

光滑圆筒中的四球问题

——对 39 届中学生物理竞赛复赛(延考)第四题的思考

吴 洵¹ 姜付锦² 何 彬³ 黄亦斌⁴⁽¹⁾ 江西省鄱阳中学, 江西 上饶 333100; ⁽²⁾ 湖北省武汉市黄陂一中, 湖北 武汉 430300;⁽³⁾ 江西省万载中学, 江西 宜春 336000; ⁽⁴⁾ 江西师范大学, 江西 南昌 330022)

摘 要 针对第 39 届全国中学生物理竞赛复赛(延考)第四题, 先对四球系统进行受力分析, 根据动力学和运动学得到 9 个(非线性微分)方程, 得到两个第一积分(守恒量)。再通过数值模拟给出解答, 发现当初始角速度不大时, 原参考解答是很好的近似。最后还进一步研究了近似解, 得到泰勒展开中精确到 t^5 的结果。整个分析过程为处理力学问题提供了一个参考案例。

关键词 刚体动力学; 非线性; 第一积分; 无量纲化; 泰勒展开

FOUR-BALL PROBLEM IN A SMOOTH CYLINDER

—REFLECTIONS ON QUESTION 4 OF THE 39TH SECONDARY SCHOOL STUDENTS' PHYSICS COMPETITION REMATCH (EXTENDED EXAMINATION)

WU Xun¹ JIANG Fujin² HE Bin³ HUANG Yibin⁴⁽¹⁾ Poyang Middle School, Shangrao, Jiangxi 333100; ⁽²⁾ Huangpi First Middle School, Wuhan, Hubei 430300;⁽³⁾ Wanzai Middle School, Yichun, Jiangxi 336000; ⁽⁴⁾ Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi 330022)

Abstract For the fourth problem of the 39th National Secondary School Physics Competition Repechage (Extended Examination), the force analysis of the four-ball system is first performed to obtain nine (non-linear differential) equations based on dynamics and kinematics to obtain two first integrals (conserved quantities). The solution is then given by numerical simulation. It is found that the original reference solution is a good approximation when the initial angular velocity is not large. Finally, the approximate solution is further investigated to obtain results accurate to t^5 in the Taylor expansion. The whole analysis provides a reference case for dealing with mechanics problems.

Key words rigid body dynamics; non-linearity; first integral; dimensionless expansion; Taylor expansion

收稿日期: 2022-12-07

基金项目: 本文系 2021 年武汉市教育科学规划重点课题《基于新课程标准的高中情境化命题实践研究》阶段性成果之一, 课题编号: 2021A051。

作者简介: 吴洵, 男, 中学高级教师, 15279370339@126.com; 姜付锦, 男, 中学高级教师, 2917542082@qq.com; 何彬, 男, 中学高级教师, 118122757@qq.com; 黄亦斌, 男, 副教授, huangyb31@aliyun.com。

引文格式: 吴洵, 姜付锦, 何彬, 等. 光滑圆筒中的四球问题——对 39 届中学生物理竞赛复赛(延考)第四题的思考[J]. 物理与工程, 2023, 33(5): 114-118.

Cite this article: WU X, JIANG F J, HE B, et al. Four-ball problem in a smooth cylinder—Reflections on question 4 of the 39th secondary school students' physics competition rematch (extended examination)[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(5): 114-118. (in Chinese)

1 题目

近期,第39届全国中学生物理竞赛复赛(延考卷)中的第四题引发了大家的热议,本文就此给出理论上的分析。题目如下:

如图1(a)、(b)所示,半径为 R 、质量均为 m 的均匀实心球体 A 、 B 、 C 两两相切地放置在光滑水平面上。三个球体的外侧有一光滑固定圆筒,其内表面与 A 、 B 、 C 外切。初始时刻, A 、 B 、 C 静止,一绕圆筒竖直中心轴转动的均匀球体 D 轻放于球体 A 、 B 、 C 正上方。已知 D 的质量也为 m 、半径也为 R , D 的初始角速度大小为 Ω_0 , D 与 A 、 B 、 C 之间的动摩擦因数为 μ , A 、 B 、 C 三个球体之间无摩擦。经历一段时间后,整个体系达到 D 相对于 A 、 B 、 C 没有滑动的稳定状态。重力加速度大小为 g 。求:

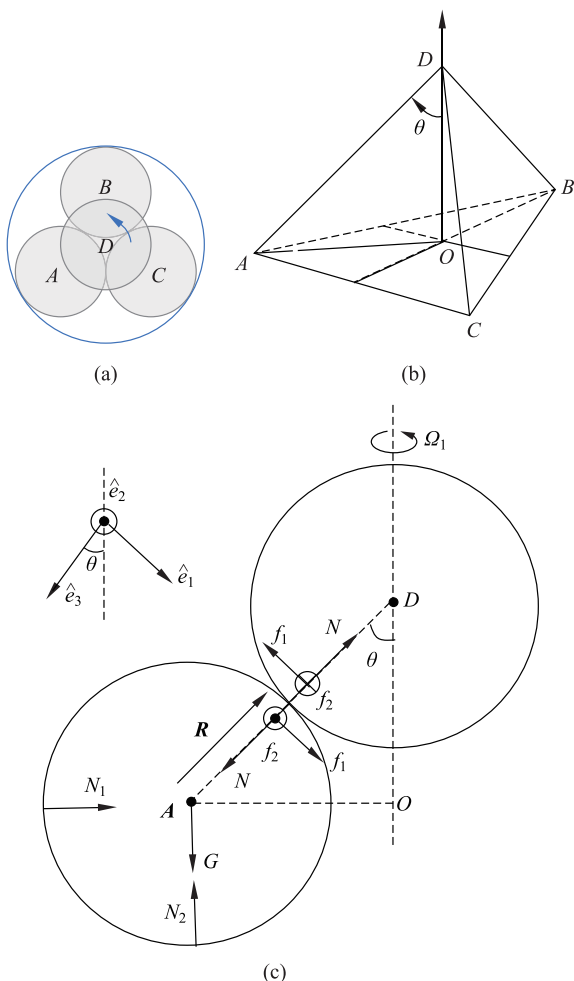


图1 圆筒与四球

(a) 圆筒与四球; (b) 四个球心的立体图; (c) 受力分析与旋转标架

(1) 体系从初始状态到达稳定状态所需时间,以及稳定状态时,球体 A 、 D 的角速度大小。

(2) 达到稳定状态时, A 、 C 两球切点的相对速度大小与 A 球质心速度大小之比。

2 理论分析

首先,四球心构成正四面体的四个顶点, $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$ 。球 D 绕竖直轴旋转,角速度为 Ω 。平面 OAD 也绕竖直轴旋转,角速度要小些,为 Ω_1 。设 A 球球心速度为 v_C ,则

$$\Omega_1 = \frac{v_C}{2R\sin\theta} \quad (1)$$

A 球的受力都发生在竖直面 OAD 内(见图1(c))。(设球 A 、 B 和 C 无相互挤压。若有,只是改变 N_1 的大小而已。)故建立如图所示的右手正交标架 $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$,用以分解各矢量式,其中 $\hat{e}_2$ 垂直纸面向外。注意它以角速度 Ω_1 旋转。滑动摩擦力并非只有 $\hat{e}_2$ 分量,因为球 A 的角速度很复杂,有自转,也有公转(或进动),导致两球接触点的相对速度相当任意,故还设了 f_1 。注意图中的点和叉表示穿出和穿入纸面。

对上球 D 列平动和转动方程

$$mg = 3N\cos\theta + 3f_1\sin\theta \quad (2)$$

$$-3f_2R\sin\theta = I\frac{d\Omega}{dt} \quad (3)$$

其中, $I = 2mR^2/5$ 。 A 球的平动方程中,竖直分量为

$$N_2 - mg - N\cos\theta - f_1\sin\theta = 0$$

它跟式(2)联立即得 $N_2 = 4mg/3$ 。径向分量为

$$f_1\cos\theta - N\sin\theta + N_1 = m\frac{v_C^2}{2R\sin\theta}$$

其作用是当其他尘埃落定后可由此解出 N_1 。切向分量为

$$f_2 = m\frac{dv_C}{dt} \quad (4)$$

A 球的转动方程(对质心的角动量定理)为

$$\mathbf{R} \times \mathbf{f} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

其中 $\mathbf{R}$ 见图1(c)(由质心指向接触点), $\boldsymbol{\omega}$ 为球 A 的对地角速度。将 $\boldsymbol{\omega}$ 分解为 $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$,注意标架 $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_1\hat{e}_2$ 旋转,有^[1]

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\omega} \\ &= \hat{e}_1(\dot{\omega}_1 + \Omega_1 \omega_2 \cos\theta) + \\ &\quad \hat{e}_2(\dot{\omega}_2 - \Omega_1 \omega_1 \cos\theta + \Omega_1 \omega_3 \sin\theta) + \\ &\quad \hat{e}_3(\dot{\omega}_3 - \Omega_1 \omega_2 \sin\theta)\end{aligned}$$

关于标架的旋转,早在极坐标系中就碰到过:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\hat{e}_r, \quad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{e}_r + \dot{\theta}\hat{e}_z \times r\hat{e}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \\ \mathbf{a} &= \ddot{r}\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\hat{e}_z \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \\ &= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

其中的标架 $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ 正是以角速度 $\dot{\theta}\hat{e}_z$ 绕 z 轴旋转。此处的情形完全类似。于是, A 球转动方程的三个分量为

$$Rf_2 = I(\dot{\omega}_1 + \Omega_1 \omega_2 \cos\theta) \quad (5)$$

$$-Rf_1 = I(\dot{\omega}_2 - \Omega_1 \omega_1 \cos\theta + \Omega_1 \omega_3 \sin\theta) \quad (6)$$

$$0 = I(\dot{\omega}_3 - \Omega_1 \omega_2 \sin\theta) \quad (7)$$

方程(5)~方程(7)类似于欧拉动力学方程^[2]。但与之不同的是,欧拉动力学方程直接将转动标架固连于刚体,与惯量主轴重合,目的是让各转动惯量成为常数。但实际应用中,如果刚体有较好的对称性,转动标架无需完全跟上刚体的转动(二者之间有相对转动),只要适当设置仍可实现转动惯量常数化的目的。在本文的问题中,对称性是最高球对称性,但仍使用转动标架,这是出于其他因素的考虑。

还有另外一些因素要考虑。滑动摩擦力必须跟两接触处的相对速度方向相反。A 球上的接触点速度为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \\ &= v_C \hat{e}_2 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \times (-R \hat{e}_3) \\ &= -\omega_2 R \hat{e}_1 + (v_C + \omega_1 R) \hat{e}_2\end{aligned}$$

而 D 球接触点的速度为 $R\Omega \sin\theta \hat{e}_2$,故前者与后者的差为

$$-\omega_2 R \hat{e}_1 + (v_C + \omega_1 R - R\Omega \sin\theta) \hat{e}_2$$

A 球受的滑动摩擦力 $\mathbf{f} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2$ 必须与之方向相反,故必有分量对应成比例:

$$\frac{f_1}{\omega_2 R} = \frac{f_2}{R\Omega \sin\theta - v_C - \omega_1 R} \quad (8)$$

另有

$$f_1^2 + f_2^2 = \mu^2 N^2 \quad (9)$$

当速度差变为零时,摩擦力变为静摩擦力。

上述九个(微分)方程,涉及九个未知(函)数:

$\Omega, \Omega_1, v_C, f_1, f_2, N, \omega_1, \omega_2, \omega_3$,可解。但这是非线性方程组,一般无解析解,需数值求解。该题所附的参考解答中默认

$$\omega_2 = \omega_3 = 0, \quad f_1 = 0 \quad (10)$$

即角速度只有 $\omega_1 \hat{e}_1$ 分量,而摩擦力只有 $f_2 \hat{e}_2$ 分量。如果是这样,那么式(6)就无法成立。该题所要求解的整个过程的时间,也难有解析表达式。

虽然方程组复杂,我们仍可以得到两个第一积分。由式(3)(5)和(7)消去 f_2 和 $\Omega_1 \omega_2$,并考虑初始条件,得

$$\Omega + 3\omega_1 \sin\theta + 3\omega_3 \cos\theta = \Omega_0 \quad (11)$$

由式(3)(4)消去 f_2 ,得

$$\Omega + \frac{15v_C \sin\theta}{2R} = \Omega_0 \quad (12)$$

式(12) $\times 2$ - 式(11),得

$$\Omega - 3\omega_1 \sin\theta - 3\omega_3 \cos\theta + \frac{15v_C \sin\theta}{R} = \Omega_0$$

该式其实就是系统对 z 轴的角动量守恒。求解时,可以用上述两式替换微分方程(3)和(5)。

关于(趋于)末态的情况,取四个代数方程(1)(2)(8)(9)和两个第一积分(11)(12),以及仅末态满足的相对速度为零条件

$$\omega_2 R = v_C + \omega_1 R - R\Omega \sin\theta = 0 \quad (13)$$

由此八个方程,可以得到

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 - \frac{5\sqrt{3}v_C}{2R}, \quad \Omega_1 = \frac{\sqrt{3}v_C}{2R} \\ \omega_1 &= \frac{\Omega_0}{\sqrt{3}} - \frac{7v_C}{2R}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{\Omega_0}{\sqrt{6}} + \frac{3\sqrt{2}v_C}{R} \\ f_1 &= \frac{\mu mg}{\sqrt{3}(\mu + \sqrt{2})}, \quad f_2 = 0, \quad N = \frac{mg}{\sqrt{3}(\mu + \sqrt{2})}\end{aligned} \quad (14)$$

其中,已代入了 θ 的值。末态的 v_C 并非任意,而是要通过前面的(微分)方程组得到。

3 数值计算

首先进行无量纲化:力以 mg 为单位,时间以 $\sqrt{R/g}$ 为单位,速度以 $\sqrt{gR}$ 为单位,角速度以 $\sqrt{g/R}$ 为单位,将式(1)~式(9)中的所有量(包括导数中的时间)替换为同一字母乘以各自的单位。化简后所得的方程组等效于令 $m = g = R = 1$,其中所有的量都是纯数。初始条件为

$$v_c(0) = \omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0, \Omega(0) = \Omega_0 \quad (15)$$

系统的可调参数为 μ 和 Ω_0 。此过程结束的判据是相对速度为零,可写为

$$\omega_2^2 + (v_c + \omega_1 - \Omega \sin \theta)^2 = 0$$

使用 Mathematica 软件编程,考虑 $\mu=1$,而 Ω_0 取各种值,作图 2 如下:

数值计算结果表明,当 Ω_0 较小时, ω_2, ω_3, f_1 几乎为零,只在过程快结束前才发生变化。 μ 的值对具体图像有影响,但不改变基本结论。故而,此题参考解答所默认的前提(10)是有一定根据的。 Ω_0 变大时,事情变得复杂;再大时,出现了有趣的震荡现象(限于篇幅这里暂不作研究),且 ω_2 在正负数之间震荡。因此,如果只用 $\omega_2=0$ 作为

末态判据是不妥的。

4 近似解

将九个方程分为两组,即四个代数方程(1)(2)(8)(9)和五个一阶微分方程(3)~(7)。将九个物理量在 $t=0$ 处作泰勒展开,并代入各方程中,比较各阶系数。例如,仅代数方程精确到零阶,并考虑初始条件(15),得

$$\Omega_1(0) = f_1(0) = 0, f_2(0) = \frac{\mu}{\sqrt{6}}, N(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

其中已代入了 θ 的值。注意现在各量皆为无量纲的纯数。此处的四个值和初始条件(15)的五个值,正好给出九个函数的初值。如果代数方程精

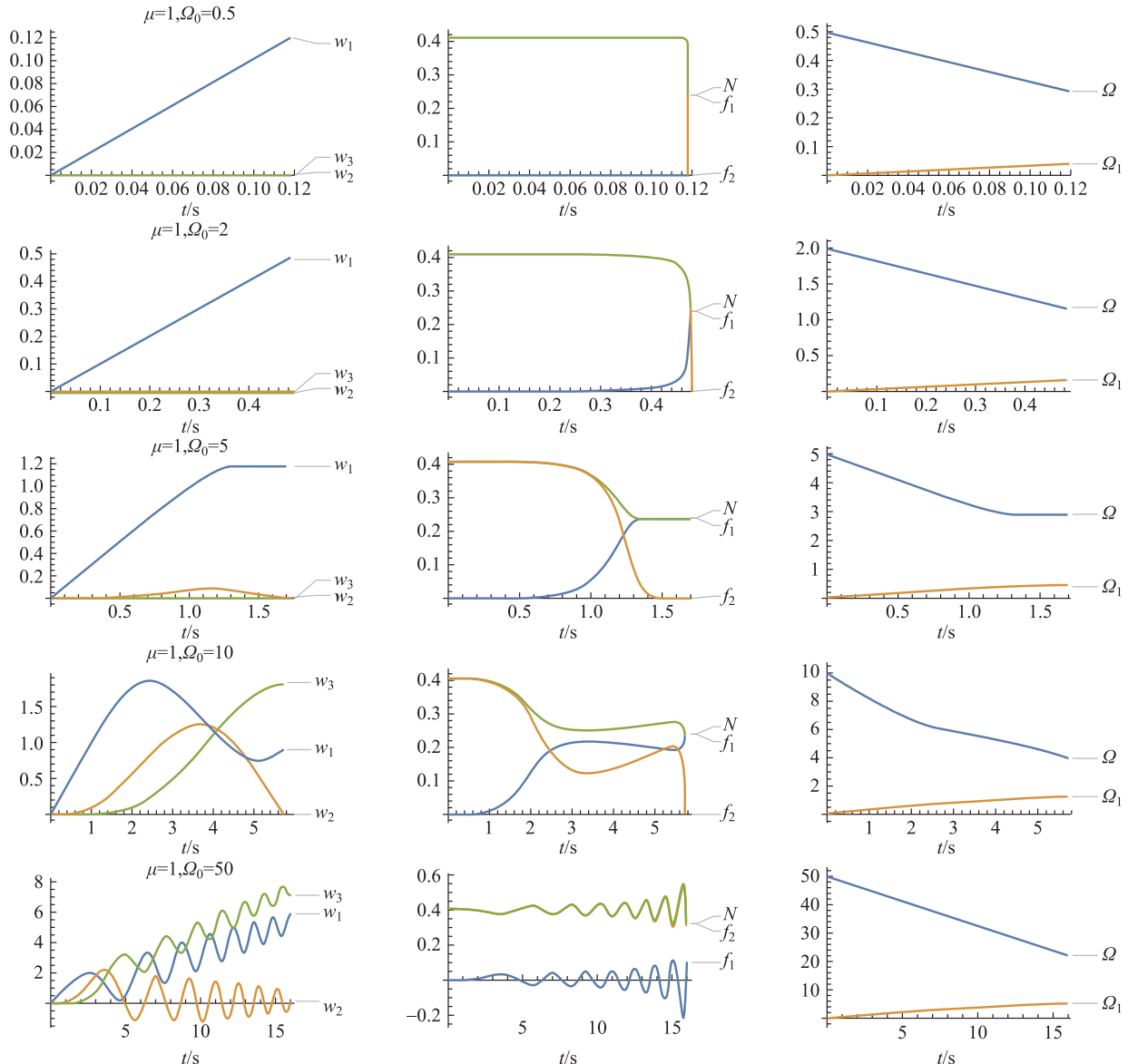


图2 $\mu=1$,而 Ω_0 取各种值时各量的变化图像

确到一阶,微分方程精确到零阶,则得到

$$\Omega'(0) = -\frac{5\mu}{2\sqrt{2}}, v'_c(0) = \frac{\mu}{\sqrt{6}}, \Omega'_1(0) = \frac{\mu}{2\sqrt{2}},$$

$$\omega'_1(0) = \frac{5\mu}{2\sqrt{6}}, \omega'_2(0) = \omega'_3(0) = 0,$$

$$f'_1(0) = f'_2(0) = N'(0) = 0$$

如此一直往下,可以精确到任意阶。例如,代数方程精确到五阶(微分方程要少一阶)时,可得到各量精确到五阶的结果(此时 ω_3 第一次非零):

$$v_c = \frac{\mu t}{\sqrt{6}} - \frac{5\mu^4 t^4}{288\sqrt{2}\Omega_0} - \frac{43\mu^5 t^5}{1152\Omega_0^2}$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{5\sqrt{3}}{2}v_c, \quad \Omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_c$$

$$\omega_1 = \frac{5\mu t}{2\sqrt{6}} - \frac{25\mu^4 t^4}{576\sqrt{2}\Omega_0} - \left(\frac{\mu^3}{72\sqrt{6}} + \frac{215\mu^5}{2304\Omega_0^2}\right)t^5$$

$$\omega_2 = \frac{5\mu^2 t^3}{36\sqrt{2}} - \frac{25\mu^3 t^4}{576\Omega_0} - \frac{215\mu^4 t^5}{1152\sqrt{2}\Omega_0^2}, \quad \omega_3 = \frac{\mu^3 t^5}{144\sqrt{3}}$$

$$f_1 = \frac{5\mu^3 t^3}{72\Omega_0} + \frac{215\mu^4 t^4}{576\sqrt{2}\Omega_0^2} + \frac{2365\mu^5 t^5}{2304\Omega_0^3}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}}, \quad f_2 = \mu N \quad (16)$$

值得注意的是:上述表达式中,似乎正好有 $f_2 = \mu N$,那么由式(9)似乎 $f_1 = 0$,但这只是精度不够导致的。注意 f_1 的最低阶是三次,故若式(9)精确到五阶,确实看不到 f_1 的贡献。前面还谈到,若认定式(10),则式(6)不成立,但其实其中仅剩的 $\Omega_1\omega_1$ 是高阶小量,精确到低阶的话,确实是零。

上述表达式(16)的有效范围可以这样判断。注意到 ω_1 的近似表达式约在 $2\Omega_0^{1/3}/\mu$ 处出现最

大值,此处可认为已偏离较大。故上述近似表达式的有效范围是 $t \ll 2\Omega_0^{1/3}/\mu$ 。

相同的泰勒展开思路可用于考查接近末态时的情况。此时可重新令末态时刻为0,然后做时间反演,让方程中各时间导数反号,而且最好用上两个第一积分(11)(12)。但由于末态(14)中 v_c 的表达式难以得到,再往高阶走表达式会更复杂,故此处从略。

5 结语

对于一般的刚体运动(非平面运动),通常会用到欧拉动力学方程或类似方程。这是非线性微分方程,通常难有解析解。此文中的四球问题就是如此。本文以此理论分析为基础,结合数值模拟和近似思想,让这个结果可视化,为今后此类问题的解决提供一条行之有效的思路。通过分析不难发现,原题所给出的参考解答只在 Ω_0 特别小时才与真实情况(数值模拟)比较吻合,但是当初始角速度较大时,出入就比较大了,故原题中最好加上 Ω_0 特别小,才能让原题的参考答案更加科学。

参 考 文 献

- [1] 陈余华,黄亦斌. 一般非惯性系中的刚体动力学[J]. 物理通报, 2018, 37(6): 17-19.
CHEN Y H, HUANG Y B. Rigid body dynamics in general non-inertial reference system [J]. Physics Bulletin, 2018, 37(6): 17-19. (in Chinese)
- [2] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2009: 155.
- [3] 江萍, 杨华军, 蔡杨伟男, 等. 研究生光学仿真实践教学与科学探索能力培养[J]. 大学物理, 2021, 40(8): 50-56.
JIANG P, YANG H J, CAIYANG W N, et al. Teaching practice of optical simulation and ability cultivation of scientific exploration for postgraduates [J]. College Physics, 2021, 40(8): 50-56. (in Chinese)
- [4] KONG M M, GAO Z S, LI X H, et al. A generic eye model by reverse building based on Chinese population[J]. Optics Express, 2009, 17(16): 13283-13297.
- [5] 纪录片典藏. CCTV9 纪录片《天眼》[EB/OL]. https://www.bilibili.com/video/BV1cN4y1F7Mh/?spm_id_from=autoNext, 2022. 9.
- [6] 沈常宇, 李晨霞, 沈为民. 光学原理课程中“望远镜”课堂教学设计[J]. 大学物理, 2020, 39(10): 72-75.
- [7] SHEN C Y, LI C X, SHEN W M. Teaching design of telescope in the course of principles of optics[J]. College Physics, 2020, 39(10): 72-75. (in Chinese)
- [8] 新华社. “中国天眼”发现迄今宇宙最大原子气体结构 尺度比银河系大 20 倍[EB/OL]. http://www.news.cn/tech/2022-10/20/c_1129071721.htm, 2022. 10.
- [9] CHEN T, SUN J Y, DING T X, et al. Flexible wire electrode driving focus-tunable electrowetting optofluidic lens [J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2022, 34(10): 537-540.
- [10] HUANG Y Y, ZHAO R, MIAO W H, et al. A bifocal compound liquid lens with continuous zoom based on selective wettability[J]. Optics Letters, 2022, (47): 3824-3827.