

投篮中的篮球运动轨迹分析

项姿睿 桑芝芳

(苏州大学物理科学与技术学院, 江苏 苏州 215006)

摘要 本文考虑了投篮运动中空气浮力、空气阻力和马格努斯力对篮球的作用,建立了投篮过程中篮球运动的动力学模型,计算了前旋、后旋等多种情况下的篮球运动轨迹方程,借助 Matlab 软件对篮球的运动轨迹进行求解与绘图,结合图像分别讨论了空气阻力、马格努斯力、角速度、抛射角等因素对篮球射高、射程和轨迹的影响。在理论分析的基础上,借助 Tracker 软件进行实验以获取真实投篮过程中篮球的运动轨迹与相关参量,说明理论分析与实验数据符合得较好。

关键词 轨迹方程;空气阻力;马格努斯力;角速度;抛射角

ANALYSIS OF BASKETBALL TRAJECTORY IN SHOOTING

XIANG Zirui SANG Zhifang

(School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006)

Abstract In this paper, the effects of air buoyancy, air resistance and Magnus force on the basketball in the shooting movement are considered, the dynamics model of basketball motion is established, and the trajectory equation of the basketball movement under various circumstances such as forward spin and back spin are calculated. The trajectory of the basketball is solved and drawn by Matlab software and the influence of air resistance, Magnus force, angular velocity and projection angle on the shooting height, range and trajectory of basketball are discussed. On the basis of theoretical analysis, the software Tracker is used to conduct experiments to obtain the trajectory of basketball movement and related parameters in the real shooting process, which indicates that the theoretical analysis is in good agreement with the experimental data.

Key words trajectory equation; air resistance; Magnus force; angular velocity; projection angle

篮球是当今流行的球类运动之一,运动过程中的篮球速度、弹跳高度、投篮姿势等问题都涉及了物理学中的动力学知识与规律。以投篮运动为例,在中学阶段其常被作为理想抛体运动的案例,

但前提是忽略空气阻力并将篮球看作质点,认为篮球被抛出后只受重力作用。但在实际情况中,由于存在气流与球体的旋转,篮球的受力情况与运动轨迹会更加复杂。

收稿日期: 2023-07-20

基金项目: 江苏省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“基于师范专业认证的教育类实践课程表现性评价研究”(B/2021/01/39)。

通讯作者: 桑芝芳,女,教授,主要研究方向为大学与中学物理教学, sangzf@suda.edu.cn。

引文格式: 项姿睿,桑芝芳. 投篮中的篮球运动轨迹分析[J]. 物理与工程, 2023, 33(6): 80-84.

Cite this article: XIANG Z R, SANG Z F. Analysis of basketball trajectory in shooting[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(6): 80-84. (in Chinese)

1 篮球运动过程中的受力情况

取水平向右与竖直向上为正方向,篮球质量为 m ,质心平动速度为 v , v 与 x 轴正方向的夹角为 θ ,球体绕质心的旋转角速度为 ω 。如图 1 所示,假设篮球在 x - y 平面内被向右抛出且旋转方向沿逆时针方向,则篮球在空中会受到重力 G 、空气浮力 F' 、空气阻力 f_1 和马格努斯力 f_2 的作用^[1],接下来分别讨论空气阻力 f_1 和马格努斯力 f_2 的作用效果。

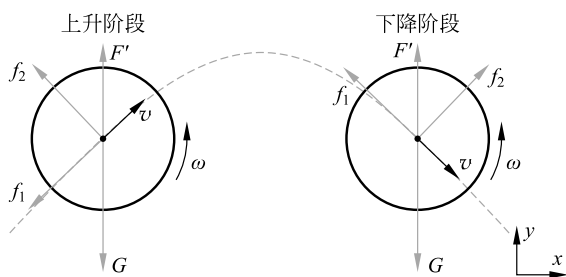


图 1 篮球受力示意图

1.1 空气阻力

球体在流体中运动时会受到与运动方向相反的一种阻力——黏滞阻力和压差阻力,两种阻力的占比与雷诺系数 Re 有关。 Re 是一个无量纲的常数,由流体密度 ρ_a 、球体直径 D 、流体黏滞系数 η 、篮球质心相对于流体的平动速度 v 决定,具体表达式为

$$Re = \frac{\rho_a D v}{\eta} \quad (1)$$

当 $Re < 1$ 时,球体主要受黏滞阻力作用,此时空气阻力与速度成正比,具体表示为 $f_1 = -6\pi\eta v$,该方程主要适用于流体绕物体运动的相对速度非常迟缓、物体尺寸非常小或物体黏性非常大等情形^[2]。对于 7 号国标篮球,代入 $D = 24.60\text{cm}$ 、 $\rho_a = 1.293\text{ kg/m}^3$ 、 $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ($T = 293.15\text{K}$) 可知:当 $v \geq 0.566\text{m/s}$ 时, $Re \geq 1 \times 10^4$ 。因此一般投篮运动中 Re 较大,此时压差阻力的占比明显增大,空气阻力应正比于速度的平方,具体表示为^[3]

$$f_1 = -k_1 v^2 \cdot e_v = -\frac{1}{2} \rho_a C_d S v \cdot v \quad (2)$$

其中, S 为篮球的迎风面积 ($S = \pi r^2$), C_d 为阻力系数, C_d 的大小与球体表面的粗糙程度、雷诺系数 Re 及马赫数 M 有关, $M = v/v_{\text{声}}$ 。一般投篮运

动中, $M \ll 1$ 且只会发生小范围波动,说明此时空气的压缩效应很小,影响阻力系数的主要因素是球体表面的粗糙程度和雷诺系数 Re ^[4]。对于表面光滑的篮球,若 $Re < 2.5 \times 10^5$,可取 $C_d = 0.45$ ^[2]。

1.2 马格努斯力

如图 2 所示,逆时针旋转的篮球以速度 v 相对于流体向右运动(相当于流体以速度 v 相对于篮球向左运动)的过程中,由于附壁效应,流体在篮球上表面的分离点会发生后移,在下表面的分离点会发生前置,使得篮球上表面处的流体速度较下表面更快。上、下表面流体的流速差会产生压强差,并使篮球受到一方向向上的压力,这个压力就是马格努斯力 f_2 。马格努斯力的方向垂直于 ω 和 v 所确定的平面,并满足矢量积的右手关系,具体表示为

$$f_2 = k_2 v (e_\omega \times e_v) = C_L \rho_a r^3 \omega \times v \quad (3)$$

其中, C_L 为升力系数,此处取 $C_L = \frac{8\pi}{3}$ ^[4]。在真实投篮过程中,相对于篮球质心的空气力矩会影响篮球的旋转角速度 ω ,进而改变 k_2 与篮球的质心速度,为简便起见,暂不考虑空气阻力矩对 ω 的影响,认为 ω 是一定值。

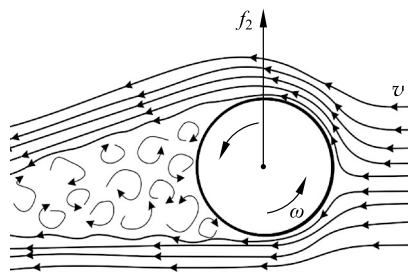


图 2 后旋球的马格努斯力效应示意图

2 篮球运动轨迹方程

图 1 中的篮球为后旋球,其在上升过程中的动力学方程满足

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -f_1 \cos\theta - f_2 \sin\theta \\ m\ddot{y} &= F' - G - f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta \end{aligned} \quad (4)$$

代入 $G = mg$ 、 $F' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g$ 、 $\cos\theta = v_x/v$ 、 $\sin\theta = v_y/v$ 、式(2)、式(3)可得

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k'_1 \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - k'_2 \dot{y} \\ \ddot{y} &= (\rho' - 1)g - k'_1 \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + k'_2 \dot{x} \end{aligned} \quad (5)$$

其中系数

$$k'_1 = \frac{k_1}{m} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} \cdot \rho_a \pi r^2}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b} = \frac{27}{160r} \rho'$$

$$k'_2 = \frac{k_2}{m} = \frac{\frac{8\pi}{3} \rho_a \omega r^3}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b} = 2\omega \rho'$$

$$\rho' = \frac{\rho_a}{\rho_b} \quad (6)$$

同理可得下降过程中后旋球的动力学方程与式(5)一致。若篮球为前旋球,则其被投出后的动力学方程为

$$\ddot{x} = k'_1 \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - k'_2 \dot{x}$$

$$\ddot{y} = (\rho' - 1)g - k'_1 \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - k'_2 \dot{x} \quad (7)$$

对于后旋球,当不考虑空气阻力时,篮球的动力学方程为

$$\ddot{x} = -k'_2 \dot{y}$$

$$\ddot{y} = (\rho' - 1)g + k'_2 \dot{x} \quad (8)$$

求解微分方程可得篮球的运动轨迹满足

$$x = \frac{v_{x0} k'_2 + (\rho' - 1)g}{k'^2_2} \sin k'_2 t + \frac{v_{y0}}{k'_2} \cos k'_2 t -$$

$$\frac{(\rho' - 1)g}{k'_2} t - \frac{v_{y0}}{k'_2}$$

$$y = -\frac{v_{x0} k'_2 + (\rho' - 1)g}{k'^2_2} \cos k'_2 t + \frac{v_{y0}}{k'_2} \sin k'_2 t +$$

$$\frac{v_{x0} k'_2 + (\rho' - 1)g}{k'^2_2} \quad (9)$$

当不考虑马格努斯力时,篮球的动力学方程为

$$\ddot{x} = -k'_1 \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\ddot{y} = (\rho' - 1)g - k'_1 \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (10)$$

当不考虑空气阻力和马格努斯力时,篮球的运动轨迹满足

$$x = v_{x0} \cdot t$$

$$y = v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2}(\rho' - 1)gt^2$$

$$y = \frac{(\rho' - 1)g}{2v_{x0}^2} x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x \quad (11)$$

在式(11)中,若不考虑空气浮力,即 $\rho' = 0$,则篮球的运动为理想抛体运动。

3 对篮球运动轨迹进行数值分析

选择研究对象为表面光滑的国标7号篮球,篮球的半径 $r = 12.30\text{cm}$ 、质量 $m = 600.0\text{g}$ 、密度 $\rho_b = m / \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 76.98\text{ kg/m}^3$,令篮球旋转角速度为 ω 、抛射角为 θ_0 、质心初速度 $v_0 = 5\text{m/s}$ 。基于多角度对投篮过程进行数值分析与绘图,以体现不同因素对篮球运动轨迹的影响。

3.1 旋转方向对运动轨迹的影响

令 $\theta_0 = 53^\circ$ 、 $\omega = 5\text{rad/s}$,利用 Matlab 对式(5)、式(7)进行数值求解,可得后旋球和前旋球的运动轨迹如图3所示。在抛射角、角速度和质心初速度的大小一定时,后旋球的射高、射程、运动轨迹的曲率和入篮角度都较前旋球更大,其入篮率也更高^[6],因此投篮过程中应尽量用指尖使球发生后旋,具体投篮手势如图4所示。接下来主要对后旋球的运动轨迹展开讨论。

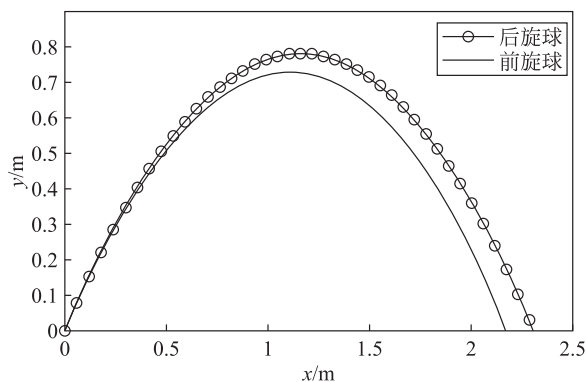


图3 后旋球和前旋球的运动轨迹

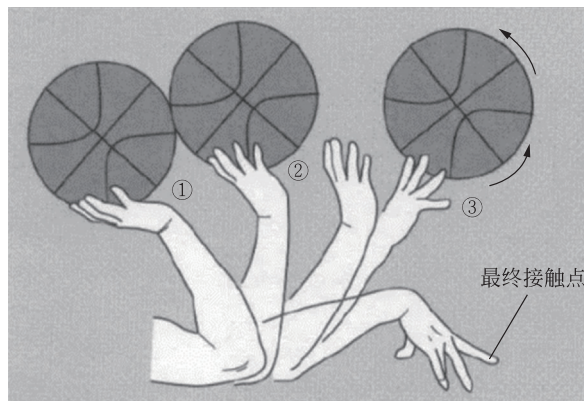


图4 后旋球的投篮手势示意图

3.2 旋转快慢对运动轨迹的影响

令 $\theta_0 = 53^\circ$, 改变 ω 的大小可得篮球运动轨迹最高点与旋转快慢的关系如图 5、图 6 所示。在质心初速度和抛射角一定时, 篮球的射高随 ω 的增大而增高, 特别的, 当 ω 增大至 70rad/s 时篮球的运动轨迹会出现拐点, 若继续增大 ω , 篮球的运动轨迹会变成螺旋线。

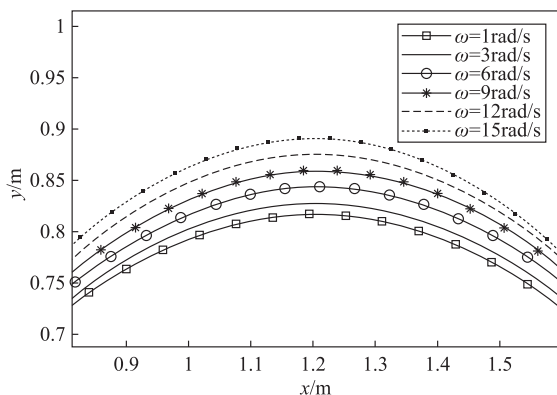


图 5 不同角速度下的投篮轨迹最高点

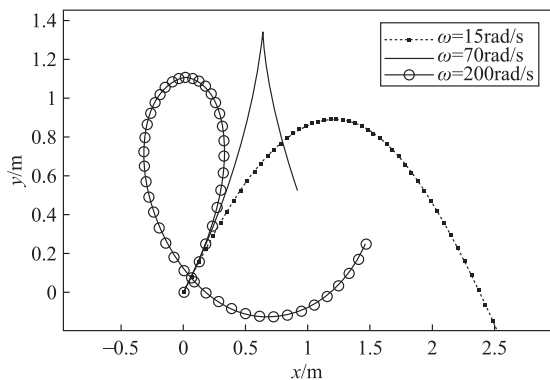


图 6 角速度极大时投篮轨迹变成螺旋线

3.3 抛射角对运动轨迹的影响

令 $\omega = 5\text{rad/s}$, 在质心初速度和角速度的大小一定时, 篮球运动轨迹与抛射角 θ_0 的关系如图 7 所示。随着抛射角的增大, 篮球的射高会不断升高, 但射程会先增大后减小。与理想抛体运动规律不同的是, 此时使篮球射程最大的抛射角不是 45° , 而是 43.0° 。

3.4 空气阻力和马格努斯力对运动轨迹的影响

令 $\theta_0 = 53^\circ$, $\omega = 5\text{rad/s}$, 对式 (9)~(11) 进行数值求解, 可得不考虑空气阻力或马格努斯力时后旋球的运动轨迹如图 8 所示。对比可知, 对于后旋球, 马格努斯力 f_2 的作用效果是增大篮球的射高与射程, 空气阻力 f_1 的作用效果是减小篮球的射高与射程。

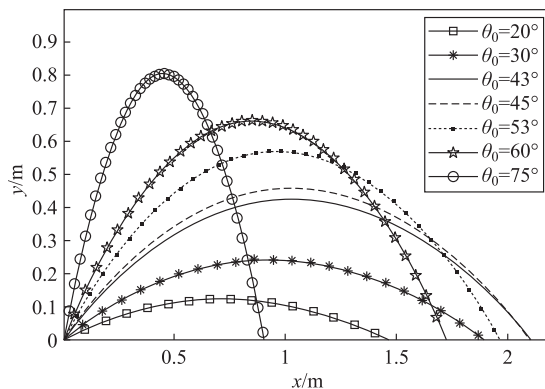


图 7 不同投篮角度的篮球运动轨迹

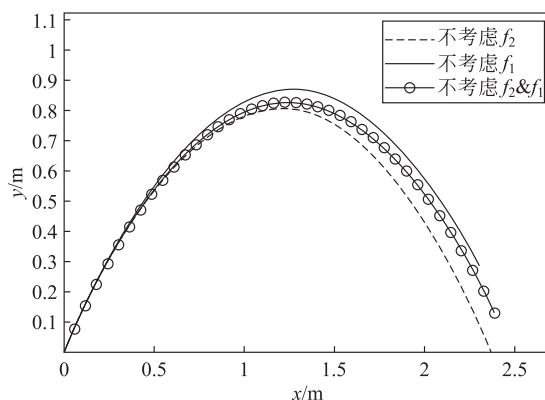


图 8 不考虑空气阻力或马格努斯力时的篮球运动轨迹

4 投篮实验

借助 Tracker 软件进行投篮实验, 捕捉篮球的空间位置坐标并拟合篮球运动轨迹方程。注意事项: (1) 选择表面光滑的国标篮球, 测量篮球的半径与质量; (2) 投篮时使球发生后旋; (3) 拍摄过程中拍摄界面应平行于篮球的运动平面; (4) 定标时应选择篮球运动平面内的物体作为参照物; (5) 视频分析过程中应尽量缩短采样时间以增加采样点数量; (6) 建立追踪质点时应选取篮球的球心为追踪点, 并可将视频放大以进行人为追踪与微调。

本次实验中篮球的半径 $r = 12.00\text{cm}$, 质量 $m = 599.8\text{g}$ 。对篮球完全离开指尖至到达篮筐整个过程进行逐帧分析, 生成数据如图 9 所示, 对篮球的位置坐标进行函数拟合, 可知其在水平和竖直方向的速度 v_x 、 v_y 对时间 t 的关系为

$$\begin{aligned} v_x &= -0.228t + 3.814 \\ v_y &= -9.305t + 5.317 \end{aligned} \quad (12)$$

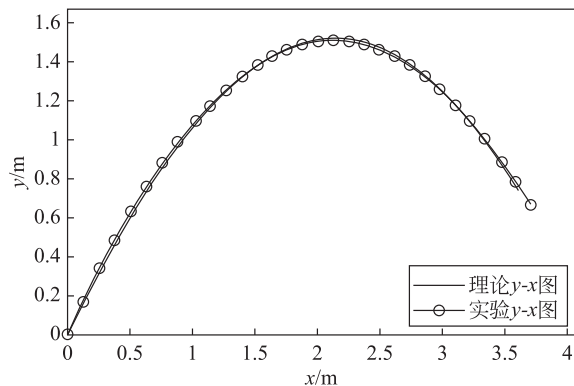
代入 $t = 0$, 可得篮球的实验参数

$$\begin{aligned} v_{x0} &= 3.814\text{m/s} \\ v_{y0} &= 5.317\text{m/s} \end{aligned} \quad (13)$$



图9 基于 Tracker 软件捕捉投篮运动轨迹

将 Tracker 中的篮球空间位置坐标导入 Matlab 可得实验 $y-x$ 图, 对式(5)进行数值求解可得理论 $y-x$ 图。以 0.01 为步进, 不断调整式(5)中 ω 、 v_{x0} 和 v_{y0} 的大小, 使两曲线逐渐逼近。如图 10 所示, 当 $\omega = 5.90 \text{ rad/s}$ 、 $v_{x0} = 4.03 \text{ m/s}$ 、 $v_{y0} = 5.33 \text{ m/s}$ 时, 两曲线的拟合程度最佳(相关系数 R^2 达到最大值 0.9987, 均方根系数达到最小值 0.0152), 当 ω 偏离 0.03 rad/s 或 v_{x0} 、 v_{y0} 偏离 0.01 m/s 时, 两曲线出现明显的偏差。因此篮球的理论参数为 $\omega = 5.90 \pm 0.03 (\text{rad/s})$ 、 $v_{x0} = 4.03 \pm 0.01 (\text{m/s})$ 、 $v_{y0} = 5.33 \pm 0.01 (\text{m/s})$ 。对比可知, 投篮过程中后旋球的理论运动轨迹方程(式(5))与实验数据基本吻合, 本实验的误差来源可能为篮球相关参数的测量不精准、拍摄平面与篮球运动平面不完全平行或追踪选点不精确等原因。

图10 理论 $y-x$ 图与实验 $y-x$ 图

5 结语

本文以投篮运动为例, 建立了投篮过程中篮

球的动力学模型, 对篮球的运动轨迹进行了理论分析与实验验证, 可以得到以下主要结论:

(1) 真实投篮运动中的篮球会受到重力、空气浮力、空气阻力和马格努斯力作用, 其中空气阻力的大小正比于篮球质心速度的平方, 其方向与篮球的质心速度方向相反; 马格努斯力的大小正比于篮球的质心速度, 其方向为篮球角速度与质心速度的矢量积方向, 前旋球的马格努斯力方向向下, 后旋球的马格努斯力方向向上;

(2) 投篮运动中, 后旋球的运动轨迹满足式(5)、前旋球的运动轨迹满足式(7), 在篮球的抛射角、质心初速度和角速度大小一定时, 后旋球的射高更高、射程更远;

(3) 对于后旋球, 空气阻力的作用效果为减小篮球的射高与射程, 马格努斯力的作用效果为增大篮球的射高与射程。篮球的射高随角速度的增大而增大, 当角速度增至一定值时, 篮球的运动轨迹会变成螺旋线。篮球的射高与抛射角呈正相关, 而射程会随着抛射角的增大先增大后减小。与理想抛体运动不同的是, 45° 不再始终是射程最大时的抛射角。

参考文献

- [1] 赵芸赫, 马宇翰. 旋转球体在空气中的运动轨迹: 由 2020 年北京高考物理 14 题引发的思考[J]. 物理与工程, 2021, 31(2): 79-86.
ZHAO Y H, MA Y H. Trajectory of a rotating sphere in the air-thoughts from the question 14th of Beijing college entrance examination of physics in the 2020[J]. Physics and Engineering, 2021, 31(2): 79-86. (in Chinese)
- [2] 赵孝保. 工程流体力学[M]. 3 版. 南京: 东南大学出版社, 2012: 162.
- [3] 莫乃. 工程流体力学[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2015: 176-177.
- [4] ALLEN E J. Approximate ballistics formulas for spherical pellets in free flight[J]. Defence Technology, 2018, 14(1): 1-11.
- [5] 刘大为. 球体飞行轨迹异常的探讨[J]. 大学物理, 1987(1): 43-45.
LIU D W. Discussion on abnormal flight path of sphere[J]. College Physics, 1987(1): 43-45. (in Chinese)
- [6] 郝明. 探究旋转对篮球投篮命中率的影响[J]. 中学物理教学参考, 2017, 46(14): 42-43.
HAO M. Research on the influence of rotation on basketball shooting percentage [J]. Teaching Reference of Middle School Physics, 2017, 46(14): 42-43. (in Chinese)