

非线性动力学在磁约束核聚变约束模式转换中的应用

艾媛媛¹ 朱 浩^{1,2}

(北京工业大学¹理学部;²北京-都柏林国际学院,北京 100124)

摘 要 非线性动力学在诸如双摆和振荡电路等本科物理教学中扮演着积极的角色。雅可比矩阵作为非线性动力学中的重要概念,常被用来分析不动点的性质。本文中我们先推导了一个二维系统中雅可比矩阵的具体形式,并将其应用到磁约束核聚变约束模式转换模型,最后延伸求解出 ZCD 模型中各不动点的雅可比矩阵本征值。我们随后调整了模型中的外界加热功率,并使用雅可比矩阵观察模型中非线性动力学性质的变化。经研究发现,外界加热功率的改变会使得 ZCD 模型极限环的大小发生变化,即功率越大极限环半径越大。极限环半径的扩大导致环与鞍点相交为一个同宿轨,诱使系统产生同宿分岔。

关键词 非线性动力学;雅可比矩阵;约束模式转换模型;同宿分岔

APPLICATION OF NONLINEAR DYNAMICS TO L-H MODE TRANSITION IN MAGNETIC CONFINEMENT FUSION

AI Yuanyuan¹ ZHU Hao^{1,2}

(¹ Faculty of Science; ² Beijing-Dublin International College, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract Nonlinear dynamics plays an active role in university physics such as double pendulum and resonant circuit. As an important concept in nonlinear dynamics, Jacobian matrix is often adopted to analyze the properties of fixed points. In this paper, we derive the specific form of the Jacobian matrix in a classic two-dimensional system, and apply it to the L-H mode transition model of magnetic confinement fusion, then solve the eigenvalues of the Jacobian matrix at each fixed point in the ZCD model. We adjust the external heating power in the model and analyze the nonlinear dynamic properties of the model by the Jacobian matrix. It is found that the variance of external heating power changes the size of limit cycle in ZCD model; and the higher the power is, the larger the limit cycle will be. The expansion of the limit cycle radius leads itself to intersect with the saddle point into a homologous orbit, which induces the system to occur homoclinic bifurcation.

Key words nonlinear dynamics; Jacobian matrix; L-H mode transition; homoclinic bifurcation

收稿日期: 2023-03-25

基金项目: 北京市自然科学基金资助项目(1194020, 2232045)、北京市教委科技计划一般项目(KM201910005001)、国家重点研发计划(2018YFB0703500)。

通讯作者: 朱浩,男,讲师,主要从事理论物理的研究工作,研究方向为等离子体物理与核聚变, hao.zhu@bjut.edu.cn。

引文格式: 艾媛媛,朱浩. 非线性动力学在磁约束核聚变约束模式转换中的应用[J]. 物理与工程, 2023, 33(5): 95-101, 107.

Cite this article: AI Y Y, ZHU H. Application of nonlinear dynamics to L-H mode transition in magnetic confinement fusion[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(5): 95-101, 107. (in Chinese)

非线性动力学(nonlinear dynamics)是研究系统中各种运动状态的定量和定性规律的科学^[1-5]。非线性动力学系统是由一个或一组非线性微分方程描述的随时间变化的系统。若想要预测一个系统的运动轨迹,我们首先需要给出它在微小时间尺度里的性质并列动力学方程^[6]。

人们对非线性问题的认识始于 17 世纪。1673 年惠更斯发现了非线性现象^[7]。在 1687 年牛顿发现了运动定律和万有引力之后,数学家和物理学家开始尝试将其推广到三体问题,但是并没有取得成功。直到 19 世纪末,法国科学家庞加莱创立了微分方程的定性理论,为非线性动力学的发展奠定了基础^[8]。他首次发现了系统的混沌行为,混沌是一种确定性系统(deterministic system)展示出敏感依赖于初始条件的非周期行为。1963 年洛伦兹在研究大气对流模型时,发现了系统蝴蝶形状的运动轨迹,这标志着混沌理论的诞生^[9]。混沌理论广泛应用于各个领域,科学家们也因此发展了很多数学方法,在这个过程中 Duffing 方程、Van der Pol 方程、Mathieu 方程等著名的数学模型相继被建立,它们至今仍被人们用来研究非线性系统动力学现象的本质特征^[10]。从 20 世纪 60—70 年代开始,非线性动力学理论成为一门重要的前沿学科,分岔和混沌的研究随之成为新的研究热点。非线性动力学的思想与方法已被应用到很多的新领域,比如系统生物学、经典力学和社会物理学等。

非线性方程的求解方法相较线性方程更加困难。定性方法和定量方法是研究非线性动力学的两条路径,二者缺一不可。定量方法又分为解析法和数值法。通常情况下,我们很难得到非线性方程的解析解,所以只能求解确定参数时的数值解。定性方法是运用几何的思维方式,从非线性微分方程入手,利用相图(phase plot)来描述微分方程。在相图中,我们可以研究不动点的稳定性,并预测系统随时间演化的行为。在分析具体问题时,定量地去度量稳定性是很有必要的。这需要我们在方程的不动点附近,将非线性方程线性化。在一维向量场中的不动点处,图像的斜率决定了不动点的稳定性。对于多元系统,则需要求解其雅可比矩阵来分析不动点的稳定性。据笔者了解,同时采用定性和定量分析方法研究具体多元系统非线性动力学性质的中文论文并不多。所以

本文通过分析磁约束核聚变模式转换中的 ZCD 模型,来做一个教学式的推导以期回顾教学并延伸到科研。本文框架如下:

(1) 推导二维非线性动力学系统雅可比矩阵的具体形式。

(2) 简单介绍磁约束核聚变装置托卡马克中的 L-H 约束模式转换模型。

(3) 通过调整 ZCD 模型中外界加热功率的参数,以实现核聚变约束模式的转换,并利用相图和雅可比矩阵分析和观察模型中各不动点非线性动力学性质的变化。

1 雅可比矩阵的具体形式

我们考虑一个经典的二维非线性系统

$$\frac{dm}{dt} = f(m, n) \quad (1)$$

$$\frac{dn}{dt} = g(m, n) \quad (2)$$

在相平面上同时满足 $f(m_0, n_0) = 0, g(m_0, n_0) = 0$ 的点 (m_0, n_0) 被称为不动点(fixed point)。我们只要计算出不动点邻域内的轨迹分布及其趋于稳定不动点的衰减率,就可以判断其稳定性。为此我们设 $u(t) = m - m_0, v(t) = n - n_0$ 为不动点附近的微扰,并将其利用泰勒展开可得到微分方程

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{m} \\ &= f(m_0 + u, n_0 + v) \\ &= f(m_0, n_0) + \frac{\partial f}{\partial m}u + \frac{\partial f}{\partial n}v + O(u^2, v^2, uv) \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $O(u^2, v^2, uv)$ 为 u^2, v^2, uv 的二阶小量。

因为 $f(m_0, n_0) = 0$, 所以

$$\dot{u} = \frac{\partial f}{\partial m}u + \frac{\partial f}{\partial n}v + O(u^2, v^2, uv) \quad (4)$$

同理可得

$$\dot{v} = \frac{\partial g}{\partial m}u + \frac{\partial g}{\partial n}v + O(u^2, v^2, uv) \quad (5)$$

因此,对于小的扰动,我们可以得到如下的关系式

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial g}{\partial m} & \frac{\partial g}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2, v^2, uv) \quad (6)$$

其中,矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial g}{\partial m} & \frac{\partial g}{\partial n} \end{pmatrix}_{(m_0, n_0)}$$

称为不动点处的雅可比矩阵。

由于 $O(u^2, v^2, uv)$ 为趋近于 0 的变量,所以我们得到如下的线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial g}{\partial m} & \frac{\partial g}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (7)$$

这样我们就可以通过求解雅可比矩阵的本征值和本征向量来判断不动点处的增长趋势,随之判断出不动点的稳定性及系统动力学轨迹的演化性质。

为了研究雅可比矩阵的性质,我们设 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) 为矩阵 J 的本征值, $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为本征向量,那么在任意初始条件下,我们可以将通解写为

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{a} + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{b} \quad (8)$$

其中,本征值在 e 的指数位置。若两个本征值都为负数,则解在两个本征向量方向上指数减少,不动点是稳定节点(stable node);若两个本征值都为正数,则解在两个本征向量方向上指数增长,不动点是不稳定节点;若本征值一个为正数,一个为负数,则不动点称为鞍点(saddle point),即当 $t \rightarrow \infty$ 时,轨迹趋近于不稳定流形,而当 $t \rightarrow -\infty$ 时,轨迹趋近于稳定流形。若本征值为复数,不动点或为中心(center)或为焦点(focus)。在本文所研究的 ZCD 模型中,雅可比矩阵有四个本征值。我们规定当三个本征值为负数,一个为正数时,称为一类鞍点;两个本征值为负数,两个为正数时,称为二类鞍点。对于其中存在某一个本征值为正数和负数的不动点,我们称其在对应的本征向量方向上表现为源和汇的性质。

2 磁约束核聚变 L-H 转换模型

核聚变是两个轻原子核结合组成一个较重原子核的过程,而其中的 L-H 约束模式转换则是受控核聚变中一个重要的研究分支^[11]。实现核聚变反应需要达到 2 亿摄氏度的高温,在高温下物质表现为等离子体态,等离子体在高温下剧烈运

动,所以这对聚变反应堆的设计有着极高的要求。科学家们因此构建了多种约束等离子体的装置,其中利用磁场来约束等离子体的托卡马克装置是最为有效的。托卡马克装置的反应原理为氢元素的同位素氘(${}^2_1\text{H}$ 或 D)与氚(${}^3_1\text{H}$ 或 T)聚合反应生成氦(${}^4_2\text{He}$)。实现核聚变反应需要满足劳森判据(Lawson Criterion) $nT_e\tau_E > 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ sKeV}$, 其中 n 为等离子体密度, T_e 为等离子体温度, τ_E 为能量约束时间。虽然根据爱因斯坦质能方程计算,很少的反应物便可以释放大量的能量,但是目前在实验上等离子体的约束时间是非常短的,所以人工受控核聚变的实现需要更高的约束水平和更长的约束时间。

托卡马克装置是由两个主要磁场合成一个螺旋磁场,使等离子体绕磁力线做拉莫尔回旋运动。其中,一个磁场是由缠绕在圆环形真空室外面的铜线圈产生的环向磁场,另一个是由等离子体中的带电粒子电流产生的极向磁场,如图 1 所示。在非均匀磁场下等离子体会发生漂移^[13],等离子体之间的相互作用会产生能量输运过程。由等离子体湍流引起的输运过程称为反常输运。等离子体边缘湍流较强使得温度梯度较弱,会损失大量能量,这导致托卡马克处在一个较低的约束水平,即低约束模式(L 模式)。在 1982 年,ASDEX 托卡马克装置加热期间能量约束问题得到了大幅改善。Wagner 等人发现在 L 模的基础上通过提高加热功率,并达到一定的阈值之后会实现 L-H 模式转换, H 模式为高约束模式^[14]。H 模式的边缘区域由于密度和温度突然增长而出现边缘输运垒,整体约束水平得到极大的提升。因此 H 模式是未来反应堆的理想约束模式。

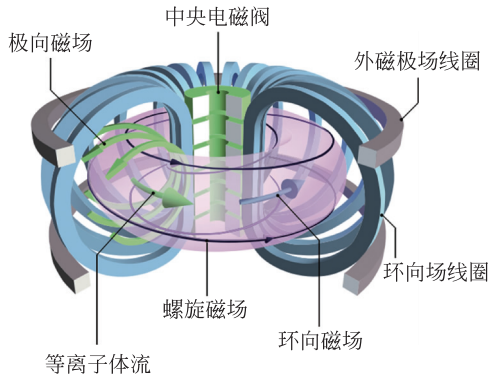
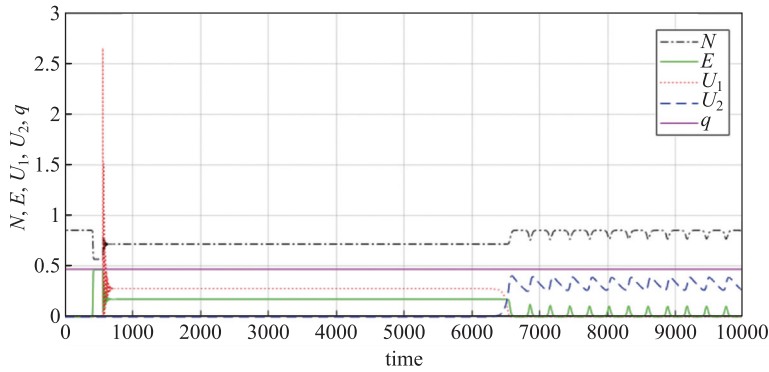


图 1 托卡马克装置示意图^[12]

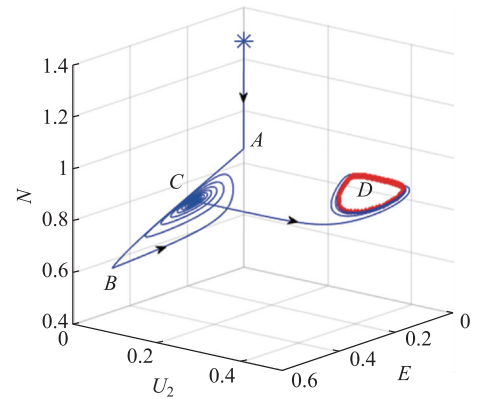
L-H 模式的转换是由 $E \times B$ 剪切流对等离子体湍流的抑制产生的^[15]。剪切流包含有平均流、带状流以及湍流和压强非线性耦合后产生的测地声模,其对于湍流的抑制作用是研究的重点。Kim 和 Diamond 在 2003 年建立了包含等离子体湍流、平均流、带状流和压力梯度四个变量的零维模型,研究发现通过缓慢增加输入功率改变压力梯度可以很好地抑制湍流,使系统从 L 模通过振荡行为演化到静止的 H 模。带状流的主要作用是抑制湍流,而平均流会导致振荡的持续时间变长。振荡行为是由于带状流和湍流之间的相互竞争,这符合非线性动力学中经典的猎物-捕食者种群竞争模型。在 2009 年, Malkov 和 Diamond^[16]构建了包含等离子体湍流、带状流和温度梯度的模型,其中外界加热功率 q 被包含在温度梯度的表达式中,并作为控制参数会激发系统的四种状态,分别为 L 模式、T 模式、H 模式、QH 模式。当 q 超过一定阈值时, T 模式会经历 Hopf 分岔,由焦点变为稳定的极限环。2013 年 Zhu^[5]等人将方程拓展为四变量模型,即 ZCD 模型。在 MD 模型的基础上,引入了第二种非线性结构,即测地声模 GAM,用 U_2 表示,见公式(12)。因此,方程变为两个捕食者,一个猎物的模型。带状流 U_1 和测地声模 U_2 都会抑制湍流 E 的增长,使系统达到高约束模式。

ZCD 模型方程为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (N - N^4 - E - U_1 - U_2)E \\ &\equiv f(E, U_1, U_2, N) \end{aligned} \quad (9)$$



(a)



(b)

图2 图中参数为 $q=0.47, \nu_1=19, \nu_2=0.01\nu_1, \eta_1=0.12, \eta_2=0.1\eta_1, \rho=0.55, \sigma=0.6, \zeta=1.7$ 。图中星号为初始状态,菱形为末态, A、B、C、D 为四个不动点。轨迹由星号开始依次经过 A 点、B 点,然后在 (E, N) 平面上向内螺旋至 C 点并停留很长一段时间,直到 $t=6500$ 能量从 U_1 向 U_2 转换, U_2 的增长使轨迹离开 (E, N) 平面,最后稳定在极限环状态

(a) 等离子体湍流 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 和外界加热功率 q 随时间的演化图像; (b) (E, U_2, N) 相图

$$\frac{dU_1}{dt} = \nu_1 \left(\frac{E}{1 + \zeta N^4} - \eta_1 \right) U_1 \equiv g_1(E, U_1, N) \quad (10)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \nu_2 \left(\frac{E}{1 + \zeta N^4} - \eta_2 \right) U_2 \equiv g_2(E, U_2, N) \quad (11)$$

$$\frac{dN}{dt} = q(t) - (\rho + \sigma E)N \equiv h(E, N) \quad (12)$$

这是一个四变量耦合的非线性微分方程组,该模型中四个变量分别为等离子体湍流强度 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 和测地声模 U_2 ,外界加热功率 q 为控制因子。我们通过前述的方法,可以将系统线性化得到对应的雅可比矩阵 J 。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial E} & \frac{\partial f}{\partial U_1} & \frac{\partial f}{\partial U_2} & \frac{\partial f}{\partial N} \\ \frac{\partial g_1}{\partial E} & \frac{\partial g_1}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial E} & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial U_2} & \frac{\partial g_2}{\partial N} \\ \frac{\partial h}{\partial E} & 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial N} \end{pmatrix}$$

3 外界加热功率引起的同宿分岔

本节我们通过改变外界加热功率 q ,用非线性动力学的方法对 ZCD 模型中极限环的性质做进一步研究。图 2~图 6 为 q 值不同时温度梯度 N 、等离子体湍流强度 E 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 以及加热功率 q 随时间变化的图像(左侧)和系统

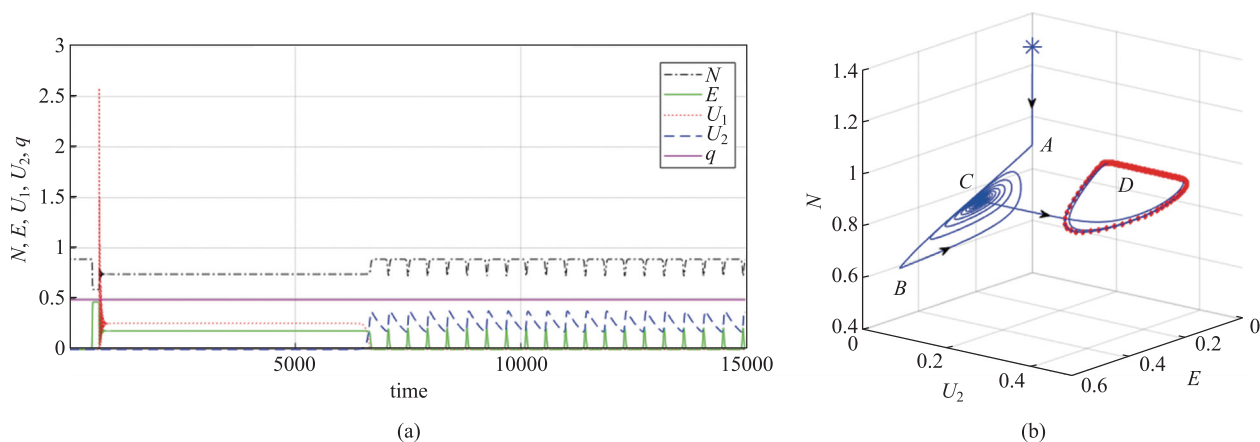


图3 图中参数为 $q=0.49, \nu_1=19, \nu_2=0.01\nu_1, \eta_1=0.12, \eta_2=0.1\eta_1, \rho=0.55, \sigma=0.6, \zeta=1.7$ 。与图2相比,图3的极限环周期延长并且半径增大, E 值在不为零时变化更快,菱形密度变的稀疏

(a) 等离子体湍流 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 和外界加热功率 q 随时间的演化图像; (b) (E, U_2, N) 相图

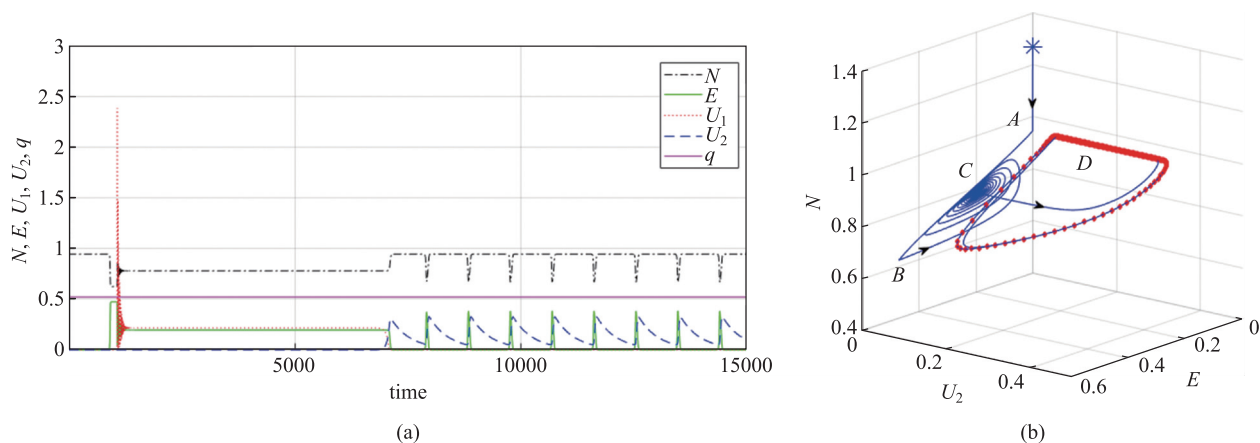


图4 图中参数为 $q=0.52, \nu_1=19, \nu_2=0.01\nu_1, \eta_1=0.12, \eta_2=0.1\eta_1, \rho=0.55, \sigma=0.6, \zeta=1.7$ 。图(a)中,极限环周期增大至 $T \approx 900$ 。极限环状态时,等离子体湍流 E 的增长使得 U_2 急剧增加,在湍流 E 被抑制后, U_2 缓慢地减少。轨迹的大部分时间停留在 (U_2, N) 平面,即 H 模式。在图(b)中可以观察到极限环距离鞍点 A 和鞍点 B 更近了

(a) 等离子体湍流 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 和外界加热功率 q 随时间的演化图像; (b) (E, U_2, N) 相图

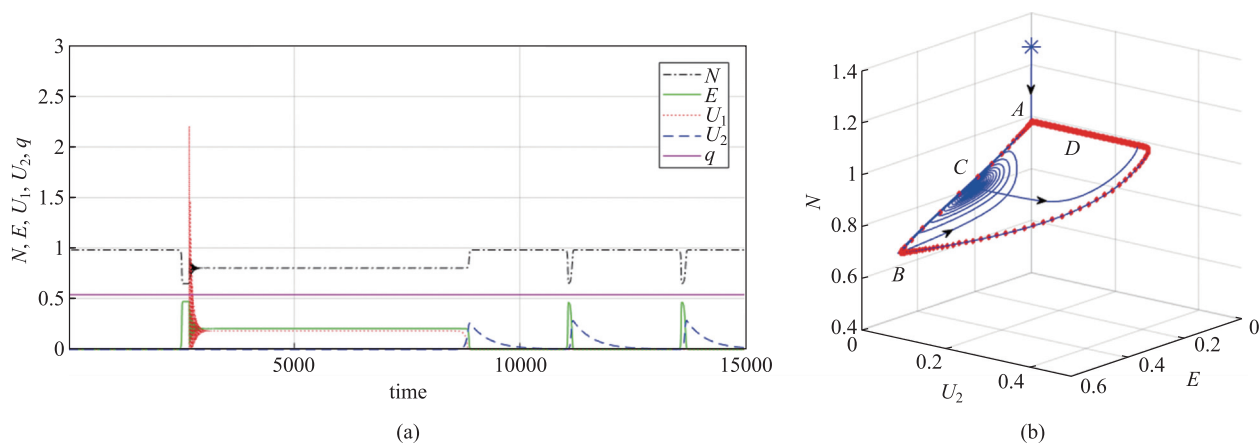


图5 图中参数为 $q=0.54, \nu_1=19, \nu_2=0.01\nu_1, \eta_1=0.12, \eta_2=0.1\eta_1, \rho=0.55, \sigma=0.6, \zeta=1.7$ 。图(a)中我们看到极限环的周期较图3和图4有明显增大,且 $T \approx 2500$ 。图(b)中菱形与鞍点 A 和鞍点 B 重合

(a) 等离子体湍流 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 和外界加热功率 q 随时间的演化图像; (b) (E, U_2, N) 相图

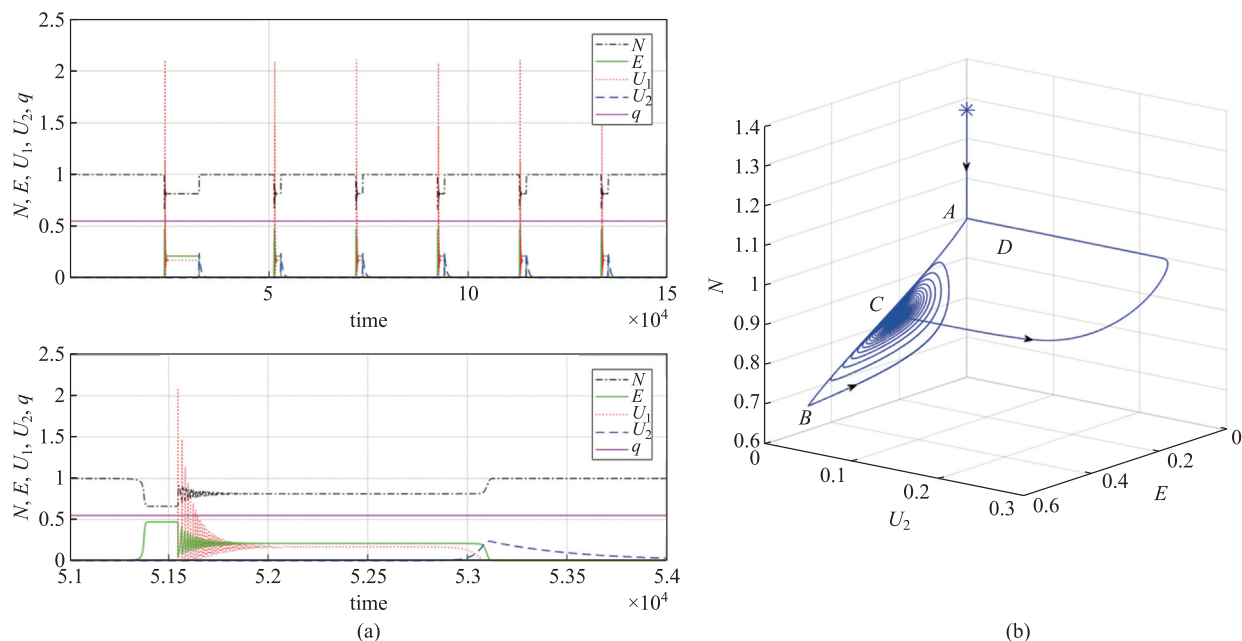


图6 图中参数为 $q=0.549, \nu_1=19, \nu_2=0.01\nu_1, \eta_1=0.12, \eta_2=0.1\eta_1, \rho=0.55, \sigma=0.6, \zeta=1.7$ 。与图2至图5不同,图6中带状流 U_1 的振荡不仅发生在L模式之前,而是存在于每个极限环周期内。通过(b)图可以看到,在 $t=5000$ 之后系统的运动轨迹完全与之前的振荡过渡阶段的轨迹重合

(a) 等离子体湍流 E 、温度梯度 N 、带状流 U_1 、测地声模 U_2 和外界加热功率 q 随时间的演化图像; (b) (E, U_2, N) 相图

在相空间 (E, U_2, N) 中的时间演化(右侧),其中箭头表征演化的方向。

图2中 q 值为0.47,其图像包括了四个阶段,分别为H模式、L模式、T模式和O模式。四个模式分别对应到相空间中我们求解的四个不动点A、B、C、D,在图1(b)中已标出。我们在图1(a)中观察到,在 $t=6500$ 附近带状流 U_1 逐渐消失, U_2 随之增长,湍流 E 被抑制,从而出现了一个非常稳定的极限环。在极限环状态下 U_1 为零, E 、 N 、 U_2 不为零。表1中显示不动点D(极限环)处本征值包含一对共轭复数,且实部为正数,轨迹螺旋运动至极限环。实际的实验中系统会通过极限环振荡模式达到H模,H模式为 N 更高的状态。为研究控制因子 q 对系统约束水平的影响,我们在图3~图6中改变了外界加热功率 q ,其值分别为 $q=0.49$ 、 $q=0.52$ 、 $q=0.54$ 和 $q=0.549$ 。

我们发现在图2至图5显示的变量随时间变化的图像(a)中,随着 q 值的增大,轨迹在第一个不动点A(H模)的持续时间明显增长, q 由0.47增至0.54时, t 由约400增至约2500。但是轨迹在B点(L模)和C点(T模)处的持续时间几乎不变,即H模对于 q 值的大小更为敏感。 q 值的

增大直接导致 N 值增大,这导致带状流 U_2 被抑制,在 (E, N) 平面中 U_2 的最大振幅减小,且振荡频率增加。除此之外,最明显的变化是极限环的周期和半径,它们更加依赖于外界加热功率 q 值的大小。具体表现为 q 值越大,极限环的周期越长,半径越大。极限环周期的延长使得系统处在H模的时间更长,即约束时间更长;极限环半径的增大导致轨迹向 (E, N) 平面和 (U_2, N) 平面靠近。

极限环周期的变化具体体现为, U_2 的振幅变化范围越来越大,最小值越来越趋近于0,湍流便不能被很好的抑制,在每个周期中湍流存在急速增长和急速下降的情况。在图5中,伴随着 U_2 和 E 之间的相互作用,极限环与鞍点A和鞍点B相重合,系统发生了同宿分岔。

通过数值计算,我们在表1中看到当 $q=0.54$ 时,雅可比矩阵的本征值反映不动点D是一个鞍点,而并非图5(b)中的极限环。在同宿分岔中,随着系统中参数变化,极限环与鞍点可以彼此越来越近直至相交。环与鞍点在相交后成为一个同宿轨道。在图2(b)至图5(b)相图中我们可以看到在 q 值在达到0.54之前,极限环由于周期延长越来越接近A、B这两个鞍点。当 q 值增加至0.54

表 1 图 2~图 6 中不动点处雅可比矩阵对应的本征值

	不动点	E	U_1	U_2	N	雅可比矩阵的本征值	不动点性质
图 2 $q=0.47$	A	0	0	0	0.8545	$-2.28; -0.55; -0.0023; 0.3213$	鞍点 I
	B	0.4638	0	0	0.5675	$5.2111; 0.0726; -0.6460 \pm 0.0963i$	焦点、源
	C	0.1742	0.2780	0	0.7181	$0.0205; -0.0360 \pm 0.8099i; -0.7567$	焦点、源和汇
	D	0.0219	0	0.3275	0.8346	$0.0019 \pm 0.0272i; -0.5888; -2.052$	极限环
图 3 $q=0.49$	A	0	0	0	0.8909	$-2.28; -0.55; -0.0023; 0.2609$	鞍点 I
	B	0.4687	0	0	0.5895	$5.1092; 0.0716; -0.5961; -0.7039$	鞍点 II
	C	0.1822	0.2559	0	0.7432	$0.0205; -0.0303 \pm 0.7767i; -0.7810$	焦点、源和汇
	D	0.0236	0	0.2759	0.8685	$0.0055 \pm 0.0243i; -0.5988; -2.052$	极限环
图 4 $q=0.52$	A	0	0	0	0.9455	$-2.28; -0.55; -0.0023; 0.1464$	鞍点 I
	B	0.4724	0	0	0.6239	$4.8567; 0.0691; -0.4869; -0.8189$	鞍点 II
	C	0.1953	0.2151	0	0.7794	$0.0205; -0.0202 \pm 0.7109i; -0.8220$	焦点、源和汇
	D	0.0265	0	0.1795	0.9188	$0.0127 \pm 0.0154i; -0.6179; -2.052$	极限环
图 5 $q=0.54$	A	0	0	0	0.9818	$-2.28; -0.55; -0.0023; 0.0526$	鞍点 I
	B	0.4717	0	0	0.6483	$4.6122; 0.0666; -0.4307; -0.8739$	鞍点 II
	C	0.2047	0.1830	0	0.8026	$0.0205; -0.0123 \pm 0.6545i; -0.8528$	焦点、源和汇
	D	0.0288	0	0.1020	0.9520	$0.0304; 0.0073; -0.6338; -2.052$	鞍点 II
图 6 $q=0.549$	A	0	0	0	0.9982	$-2.28; -0.55; -0.0023; 0.0054$	鞍点 I
	B	0.4703	0	0	0.6597	$4.4791; 0.0653; -0.4055; -0.8970$	鞍点 II
	C	0.2090	0.1673	0	0.8128	$0.0205; -0.0085 \pm 0.6252i; -0.8676$	焦点、源和汇
	D	0.0298	0	0.0635	0.9667	$0.0407; 0.0034; -0.6418; -2.052$	鞍点 II

时,极限环膨胀且爆裂为鞍点,同时产生一条同宿轨(见图 5), $q=0.54$ 即为系统产生同宿分岔的一个阈值。由于鞍点不稳定的性质,当 q 大于 0.54 时,鞍形连接会分裂,导致系统无法回到同宿轨道,即环被摧毁。同宿分岔是全局分岔的一种类型,其会导致相空间中轨迹的拓扑结构发生变化,而且这种变化不像局部分岔那样局限在一个小的邻域内,拓扑结构的变化可以延伸到任意大的距离。如图 6(b)所示,整个系统形成了一条同宿轨道。在图 6 中,同宿分岔导致 U_1 周期振荡,湍流被更好地抑制,约束水平达到最高。

4 结语

在本科物理教学中会遇到一系列非线性微分方程的求解和分析问题,本文回顾并利用了非线性动力学中的雅可比矩阵来分析磁约束核聚变的约束模式转换模型。雅可比矩阵的本征值反应了不动点附近变量的衰减率,四维方向上的衰减率共同决定了不动点的性质,这为我们预测模型随时间的演化提供了数值依据。在 ZCD 模型中,我们发现外界加热功率 q 值会影响到极限环的周期, q 值越大极限环的周期越长。极限环半径的

增大导致了极限环与鞍点相重合,诱使系统产生同宿分岔,出现一条同宿轨。在产生同宿分岔时,极限环状态的不动点 D 与鞍点 A 非常接近,导致本征值的计算结果与所绘制相图中不动点的性质不相符,雅可比矩阵可以部分解释磁约束核聚变中 L-H 转换模式。在物理教学中应该注意到求解雅可比矩阵的本征值不能准确地描述轨迹的性质,需要结合相图具体分析。

参 考 文 献

- [1] 刘锦,张孟. 弹簧车摆的动力学模拟研究[J]. 物理与工程, 2021,(5):93-97.
LIU J, ZHANG M. Simulation study on the dynamics of spring car pendulum[J]. Physics and Engineering, 2021, 31(5): 93-97. (in Chinese)
- [2] 李万祥,何玮,唐恭佩. 一类复摆系统的非线性动力学研究[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2007,(5):27-30.
LI W X, HE W, TANG G P. Research on nonlinear dynamics of a double pendulum system[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature science), 2007, 35(5): 27-30. (in Chinese)
- [3] 张连芳,傅敏学,刘滢滢,等. 混沌实验教学之路[J]. 物理与工程,2013,(1):21-24.
ZHANG L F, FU M X, LIU Y Y, et al. The way of education for chaos experiment[J]. Physics and Engineering, 2013, 23(1): 21-24. (in Chinese)

(下转第 107 页)

为大学物理与专业相结合的教学改革提供思路。

参 考 文 献

- [1] 张婷, 吴伟, 孙仕海. 用大学物理知识诠释前沿科技——从光的偏振到量子通信[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 14-19.
ZHANG T, WU W, SUN S H. Elaborating frontier technologies using college physics knowledges—From polarization of light to quantum communication[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 14-19. (in Chinese)
- [2] 武海波, 宋加俊. 非物理学工科专业大学物理教学现状与建议[J]. 物理通报, 2022(10): 6-9.
WU H B, SONG J J. Current situation and suggestions of university physics teaching for non physics engineering majors[J]. Physics Bulletin, 2022(10): 6-9. (in Chinese)
- [3] 杨开巍, 李旭光, 孙锡良. 大学物理教学中导入课程思政元素的技巧与方法[J]. 物理与工程, 2021(6): 109-113.
YANG K W, LI X G, SUN X L. Skills and methods of introducing ideological and political elements into college physics teaching [J]. Physics and Engineering, 2021, 31(6): 109-113. (in Chinese)
- [4] 张师平, 吴平, 闫丹, 等. 将拉曼光谱技术引入大学物理课堂教育的浅析[J]. 物理与工程, 2020, 30(5): 82-85.
ZHANG S P, WU P, YAN D, et al. Brief analysis on Raman spectroscopy into college physics education[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(5): 82-85. (in Chinese)
- [5] 刘一曼, 刘敏. “新工科”视域下土木工程专业“大学物理”课程改革探索[J]. 教育教学论坛, 2020, 49(12): 200-201.
LIU Y M, LIU M. The course reform of college physics in civil engineering specialty under the background of “emerging engineering” education: A case study of China Three Gorges University[J]. Education Teaching Forum, 2020, 49(12): 200-201. (in Chinese)
- [6] 崔海瑛, 崔莲. 大学物理模块化教学改革探究——以力学教学内容为例[J]. 黑龙江教育(高教研究与评估), 2017(9): 26-27.
CUI H Y, CUI L. Exploration of modular teaching reform in college physics—Taking the teaching content of mechanics as an example[J]. Heilongjiang Education (Higher Educational Research and Evaluation), 2017(9): 26-27. (in Chinese)
- [7] 廖健飞. 大学物理知识实用化的教学探究[J]. 高教学刊, 2021, 7(22): 91-93, 99.
LIAO J F. Teaching exploration on the practical application of college physics knowledge[J]. Journal of Higher Education, 2021, 7(22): 91-93, 99. (in Chinese)
- [8] 沐仁旺, 葛一兵. 大学基础物理学[M]. 江苏: 江苏大学出版社, 2013.
- [9] 李明达, 董乔南, 杨亚利, 等. 利用非线性动力学系统研究混沌现象[J]. 物理与工程, 2019, (6): 77-84.
LI M, DONG Q N, YANG Y L, et al. Study of chaos with nonlinear dynamical system[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(6): 77-84. (in Chinese)
- [10] ZHU H, CHAPMAN S C, DENDY R O. Robustness of predator-prey models for confinement regime transitions in fusion plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2013, 20(4): 042302.
- [11] STROGATZ S H. 非线性动力学与混沌[M]. 孙梅, 汪小帆等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [12] 周道其. 科学家揭开惠更斯复摆钟之谜[J]. 现代物理知识, 2002, 14(5): 1.
ZHOU D Q. Scientist shave solved the mystery of Huygens' compound pendulum clock[J]. Review of World Invention, 2002, 14(5): 1. (in Chinese)
- [13] 陈明晖, 邓明立. 庞加莱微分方程定性理论研究初探——兼纪念庞加莱诞辰 150 周年[J]. 科学, 2004, (1): 29-31.
CHEN M H, DENG M L. A Preliminary study on the Qualitative Theory of Poincaré's differential Equation—Also commemorating the 150th anniversary of Poincaré's birth [J]. Science, 2004, 56(1): 29-31. (in Chinese)
- [14] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20(2): 130-141.
- [15] 叶美盈. 一种非线性动力学系统数值模拟的新方法[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2000, (2): 33-36.
YE M Y. A new approach to the numerical simulation of nonlinear dynamics[J]. Journal of Yunan Normal University (Natural sci ed), 2000, 20(2): 33-36. (in Chinese)
- [16] MCCracken G H, STOTT P. 宇宙能源——聚变[M]. 核工业西南物理研究院翻译组. 北京: 原子能出版社, 2008.
- [17] LI S, JIANG H, REN Z, et al. Optimal tracking for a divergent-type parabolic PDE system in current profile control[C]//ZHANG X G. Abstract and Applied Analysis. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2014: 1-8.
- [18] 刘爱红, 余守宪. 轴对称缓变磁场中的等离子体与磁约束原理[J]. 物理与工程, 2002, (5): 14-17.
LIU A H, YU S H X. Plasma in slow-varying magnetic field with axial-symmetry and principle of magnetic confinement[J]. Physics and Engineering, 2002, 12(5): 14-17. (in Chinese)
- [19] WAGNER F. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak[J]. Physical Review Letters, 1982, 49(19): 1408-1412.
- [20] BURRELL K H. Effects of $E \times B$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices[J]. Physics of Plasmas, 1997, 4(5): 1499-1518.
- [21] MALKOV M A, DIAMOND P H. Weak hysteresis in a simplified model of the LH transition[J]. Physics of Plasmas, 2009, 16(1): 012504.