二阶项, 再对方程进行傅里叶反变换, 得到时域 $U(z, t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial U(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U(z, t)}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial t^2} = i\gamma |U(z, t)|^2 U(z, t) \quad (23)$$

到此, 只关注 SPM 的非线性薛定谔方程推导结束, 其中几个关键步骤非常重要:

(1) 要从非线性的波动方程(6)出发, 而不能从线性的波动方程(4)出发。

(2) 需要考虑光场的横向分布 $F(x, y)$, 并将需要推导的方程进行横向积分, 只有进行了横向积分, 才需要引入光纤的有效截面积 A_{eff} 。

(3) 关注不同的非线性效应, 需要在方程(12)中将所要关注的非线性效应的非线性极化强度 $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)$ 的具体表达式代入。比如关注 SPM 效应, 代入的表达式是公式(13), 而需要关注受激拉曼效应时, 代入的表达式将变成公式(14)。

(4) 引入光场的横向分布 $F(x, y)$ 以后, 方程中待求的未知函数由与光场直接相关的复振幅 $A(z, t)$ 变成与光功率直接相关的复振幅 $U(z, t)$, 二者的量纲是不同的。

下面看一看阿戈沃教授推导非线性薛定谔方程的逻辑是什么样的, 有哪些不合理的地方, 会造成什么不良影响。

阿戈沃教授的书^[2]中 2.3 节一开始的公式(2.3.1)确实是非线性的波动方程, 但是在将光场 $\mathbf{E}$ 作了傅里叶变换以后(对应于文献[2]的公式(2.3.9)), 却给出了一个线性介质的亥姆霍兹方程(2.3.10), 只是将相对介电常数 $\epsilon_r(\omega)$ 进行了展开

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL} \quad (24)$$

引入了一个非线性的相对介电常数 ϵ_{NL} , 这样公式(15)在文献[2]中变成了两个分离的方程

$$\nabla_{\perp}^2 F + [\epsilon_r(\omega) k_0^2 - \beta^2] F = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\beta^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0 \quad (25)$$

阿戈沃教授在文献[2]中从线性亥姆霍兹方程出发, 然后再将介电常数处理成线性部分加非线性部分不是不行, 只是这样会产生如下的不良影响:

(1) 推导逻辑上有些混乱, 推导到底是基于非线性波动方程(非线性亥姆霍兹方程(10)与其等价), 还是基于线性的波动方程? 既然已经有了非线性的波动方程(等价的是非线性亥姆霍兹方程(10)), 直接用即可, 没有必要中途又变成在线性方程中作非线性处理。

(2) 利用将相对介电常数展开为线性部分和非线性部分, 则其非线性部分 ϵ_{NL} 只能与非线性折射率变化相关的非线性效应联系起来, 比如对于 SPM 效应

$$\epsilon_r = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n$$

$$\Delta n = n_2 |E|^2 \quad (26)$$

此处 n_2 就是式(16)定义的光克尔效应的非线性折射率。但是如果讨论受激拉曼效应, 则利用展开的非线性相对介电常数 ϵ_{NL} 无法与受激拉曼效应对应起来。这样的推导方法不具有研究非线性效应的普适性。

(3) 文献[2]在处理横向分布的横向积分时很生硬, 采用他们引用的文献[10]的做法, 把方程(25)中的传播常数 β 处理成线性部分加非线性部分

$$\beta_{\text{总}} = \beta(\omega) + \Delta\beta_{NL} \quad (27)$$

其中

$$\Delta\beta_{NL} = \frac{\omega}{c} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (28)$$

笔者实在看不出从式(27)~式(28), 在什么地方以我们看得懂的方式处理了横向积分, 所以说处理得生硬。当假定这种处理是有道理的, 才能后面的推导过程中出现光纤有效截面积 A_{eff} 这个量。

(4) 阿戈沃教授也是如同本文的式(11)那样, 将光场处理成横向分布 $F(x, y)$ 和纵向复振幅 $\tilde{A}(z, \omega)$ 的乘积形式, 但是在没有任何实际公式处理的情况下在第 39 页生硬地将与电场振幅直接相联系的 $\tilde{A}(z, \omega)$ 换成了与功率直接相联系的振幅。书中原文译成中文是这样的: “假

设 $F(x, y)$ 是无量纲的, 则公式(2. 3. 28)中的脉冲振幅 $A(z, t)$ 单位为电场的单位(V/m)。出于实际原因, 通常将 A 归一化, 使 $|A|^2$ 表示光功率。为此, 我们引入 A' 使得 $|A'|^2 = \epsilon_0 n c A_m |A|^2 / 2$, 其中 $A_m = \iint |F(x, y)|^2 dx dy$ 是模式面积。”其实, 如果是关于 A 的线性方程, 将 A 换成 A' , 方程等式不会变化, 而公式(15)是非线性方程, 其非线性项 $|\tilde{A}(z, \omega)|^2 \tilde{A}(z, \omega)$ 中 $|\tilde{A}(z, \omega)|^2$ 也是有量纲的, 不能把 $\tilde{A}(z, \omega)$ 直接换成 $\tilde{A}'(z, \omega)$ 还能使方程等式成立。笔者查了一下阿戈沃教授的第1版书^[1], 其中没有将 A 换成 A' 的解释, 应该是在发现了问题后, 阿戈沃教授在随后的版次改了一下解释, 但是这种解释十分勉强。而本文的推导过程, 逻辑清晰自然地用 B 参数将 A 和 U 联系在一起, 推导是严格的, 概念是清晰的。

2 将非线性薛定谔方程推广到四波混频效应

如前所述, 在本文给出的推导方法中, 当考虑到其他的非线性效应时, 直接体现为非线性波动方程(6)或非线性亥姆霍兹方程(10)以及式(12)右侧的非线性源表达式的变化, 其物理涵义更加清晰, 适用范围远比阿戈沃教授教材中的推导方法要广泛。现举四波混频的例子加以详细说明。

四波混频是光纤中一种重要的非线性现象, 如光纤参量放大器就是利用了该效应, 而在波分复用光纤通信中要避免该效应。四波混频的泵浦情况分为非简并泵浦和简并泵浦(即两个泵浦简并为一个)两种情况, 它们的相位失配因子并不相同。而在阿戈沃教授书中^[2], 可能是其采用的推导方法不适用于其他非线性效应, 因此在教材中直接给出了不同的相位失配因子, 却没有给出推导过程或者解释, 可能会令读者感到疑惑。利用本文给出的推导方法, 根据不同泵浦形式下式(6)的非线性源表达式的不同, 可以很方便地推导出简并与非简并泵浦情况下四波混频的相位失配因子。

当泵浦波为非简并形式时, 比如令混频关系为 $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ 或 $\omega_4 + \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, 此时光纤中四波混频的四个频率的非线性极化强度可被分别表示为(为简要起见, 仅给出 ω_1, ω_3 频率的非线性极化强度)^[3]

$$\begin{aligned} & \hat{e}_1 \cdot \mathbf{P}^{(3)}(z, \omega_1) e^{-i\beta_1 z} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \hat{e}_1 \cdot [3\chi^{(3)}(-\omega_1, -\omega_1, \omega_1, \omega_1) : \\ & \quad \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 |A_1(z)|^2 A_1(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_2, -\omega_2) : \\ & \quad \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 |A_2(z)|^2 A_1(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_3, -\omega_3) : \\ & \quad \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_3 |A_3(z)|^2 A_1(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_4, -\omega_4) : \\ & \quad \hat{e}_1 \hat{e}_4 \hat{e}_4 |A_4(z)|^2 A_1(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_1, -\omega_2, \omega_3, \omega_4) : \\ & \quad \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 A_2^*(z) A_3(z) A_4(z) e^{i(-\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)z}] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \hat{e}_3 \cdot \mathbf{P}^{(3)}(z, \omega_3) e^{-i\beta_3 z} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \hat{e}_3 \cdot [3\chi^{(3)}(-\omega_3, -\omega_3, \omega_3, \omega_3) : \\ & \quad \hat{e}_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3 |A_3(z)|^2 A_3(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_1, -\omega_1) : \\ & \quad \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_1 |A_1(z)|^2 A_3(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_2, -\omega_2) : \\ & \quad \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_2 |A_2(z)|^2 A_3(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_4, -\omega_4) : \\ & \quad \hat{e}_3 \hat{e}_4 \hat{e}_4 |A_4(z)|^2 A_3(z) + \\ & \quad 6\chi^{(3)}(-\omega_3, -\omega_4, \omega_1, \omega_2) : \\ & \quad \hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_2 A_4^*(z) A_1(z) A_2(z) e^{i(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z}] \end{aligned} \quad (30)$$

将这四个非线性极化强度的表达式代入非线性波动方程(13), 忽略色散效应、非线性极化率随频率的变化及四个光场横向分布的不同, 并假设四个波都是偏振方向相同的线偏振光(不妨设为 x 方向), 推导过程类似式(13)~式(23), 可得到四个耦合波方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial z} &= i\gamma [(|U_1|^2 + 2 \sum_{j \neq 1} |U_j|^2) U_1 + \\ & \quad 2U_2^* U_3 U_4 e^{i\Delta k z}] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial z} &= i\gamma [(|U_2|^2 + 2 \sum_{j \neq 2} |U_j|^2) U_2 + \\ & \quad 2U_1^* U_3 U_4 e^{i\Delta k z}] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial z} = i\gamma[(|U_3|^2 + 2\sum_{j \neq 3} |U_j|^2)U_3 + 2U_4^* U_1 U_2 e^{-i\Delta k z}] \quad (33)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial z} = i\gamma[(|U_4|^2 + 2\sum_{j \neq 4} |U_j|^2)U_4 + 2U_3^* U_1 U_2 e^{-i\Delta k z}] \quad (34)$$

其中, $U(z, \omega_j) = BA(z, \omega_j)$, 线性相位适配因子 $\Delta k = \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2$ 。

下面考虑耦合波方程在特定情况下的近似解。在泵浦无消耗情况下(即从两泵浦光 ω_1 和 ω_2 向信号光 ω_3 和闲频光 ω_4 耦合的效率不高, 泵浦光几乎不损失), 由方程(31)、式(32)得到两泵浦光的解

$$U_j(z) = \sqrt{P_j(0)} \exp[i\gamma(P_j(0) + 2P_{3-j}(0))z], \quad j=1,2 \quad (35)$$

其中, $P_j(0) = |U_j(0)|^2$ 是两入纤泵浦之一的光功率, 此时两泵浦光在光纤中传输只是经历了自相位调制和交叉相位调制引起的相移(3、4 波的功率相比 1、2 波非常小, 因此对 1、2 波的交叉相位调制影响可以忽略)。在输入信号光功率较小的情况下可由式(33)得

$$U_3(z) = \sqrt{P_3(0)} \exp[i\gamma 2(P_1(0) + P_2(0))z] \quad (36)$$

方程(34)的解为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_4^*}{\partial z} = & -2i\gamma\{(P_1(0) + P_2(0))U_4^* + \\ & \sqrt{P_1(0)P_2(0)P_3(0)} \cdot \\ & \exp[i(\Delta k - \gamma(P_1(0) + P_2(0)))z]\} \end{aligned} \quad (37)$$

作如下的变换

$$V_4 = U_4 \exp[-2i\gamma(P_1(0) + P_2(0))z] \quad (38)$$

方程(37)可以变为

$$\frac{\partial V_4^*}{\partial z} = -2i\gamma \sqrt{P_1(0)P_2(0)P_3(0)} \exp(i\kappa z) \quad (39)$$

其中, κ 是四波混频的广义失配因子, 在此处非简并泵浦情况其表达式为

$$\kappa = \Delta k + \gamma(P_1(0) + P_2(0)) = \Delta k + \gamma P_p \quad (40)$$

其中 $P_p = P_1(0) + P_2(0)$ 是入纤泵浦光的总功率。

而在泵浦波简并的四波混频条件下, 即 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_p$, 非线性极化强度的表达式与式(29)、式(30)略有不同, 此时, 两泵浦光的两个光子来源于同一束光, 该四波混频过程由三个波的耦合来描述, 与非简并泵浦情况的式(29)、式(30)对应的非线性极化强度表达式为

$$\begin{aligned} & \hat{e}_1 \cdot P^{(3)}(z, \omega_1) e^{-i\beta_1 z} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \hat{e}_1 \cdot [3\chi^{(3)}(-\omega_1, -\omega_1, \omega_1, \omega_1) \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 |A_1(z)|^2 A_1(z) + \\ & 6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_3, -\omega_3) \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_3 |A_3(z)|^2 A_1(z) + \\ & 6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_4, -\omega_4) \hat{e}_1 \hat{e}_4 \hat{e}_4 |A_4(z)|^2 A_1(z) + \\ & 6\chi^{(3)}(-\omega_1, -\omega_1, \omega_3, \omega_4) \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_4 A_1^*(z) A_3(z) A_4(z) e^{i(-2\beta_1 + \beta_3 + \beta_4)z}] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \hat{e}_3 \cdot P^{(3)}(z, \omega_3) e^{-i\beta_3 z} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \hat{e}_3 \cdot [3\chi^{(3)}(-\omega_3, -\omega_3, \omega_3, \omega_3) \hat{e}_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3 |A_3(z)|^2 A_3(z) + \\ & 6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_1, -\omega_1) \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_1 |A_1(z)|^2 A_3(z) + \\ & 6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_4, -\omega_4) \hat{e}_3 \hat{e}_4 \hat{e}_4 |A_4(z)|^2 A_3(z) + \\ & 3\chi^{(3)}(-\omega_3, -\omega_4, \omega_1, \omega_1) \hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_1 A_4^*(z) A_1^2(z) e^{i(2\beta_1 - \beta_3 - \beta_4)z}] \end{aligned} \quad (42)$$

比较式(29)和式(41), 可以看出在简并条件下 ω_1 波非线性极化强度的表达式(41)中, 等号右边相比于非简并表达式(29)不再体现 1、2 波的相互作用项 $6\chi^{(3)}(-\omega_1, \omega_1, \omega_2, -\omega_2) \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \times |A_2(z)|^2 A_1(z)$, 且式中最后一项的振幅由原来非简并表达式(29)的 $A_2^*(z)A_3(z)A_4(z)$ 变成 $A_1^*(z)A_3(z)A_4(z)$, 相位由原来的 $i(-\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)z$ 变成了 $i(-2\beta_1 + \beta_3 + \beta_4)z$ 。同样, 比较式(30)和式(42), ω_3 波非线性极化强度的表达式中, 等号右边不再体现 2(与 1 波是一个波)、3 波的

相互作用项 $6\chi^{(3)}(-\omega_3, \omega_3, \omega_2, -\omega_2) \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \times |A_2(z)|^2 A_3(z)$, 最后一项的系数由原来的 6 变成 3, 振幅由原来的 $A_4^*(z)A_1(z)A_2(z)$ 变成了 $A_4^*(z)A_1^2(z)$, 相位由原来的 $i(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z$ 变成 $i(2\beta_1 - \beta_3 - \beta_4)z$ 。将式(41)、式(42)代入非线性波动方程(13)等号右侧, 得到的耦合波方程也与非简并泵浦时有所差异。类似非简并泵浦的推导过程, 得到简并泵浦四波混频情况下广义相位失配因子 κ 变为

$$\kappa = \Delta k + 2\gamma P_p \quad (43)$$

由上述推导可知, 简并四波混频效应的耦合波方程并不能由非简并四波混频的耦合波方程令 $\omega_1 = \omega_2$ 直接获得。因为在两种情况下, 非线性极化矢量展开项并不是继承关系。也可以看到, 泵浦波简并的四波混频的广义相位失配因子式(43)与非简并四波混频的广义相位失配因子式(40)有所不同, 其中非线性相关项相差一个因子 2。而在阿戈沃教授的推导过程中^[2], 把简并四波混频的公式当作非简并四波混频的一个特殊情况, 只是简单地认定 $P_1(0) = P_2(0)$ 。另外从失配因子公式(40)到式(43), 阿戈沃教授的推导中似乎是“滑”过来的, 没有给出令人信服的推导。实际上从式(40)和式(43)是从非简并下的耦合波方程以及简并下的耦合波方程分别计算得到的, 并不是继承关系。如果是继承关系的话, 式(40)和式(43)不应该有区别, 都不会有因子 2。以没有因子 2 为基础, 阿戈沃教授不应该得到他书中的简并四波混频相位失配图 10.1。可见如果依照阿戈沃教授的推导逻辑处理非线性光学问题, 确实有隐患存在。

3 推导过程中其他需要注意的问题

非线性薛定谔方程是研究光脉冲在光纤中传输的基本方程, 在推导非线性薛定谔方程时, 还有一些需要注意的问题。在不同的教材中符号的约定可能不同, 例如高斯单位制^[6]与国际单位制^[7]、复振幅前有无 $1/2$ 因子、采取正频还是负频表示^[8,9]等, 这将导致推导得到的非线性薛定谔方程的表达形式也不相同^[3]。

早期人们在电磁学中的单位制习惯用高斯单

位制, 而现如今大家普遍采用国际单位制(SI 单位制)。上文中式(6)是非线性波动方程在国际单位制下的表达, 若采用高斯单位制, 非线性波动方程应被表示为

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}) \\ = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (44)$$

从而最终推导出的非线性传输方程的表达式也不同。Boyd 教授的《Nonlinear Optics》第 1 和第 2 版^[6]均采用高斯单位制, 到了第 3 版^[7]和第 4 版就改成国际单位制了。

在光学中, 人们常采用复指数函数 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}} E_0 \cdot \exp[\pm i(\omega t - kz)]$ 表示光电场矢量, 不同的教材中对于指数中的符号有选取“+”号的也有采用“-”号的, 称之为正负频表达。大多数非线性光学的教材, 如文献[1], 都把 $e^{-i\omega t}$ 项作正频处理, 而负频用 c. c. (complex conjugate, 复数共轭) 表示。而如果选 $e^{i\omega t}$ 项作正频^[8,9], 非线性薛定谔方程将变成其复共轭的形式。

值得注意的是, 大多数编程语言(如 Matlab)中的快速傅里叶(逆)变换(FFT 和 iFFT)采用的形式都对正频的表达形式, 即其自带的 fft 和 ifft 子程序对应的是 $e^{i\omega t}$ 项作正频的选择。光脉冲在光纤中传播时的准单色光场正负频形式的非线性薛定谔方程、正负频形式的傅里叶变换及其它们之间的关系等问题易被忽视。理论表明若采用负频形式的非线性薛定谔方程则应选取相应的负频形式的傅里叶变换, 若采用正频形式的非线性薛定谔方程则应选取正频形式的傅里叶变换。这样在利用编程语言进行非线性薛定谔方程仿真时, 需要注意所用编程语言中的快速傅里叶变换的符号。

此外, 在正负频分离的表达式(7)中, 振幅前面是有因子 $1/2$ 的, 此时的振幅与余弦表示下的振幅幅度相同。然而有些非线性光学书中^[6,7]省略了这个 $1/2$ 因子

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0(z) e^{-i(\omega t - kz)} + c. c. \quad (45)$$

在此种情况下, 非线性极化强度公式(如式(13)、式(14)等)前面的系数将会不同。值得注意的是, 此时式(45)表示的光场振幅是实际光场振幅的 $1/2$, 在

计算光强和光功率时需要考虑这个系数的存在。比如,考虑定义光场时有 $1/2$ 系数和没有 $1/2$ 系数这两种情况,计算得到的光强与振幅之间的关系分别为如下两式

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n |E_0|^2 \quad (46)$$

$$I = 2 \epsilon_0 c n |E_0|^2 \quad (47)$$

4 结语

本文比较了非线性薛定谔方程的两种推导方法,指出了经典教材——阿戈沃教授的《非线性光纤光学》一书中对该方程非线性项处理的局限与不妥之处,并详细给出了一种从非线性极化源角度出发进行较严格理论推导的方法和逻辑。后者给初学者呈现出了一种较为清晰、规范化的推导方法,对其他的非线性效应的处理也更具普适性。同时,本文还提醒读者在不同的书中,单位制的不同、正负频表达选择的不同以及有无 $1/2$ 因子的不同所需要注意的事项,希望能够帮助读者排除

在学习非线性光学时容易出现的一些困惑,进一步了解光脉冲在非线性光纤中的演化规律。

参 考 文 献

- [1] AGRAWAL G P. Nonlinear Fiber Optics[M]. Waltham: Academic Press, 1989.
- [2] AGRAWAL G P. Nonlinear Fiber Optics[M]. 6th ed. Waltham: Academic Press, 2019.
- [3] 张晓光,唐先锋,肖晓晟. 非线性光学与非线性光纤光学贯通教程[M]. 北京:北京邮电大学出版社, 2021:165-168.
- [4] SCHNEIDER T. Nonlinear Optics in Telecommunications [M]. Berlin: Springer, 2004.
- [5] FERREIRA M F S. Nonlinear effects in optical fiber[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- [6] BOYD R W. Nonlinear Optics[M]. 2nd ed. Waltham: Academic Press, 2003.
- [7] BOYD R W. Nonlinear Optics[M]. 3rd ed. Waltham: Academic Press, 2008.
- [8] SAUTER E G. Nonlinear Optics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [9] NEW G. Introduction to nonlinear optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.