

费米气体通过量子点接触的输运行为简介

单春园 代晓宇 刘波扬

(北京工业大学理学部物理与光电工程系, 北京 100124)

摘要 输运测量是研究物质状态基本性质的重要工具。其中通过量子点接触 (Quantum Point Contact) 的输运是介观物理学中一个非常有趣的现象。在无相互作用或弱相互作用费米系统中, 电导随门电压的变化呈现出量子化的阶梯状, 这一现象揭示了物质的量子特性。近年来, 冷原子体系中输运的研究已成为该领域的前沿研究之一。冷原子体系具有高度可控性的特点, 也存在许多新奇物态, 因此可以在冷原子的输运实验中观测到许多材料物理中无法观测到的新的实验现象。本文将综述的形式介绍冷原子费米气体通过量子点接触的输运行为的一些前沿实验进展, 此外, 我们也将介绍处理该体系常用的非平衡场论方法。

关键词 冷原子; 输运行为; 量子点接触; 非平衡场论

INTRODUCTION TO THE TRANSPORT OF FERMİ GASES THROUGH QUANTUM POINT CONTACTS

SHAN Chunyuan DAI Xiaoyu LIU Boyang

(Department of Physics and Optoelectronics, Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract Transport measurement is an important tool for studying the fundamental properties of matter. Among them, transport through quantum point contacts is a very interesting phenomenon in mesoscopic physics. In non-interacting or weakly interacting Fermi systems, the conductivity exhibits quantized behavior as a function of gate voltage, revealing the quantum nature of matter. In recent years, transport in cold atomic systems has become one of the frontiers in this field. Cold atomic systems have highly are controllable and exhibit many novel phases, leading to new experimental phenomena that cannot be observed in traditional material physics. This article will review some of the latest experimental progress in transport through quantum point contacts in cold atomic Fermi gases, and will also introduce the non-equilibrium field theoretical methods commonly used to study this system.

Key words cold atoms; transport; quantum point contact; non-equilibrium field theory

自然界中几乎所有的现象都是非平衡现象, 冷原子体系中的非平衡研究成为一个热点, 冷原子体系具有高度清洁性和可控性, 为非平衡研究
非平衡物理一直是物理学的一个前沿领域。最近

收稿日期: 2023-04-19

通讯作者: 刘波扬, 男, 目前主要从事冷原子物理的理论研究, 包括强相互作用气体的输运行为, 量子相变和临界现象, 以及光晶格中的量子气体, byliu@bjut.edu.cn。

引文格式: 单春园, 代晓宇, 刘波扬. 费米气体通过量子点接触的输运行为简介[J]. 物理与工程, 2023, 33(5): 67-74.

Cite this article: SHAN C Y, DAI X Y, LIU B Y. Introduction to the transport of Fermi gases through quantum point contacts[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(5): 67-74. (in Chinese)

带来便利。物理学家可以在冷原子体系中实现其他材料物理中无法实现的输运行为的研究,比如通过快速改变实验参数来研究体系的演化行为,用激光构建各种形状的输运通道以研究气体输运性质等等,同时冷原子体系也存在许多自己所特有的新颖物态,这些物态如何进行非平衡演化,也是物理学家关注的焦点。输运行为是非平衡领域一个重要研究方向,对于揭示物质的相互作用性质以及探索高性能输运材料都有重要意义。

本文将综述冷原子气体通过量子点接触(Quantum Point Contact)的输运行为方面的实验进展以及理论处理方法。量子点接触是在材料物理中构建的介观尺度的一维通道,电流通过一个量子点接触产生的量子化的电导是介观物理的一个重要现象^[1,2]。电导随着门电压的变化呈现以 $2e^2/h$ 为单位的量子化阶梯行为,其中 e 表示电荷量, h 表示普朗克常数。这一现象可以被兰道尔-布蒂克(Landauer-Buttiker)公式很好的解释^[3,4]。2015年苏黎世理工学院的艾斯林格(Esslinger)教授小组在两团冷原子气体中间构建了一个一维介观尺度的连接通道,首次在冷原子体系中实现了中性物质通过量子点接触的输运^[5],也相应地观测到了粒子流的量子化电导,中性物质中该电导的量子化单位为 $2/h$ 。该工作为在冷原子体系中研究通过量子点接触的输运行为铺平了道路。此后他们又基于上述实验构架进行了一系列的实验,观测到许多有趣的实验现象。

本文将简要综述冷原子物理中通过量子点接触的输运行为。文章分为以下几个部分展开:在第1节中将对实现量子点接触的实验设置以及其基本概念进行介绍;第2节将关注冷原子费米气体通过量子点接触的输运行为的实验进展;第3节介绍如何运用非平衡场论研究该体系的输运行为。

1 冷原子中量子点接触实验构架的简介

最近艾斯林格教授小组在冷原子实验中成功构建了量子点接触结构,并进行了一系列重要的实验^[5-7]。2015年,他们首次观测到中性物质即 ^6Li 简并费米气体的量子化电导^[5]。这是对电子系统中电导量子化的验证,同时这也成为了冷原子物理中研究输运行为的一个里程碑。

冷原子系统中的量子点接触是通过如下几个

步骤构建出来的。首先,在一个雪茄形状的阱中制备简并费米气体。然后用一束 TEM_{01} 模式的激光在雪茄形势阱的中间产生一个准二维通道,如图1所示。 TEM_{01} 模式是一个特殊的激光模式,在光束中部存在一个光强为零的二维平面,看起来激光分为上下两部分,请参考图1。如果这束激光为蓝失谐激光,对原子就产生排斥相互作用,当这束激光作用到原子气上,光强为0的部分就形成一个二维通道。最后,在二维通道上再打一束激光将二维通道的中部约束成一个准一维的通道,通道的宽度与费米气体原子间距相当,这样就构建了一个量子点接触。更为详细的实验数据请参考文献^[5]。

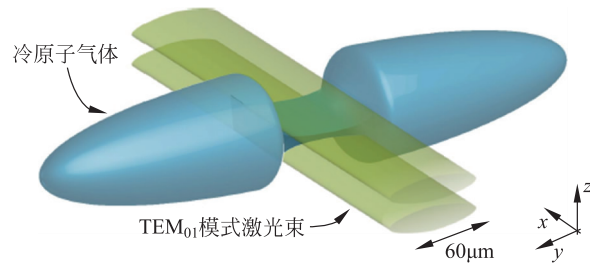


图1 用 TEM_{01} 模式激光压缩雪茄型原子气体的中部,在中部形成一个二维通道

在图2中,我们绘制了一个冷原子实验中量子点接触的示意图。形成量子点接触需要在 $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 方向都有谐波约束,约束势能的表达式为

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2(y)x^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2(y)z^2 \quad (1)$$

其中, $\omega_{x(z)}(y)$ 表示为

$$\omega_{x(z)}(y) = \omega_{x(z)}(0)e^{\frac{-y^2}{w_{x(z)}^2}} \quad (2)$$

在实验中, w_x 和 w_z 的典型值为 $w_x = 5.6(3)\mu\text{m}$, $w_z = 30(1)\mu\text{m}$ ^[5]。一维量子点接触的大小由 $\omega_x(0)$ 和 $\omega_z(0)$ 决定,它们的典型值如参考文献^[5]中所示,分别为 $\omega_z(0) = 2\pi \times 10.0(4)\text{kHz}$ 和 $\omega_x(0) = 2\pi \times 30.0(3)\text{kHz}$ 。由于横向的束缚,量子点接触的本征能级之间的间隔是以 $\hbar\omega_x(0)$ 和 $\hbar\omega_z(0)$ 为单位的。在 $\omega_z(0) = 2\pi \times 10.0(4)\text{kHz}$ 和 $\omega_x(0) = 2\pi \times 30.0(3)\text{kHz}$ 的特殊情况下,三个最低能级之间的间隔为 $\hbar\omega_z(0) \approx 0.5\mu\text{K}$,这个能量差比气体温度对应的能量大得多。量子点接触的零点能量为 $E_0 = \frac{1}{2}(\hbar\omega_x(0) + \hbar\omega_z(0)) \approx 1\mu\text{K}$,它比系统的

化学势 $\mu = 370(11)\text{nK}$ 要大。较大的零点能会阻碍粒子在左右两个热库之间的传输。为了产生输运行为,实验中又在量子点接触区域加了一束红失谐激光来调整该区域的化学势,相当于产生了一个等效的门电压 V_g ,如图 2 所示。

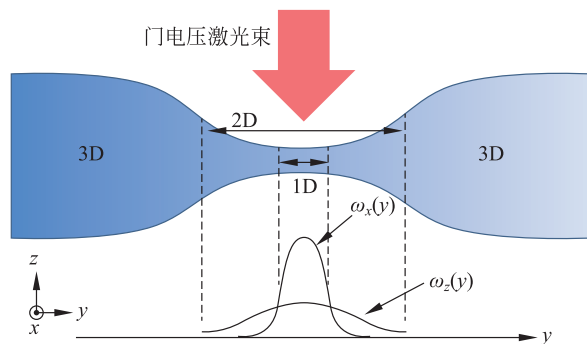


图 2 约束频率 $\omega_x(y)$ 和 $\omega_z(y)$ 。由于约束频率的存在,使两个热库之间产生了特定的几何形状,一维量子点接触通过二维区域与三维热库相连

该系统的电导可以由左右两边热库中的粒子数差 $\Delta N = N_L - N_R$ (其中 N_L, N_R 表示左右热库中的粒子数) 随时间的演化得到。左右热库的粒子数可表示为 $N_L = N_{L0} + \Delta N/2$ 和 $N_R = N_{R0} - \Delta N/2$, 相应的化学势为 $\mu_{L(R)} = \mu_0 + \Delta\mu_{L(R)}$ 。在线性响应范围内化学势的变化可以通过热库的压缩率表示出来, $\Delta\mu_L = \frac{1}{C_L} \frac{\Delta N}{2}$, $\Delta\mu_R = -\frac{1}{C_R} \frac{\Delta N}{2}$, 其中压缩率表示 $C_{L(R)} = \partial N_{L(R)} / \partial \mu_{L(R)}$, 压缩率和阱的几何形状、粒子数和温度有关, 可以通过实验测得。化学势的差可以计算为 $\Delta\mu = \mu_L - \mu_R = \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_R}\right) \frac{\Delta N}{2} = \frac{1}{C_{\text{eff}}} \frac{\Delta N}{2}$, 其中 $C_{\text{eff}} = (1/C_L + 1/C_R)^{-1}$ 是有效压缩率。于是化学势偏差 $\Delta\mu$ 随时间演化的行为可计算为 $\frac{d\Delta\mu}{dt} = \frac{1}{C_{\text{eff}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta N}{2}\right) = -\frac{1}{C_{\text{eff}}} I = -\frac{G}{C_{\text{eff}}} \Delta\mu$, 上式中电流的定义为 $I = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta N}{2}\right)$, 电导 $G = I / \Delta\mu$, 于是粒子数差的时间演化由如下方程给出

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta N}{N}\right) = -\frac{G}{C_{\text{eff}}} \left(\frac{\Delta N}{N}\right) \quad (3)$$

其中, $N = N_L + N_R$ 为总粒子数。粒子数差随时间的变化是一个指数衰减行为, 这个过程类似于电容器放电, 时间常数可以计算为 $\tau = \frac{G}{C_{\text{eff}}}$ 。然后

可以利用 τ 的测量值和 C_{eff} 的估计值反解出电导 G 。

2 费米气体通过量子点接触的输运行为的实验进展

2015 年艾斯林格教授小组首次在实验中实现了中性原子气体通过量子点接触的输运实验^[5], 并测量了无相互作用费米气体通过量子点接触的电导率, 证明对于中性气体原子 Landauer-Buttiker 公式依然适用, 这一里程碑式的工作也开启了冷原子物理中介观输运的研究。2015 年和 2016 年艾斯林格教授小组又进行了两组实验, 分别对超流相^[6]和正常相^[7]中强相互作用气体通过量子点接触的电导率进行了测量。在正常相输运实验中, 测得的电导远远大于 Landauer-Buttiker 公式的预测结果, 引起了实验和物理学家的关注。根据现有的理论研究表明, 如果一个体系可以用朗道费米液体来描述, 电导总是符合 Landauer-Buttiker 公式的预测, 与相互作用强度无关。这一反常电导暗示了强相互作用费米气体的非费米液体特性。后续也有理论工作对于这一反常现象进行了解释^[8-10]。这些研究表明, 强相互作用费米气体中存在的玻色分子态对电导有很大的贡献。

在 2013 年, 苏黎世理工的 Esslinger 教授小组对无相互作用费米气体的热电效应进行了测量, 但该实验尚不是通过量子点接触的热输运^[11]。随后, 在 2018 年, 该小组在么正费米气体通过量子点接触的体系中继续研究热电转换等问题, 并观测到了许多有趣的实验现象^[12]。其中, 在该体系中测量到的洛伦兹数 L , 在么正区域附近偏离了 Wiedemann-Franz 定理的预言。洛伦兹数定义为 $L = G_T / TG$, 其中 G 为电导率, G_T 为热导率, T 为温度。如果系统表现为费米液体行为, 在低温下, 洛伦兹数会趋向于一个普适的常数 $L_0 = \pi^2/3$, 这就是 Wiedemann-Franz 定理。然而, 在 2018 年的实验中, Esslinger 小组观测到洛伦兹数对 Wiedemann-Franz 定理有很大的偏离, 后续的理论分析对这一现象给出了解释, 该理论研究发现库珀对会使体系偏离费米液体理论的描述^[13], 洛伦兹数于是不再适合 Wiedemann-Franz 定理。

2017 年瑞士物理研究所 Brantut 教授小组在量子气体的介观输运领域又取得了新的研究进

展。他们在冷原子输运实验中实现了扫描探测显微镜技术^[14,15],这种技术在固体材料中有着广泛的应用。利用高分辨率光学显微镜,他们在量子点接触区域中产生了一个微小的排斥势,其尺度与费米波长相当。通过移动这个微小的排斥势,可以模拟扫描探测。传输振幅是量子点接触实验中的一个重要参数,它表征了体系输运能力的高低。Brantut 教授小组的实验表明,扫描显微镜的位置和排斥势都能对传输振幅有重要影响,这种技术是量子气传输实验中的重要调控和探测手段。基于该技术,输运实验中的许多参数变得可控可调,大大丰富了在冷原子体系中研究输运行为的实验手段。

最近,由量子系统与合作环境的耦合而产生的非厄米动力学是一个非常活跃的领域。该领域的研究对于理解各种物理现象是至关重要的,包括耗散相变、临界现象、拓扑相和量子 Zeno 效应。2019 年,通过在量子点接触区域聚焦近共振光束来产生局部损失,Esslinger 教授小组首次在这种设置中引入了非厄米动力学^[16]。在原子量子点接触区域加入一个近共振光束会导致不同自旋态的电子具有不同的电势和散射率,并用于表示通过点接触的每个粒子的传输和损失概率。实验发现在有耗散的情况下电导率平台仍可见,但是其值低于电导量子 $1/h$ 。该实验建立了在输运实验中设计耗散的能力,开辟了研究连续 Zeno 效应或通过耗散晶格改变输运行为的可能性。

3 非平衡格林函数方法

3.1 量子点接触的基本概念

量子点接触是一个准一维传输通道,为了对量子点接触有进一步的了解,我们先介绍关于波导的一些知识。假设波导是沿 $\hat{y}$ 方向延伸,且在它的 $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 方向都有简谐势阱约束,约束频率是常数 ω_x 和 ω_z ,如图 3(a)所示。通常的电磁波的波导为金属所制,在冷原子实验中波导是由激光光束对原子气体的束缚所产生,激光产生的束缚可表示为简谐束缚,我们在图 3 中标明了简谐势的频率。

基于简谐势求解该系统的薛定谔方程,很容易得到波函数为

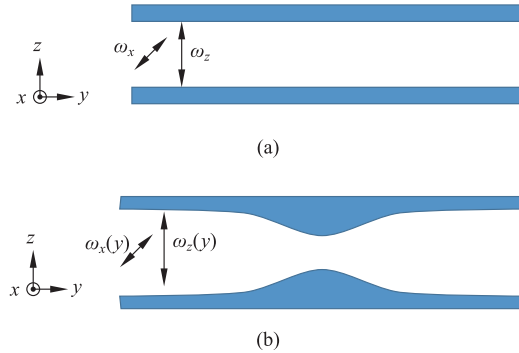


图3 简谐势阱约束产生的波导和量子点接触示意图
(a) 波导示意图; (b) 量子点接触示意图

$$\begin{aligned}\phi_{k_y, m, n}(x, y, z) &= \phi_{k_y}(y) \phi_m(x) \phi_n(z) \\ \phi_{k_y}(y) &= \exp(ik_y y) \\ \phi_{m/n}(x/z) &= \left(\frac{m\omega_{x/z}}{\pi \hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^{m/n} (m/n)!)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad e^{-\frac{m\omega_{x/z}}{2\hbar}(x/z)^2} H_{m/n}\left(\sqrt{\frac{m\omega_{x/z}}{\hbar}} x/z\right),\end{aligned}\quad (4)$$

其中, $H_m(x)$ 是厄米多项式, 参数 m, n 表示横模的本征态, 在纳米物理学中也被称为传输通道。波导的本征能量的表达式为

$$E_{m, n}(k_y) = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} + \hbar\omega_x\left(\frac{1}{2} + m\right) + \hbar\omega_z\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (5)$$

如果在波导的中心部分施加更加强烈的束缚, 可以得到量子点接触, 如图 3(b)所示, 约束频率沿 $\hat{y}$ 方向平稳地变化为 $\omega_{x/z}(y)$, 在波导中心的约束频率最强。由于三维薛定谔方程中的变量不会分离, 很难求解这种结构的薛定谔方程。然而该系统的传输特性可以通过研究所谓的“绝热波导”来获得^[17]。绝热波导的约束频率变化非常缓慢, 即

$$\left|\frac{\partial\omega_x(y)}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\omega_z(y)}{\partial y}\right| \ll 1, \omega_x(y) \left|\frac{\partial^2\omega_x(y)}{\partial y^2}\right|, \omega_z(y) \left|\frac{\partial^2\omega_z(y)}{\partial y^2}\right| \ll 1.$$

波函数可以局部近似为理想波导的波函数, 变量是局部分离的, 波函数表达式如下

$$\phi_{m, n}(x, y, z) = \phi(y) \phi_m(x, \omega_x(y)) \phi_n(z, \omega_z(y)) \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_{m/n}(x/z, \omega_{x/z}(y)) &= \left(\frac{m\omega_{x/z}(y)}{\pi \hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^{m/n} (m/n)!)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad e^{-\frac{m\omega_{x/z}(y)}{2\hbar}(x/z)^2} H_{m/n}\left(\sqrt{\frac{m\omega_{x/z}(y)}{\hbar}} x/z\right)\end{aligned}$$

波函数 $\psi(y)$ 满足的方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_{m,n}(y)\right) \psi(y) = E \psi(y) \quad (7)$$

其中

$$V_{m,n}(y) = \hbar\omega_x(y) \left(\frac{1}{2} + m\right) + \hbar\omega_z(y) \left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (8)$$

图 4(a) 给出了 $V_{m,n}(y)$ 三个最低势能的示意图, 对于每一个通道, 随着约束频率在量子点接触区域增加到最强, $V_{m,n}(y)$ 沿着 $\hat{y}$ 方向呈势垒型的变化, m, n 取值越大, 势垒就越高。这样 $\psi(y)$ 的解就成了一个一维势垒散射问题。如果我们假设这些势垒是不可穿透的, 那么当能量 E 大于势垒的高度时, 具有能量 E 的粒子可以穿过该通道, 否则, 它将被反射回来。例如, 在图 4(a) 中, 伴有能量 E 的粒子可以通过两个最低的通道, 这两个通道被称为“开放”通道, 所有其他的通道都是这个粒子的“封闭”通道。在量子点接触实验中, 可以通过把门电压 V_g 加在量子点接触上, 来改变势垒的高度, 如图 4(b) 所示。因此, 调节门电压可以打开或关闭更多的通道。

3.2 非平衡场论方法

对于两个冷原子热库通过量子点接触的输运行为, “隧道哈密顿量”^[18-20] 是一个常用的处理方法。这种方法忽略了量子点接触的细节和几何形状, 用一个简单的系数, 即传输矩阵来描述粒子在左右两热库之间的传输。许多量子点接触实验的理论分析都是基于此方法, 这一小节中我们将详细介绍此方法的运用。系统的哈密顿量可以写成如下三部分

$$\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_R + \hat{H}_T \quad (9)$$

其中, $\hat{H}_L$ ($\hat{H}_R$) 表示左右两边热库中的粒子的哈

密顿量。两个热库之间通过量子点接触的隧穿可以描述为 $\hat{H}_T$, 在实空间中它可以写成

$$\hat{H}_T = \sum_{n,\sigma} T^n \hat{\psi}_{L\sigma}^\dagger(0) \hat{\psi}_{R\sigma}(0) + \text{h. c.} \quad (10)$$

其中, T^n 为传输矩阵, 表示通过第 n 个通道的传输能力。我们考虑自旋为 $1/2$ 的费米子, 则 $\hat{\psi}_{j\sigma}^\dagger$ 表示自旋 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 的费米子的产生; $j = L, R$ 表示左右两个热库; h. c. 代表厄米共轭项。

为了在非平衡场论框架下研究输运行为, 我们需要推导 $\hat{H}_T$ 的含时演化。在粒子输运过程中, 粒子的能量是守恒的, 但左、右两边热库的化学势不同, 如果按传统的处理方式, 能量是根据化学势来测量的, 那在我们研究的体系里就没有一个统一的衡量能量的标准, 因为两个热库的化学势是不同的。在这里可以利用单粒子哈密顿量 $\hat{H} + \sum_j \mu_j \hat{N}_j^F$ 构造时间演化算符 $U(t) = e^{i[\hat{H} + \sum_j \mu_j \hat{N}_j^F]t}$, 其中, $\hat{N}_j^F = \sum_\sigma \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_j$ 为费米子的粒子数算符。在这种情况下, 能量以一个统一的标度测量, 可以推导出 $\hat{H}_T$ 的时间演化如下

$$\begin{aligned} \hat{H}_T(t) &= e^{i(\hat{H} + \sum_j \mu_j \hat{N}_j^F)t} \hat{H}_T e^{-i(\hat{H} + \sum_j \mu_j \hat{N}_j^F)t} \\ &= e^{-i\mu \Delta t} \sum_{n,\sigma} T^n \hat{\psi}_{L\sigma}^\dagger(t, 0) \hat{\psi}_{R\sigma}(t, 0) + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\hat{\psi}_{j\sigma}(t, 0) = e^{i\hat{H}_j t} \hat{\psi}_{j\sigma}(0) e^{-i\hat{H}_j t}$, 化学势偏差为 $\Delta\mu = \mu_R - \mu_L$ 。

在实验设置中, 量子点接触是由 $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 方向的简谐约束产生的, 传输通道的能级为

$$\epsilon_\perp(n_y, n_z) = \left(\frac{1}{2} + n_y\right) \omega_y + \left(\frac{1}{2} + n_z\right) \omega_z + V_g$$

我们将有效门电压定义为 $\bar{V}_g = V_g + \frac{1}{2} \omega_y + \frac{1}{2} \omega_z$,

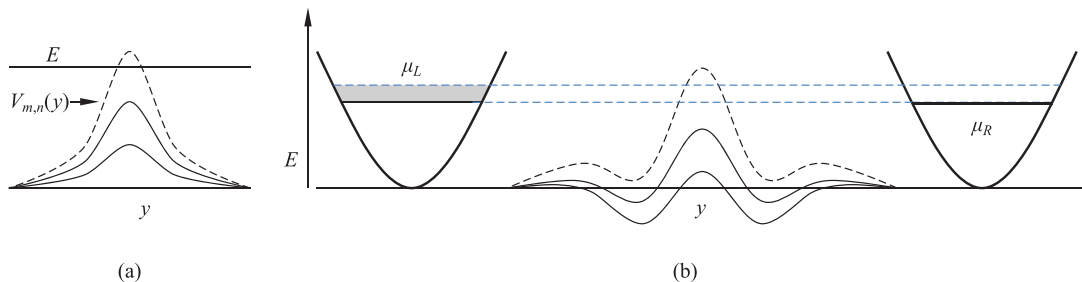


图 4 量子点接触传输通道示意图

(a) 三个最低通道 $V_{m,n}(y)$ 的示意图。实线表示开放通道, 虚线表示封闭通道; (b) 诠释兰道尔—布蒂克 (Landauer-Büttiker) 公式理论的示意图。在低温条件下, 只有在两个费米表面间的粒子 (灰色区域) 能被输运。如果费米表面高于通道的峰值, 它就是一个开放通道, 否则, 它就是一个封闭通道

假设 $\omega_z \gg \omega_y$, 那么几个最低输运通道的本征能量为 $n_y \omega_y + \bar{V}_g$, 它们是非简并的。通过量子点接触的第 n 个通道的传输矩阵元可写为 $T^n(E) = (1 + \exp[-2\pi(E - n\omega_y - \bar{V}_g)/\omega_x])^{-1}$ [17], 其中 E 是粒子动能 $\epsilon(\mathbf{k}_j) = \mathbf{k}_j^2/2m$, ($j=L, R$)。对于 $\omega_x \ll \omega_{y,z}$ 传输矩阵元可以近似为 Θ 函数

$$T^n(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R) = T \prod_{j=L, R} \Theta[\epsilon(\mathbf{k}_j) - n\omega_y - \bar{V}_g] \quad (12)$$

常数 T 与量子点接触的传输能力有关。上述表明, 只有能量为 $\epsilon(\mathbf{k}_j) > n\omega_y + \bar{V}_g$ 的粒子才能从量子点接触的第 n 个通道传输, 这样我们可以把动量空间中的隧道哈密顿量写成

$$\hat{H}_T = \sum_n \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_R}{(2\pi)^3} \left\{ T^n(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R) \cdot \sum_\sigma \hat{\psi}_{L\sigma}^\dagger(\omega, \mathbf{k}_L) \hat{\psi}_{R\sigma}(\omega - \Delta\mu, \mathbf{k}_R) + \text{h. c.} \right\}. \quad (13)$$

如果左右两边热库的粒子数密度存在偏差, 即左右热库存在化学势差, 则两个热库之间会产生粒子流。粒子流可以定义为

$$I_F = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial(\hat{N}_R^F - \hat{N}_L^F)}{\partial t} \right\rangle = \frac{i}{2\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{N}_R^F - \hat{N}_L^F] \rangle = i \sum_{n, \sigma} T^n \langle \hat{\psi}_{L\sigma}^\dagger(0) \hat{\psi}_{R\sigma}(0) \rangle + \text{h. c.} \quad (14)$$

与推导隧道哈密顿量的含时演化方法相同, 可以直接推导出粒子流的含时演化为

$$I(t) = e^{-i\mu t} \sum_{n, \sigma} T^n \langle \hat{\psi}_{L\sigma}^\dagger(t, 0) \hat{\psi}_{R\sigma}(t, 0) \rangle + \text{h. c.} \quad (15)$$

3.3 无相互作用费米子通过量子点接触的电导

这一小节中我们将利用上述方法计算无相互作用费米体系通过量子点接触的电导, 即用非平衡格林函数的方法推导兰道尔—布蒂克(Landauer-Büttiker)公式。在无相互作用的费米子体系中, 左右两边热库的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}_j = \int d^3 \mathbf{r} \hat{\psi}_{j\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu_j \right) \hat{\psi}_{j\sigma}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

为了研究这个非平衡过程, 我们采用非平衡格林场论方法计算, 即在一个封闭的时间回路上构建了上述哈密顿量的时间演化理论 [21, 22]。左边的热库或者右边的热库的运动可以写成

$$S_0 = \int dx dt \sum_{\sigma, j} \bar{\Psi}_{j\sigma} [G_{Fj}]^{-1} \Psi_{j\sigma} \quad (17)$$

$$\text{其中, } \bar{\Psi}_{j\sigma} = (\bar{\psi}_{j1\sigma} \quad \bar{\psi}_{j2\sigma}), \Psi_{j\sigma} = \begin{pmatrix} \psi_{j1\sigma} \\ \psi_{j2\sigma} \end{pmatrix}$$

为了方便计算, 我们在费米场之间做一个 Keldysh 转动

$$\begin{aligned} \psi_{j1\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j\sigma}^+ + \psi_{j\sigma}^-), & \psi_{j2\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j\sigma}^+ - \psi_{j\sigma}^-), \\ \bar{\psi}_{j1\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{j\sigma}^+ - \bar{\psi}_{j\sigma}^-), & \bar{\psi}_{j2\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{j\sigma}^+ + \bar{\psi}_{j\sigma}^-) \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\psi_{j\sigma}^{+(-)}$ 表示随时间向前(后)演化的费米场。

在 Keldysh 转动之后格林函数表达式为

$$G_{Fj} = \begin{pmatrix} G_{Fj}^R & G_{Fj}^K \\ 0 & G_{Fj}^A \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中, $G_{Fj}^{R(A)} = (\omega - k^2/2m + \mu_j \pm i0^+)^{-1}$ 为费米子在动量空间中的推迟(超前)格林函数, $G_{Fj}^K = (1 - 2n_F(\omega))(G_{Fj}^R - G_{Fj}^A)$ 称为 Keldysh 格林函数, $n_F = 1/(\exp[\beta\omega] + 1)$ 为费米分布函数。

整个系统在动量空间中的配分函数可以表示为

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int D[\bar{\psi}_{j\sigma}, \psi_{j\sigma}] \exp\{iS\} \quad (20)$$

其中, $S = S_0 + S_T + S_s$, S_0 , S_T 和 S_s 分别表示为左右两边热库的自由项、隧道项和源项。

S_0 , S_T 和 S_s 在动量空间中的表达式为

$$\begin{aligned} S_0 &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma, j} \bar{\Psi}_{j\sigma}(\omega, \mathbf{k}) [G_{Fj}]^{-1} \Psi_{j\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \\ S_T &= J_F^q(0) + \text{h. c.} \\ S_s &= i \int \frac{d\Omega}{2\pi} \{ A^{cl}(\Omega) J_F^q(\Omega) + A^q(\Omega) J_F^{cl}(\Omega) \} + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (21)$$

在上述配分函数中我们引入一个外部的源 $A(t)$

来激发粒子流, $A^{cl} = \frac{1}{2}(A^+ + A^-)$ 和 $A^q = \frac{1}{2}(A^+ - A^-)$, 其中 A^+ , A^- 是随时间正向和反向演化的外部场。此外, 我们定义

$$\begin{aligned} J_F^{cl}(\Omega) &= \int \sum_n \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_R}{(2\pi)^3} T^n(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R) \\ &\quad \sum_\sigma [\bar{\psi}_{L1\sigma}(\omega, \mathbf{k}_L) \psi_{R2\sigma}(\Omega + \omega - \Delta\mu, \mathbf{k}_R) + \\ &\quad \bar{\psi}_{L2\sigma}(\omega, \mathbf{k}_L) \psi_{R1\sigma}(\Omega + \omega - \Delta\mu, \mathbf{k}_R)] \end{aligned}$$

$$J_F^q(\Omega) = \int \sum_n \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 k_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_R}{(2\pi)^3} T^n(k_L, k_R) \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{L1\sigma}(\omega, k_L) \psi_{R1\sigma}(\Omega + \omega - \Delta\mu, k_R) + \bar{\psi}_{L2\sigma}(\omega, k_L) \psi_{R2\sigma}(\Omega + \omega - \Delta\mu, k_R)] \quad (22)$$

然后随时间变化的电流可以通过 $I_F(t) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{i\Omega t}$ 。

$I_F(\Omega)$ 计算得到, 其中 $I_F(\Omega) = \frac{i}{2} \frac{\partial Z}{\partial A^q} \Big|_{A^q=0}$

展开到 T 的二阶微扰得

$$I_F(\Omega) = I_F^{qp}(\Omega) + I_F^J(\Omega) \quad (23)$$

其中

$$I_F^{qp}(\Omega) = \frac{1}{2} (\langle J_F^{cl}(\Omega) J_F^{q*}(0) \rangle - \langle J_F^{cl*}(-\Omega) J_F^q(0) \rangle) \quad (24)$$

$$I_F^J(\Omega) = \frac{1}{2} (\langle J_F^{cl}(\Omega) J_F^q(0) \rangle - \langle J_F^{cl*}(-\Omega) J_F^{q*}(0) \rangle) \quad (25)$$

分别为准粒子流和约瑟夫森流。

展开到 T 的二阶微扰时, 准粒子流项为 $\langle \bar{\psi}_{L\sigma} \psi_{L\sigma} \rangle \langle \bar{\psi}_{R\sigma} \psi_{R\sigma} \rangle$, 而约瑟夫森流包含的项为 $\langle \bar{\psi}_{L\uparrow} \bar{\psi}_{L\downarrow} \rangle \langle \psi_{R\downarrow} \psi_{R\uparrow} \rangle$, 在无相互作用的情况下由于 $\langle \bar{\psi}_{L\uparrow} \bar{\psi}_{L\downarrow} \rangle = \langle \psi_{R\downarrow} \psi_{R\uparrow} \rangle = 0$, 无约瑟夫森电流。在超流态的情况下, 准粒子流与约瑟夫森流均有贡献。

在无相互作用的情况下, 准粒子电流可以直接计算为(在电流表达式中, 我们将恢复 $\hbar$)

$$I_F(t) = \sum_n \frac{8\pi^2 |T^n|^2}{h} \int d\omega \frac{d^3 k_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_R}{(2\pi)^3} \Theta[\epsilon(k_L) - n\omega_y - \bar{V}_g] \cdot \Theta[\epsilon(k_R) - n\omega_y - \bar{V}_g] A_L^F(\omega, k_L) A_R^F(\omega - \Delta\mu, k_R) \cdot [n_F(\omega) - n_F(\omega - \Delta\mu)] \simeq \sum_n \frac{8\pi^2 |T^n|^2}{h} \nu^2(\epsilon_F^R) \cdot \int d\omega d\epsilon_L d\epsilon_R \Theta[\epsilon(k_L) - n\omega_y - \bar{V}_g] \cdot \Theta[\epsilon(k_R) - n\omega_y - \bar{V}_g] A_L^F(\omega, k_L) A_R^F(\omega - \Delta\mu, k_R) \cdot [n_F(\omega) - n_F(\omega - \Delta\mu)] \quad (26)$$

其中, $\nu(\epsilon) = \frac{(2m)^{3/2} \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2}$ 是三维的态密度, ϵ_F^R 为右

边热库的费米能。在本工作中, 使用 ϵ_F^R 和右边热库的费米动量 k_F^R 作为能量和动量单位。无相互作用费米子的谱函数为 δ 函数

$$A_j^F(\omega, k_j) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{1}{\omega + i0^+ - \frac{k^2}{2m} + \mu_j} \right] = \delta\left(\omega - \frac{k^2}{2m} + \mu_j\right) \quad (27)$$

通过进一步计算, 电流的表达式为

$$I_F(t) = \frac{2}{h} \alpha \sum_n \int d\epsilon \Theta[\epsilon - n\omega_y - \bar{V}_g] \cdot [n_F(\epsilon - \mu_L) - n_F(\epsilon - \mu_R)] \quad (28)$$

其中, $\alpha = 4\pi^2 \nu^2(\epsilon_F^R) T^2$ 表示粒子的传输能力, 上面的方程就是所谓的兰道尔—布蒂克(Landauer-Büttiker)公式。无论是在电子气体体系还是中性原子体系, 兰道尔—布蒂克公式都已经被实验很好的验证。

4 结语

本文主要综述了最近几年冷原子体系中通过量子点接触的输运行为的实验进展以及理论处理方法。输运行为的研究是探究物质基本性质的一个重要手段。近些年, 随着实验技术的进步, 冷原子中输运行为的研究成为一个热点。冷原子实验中的各种参数具有高度可控性, 可以达到许多固体材料实验中无法达到的极端参数条件, 包括相互作用强度、密度和输运管道的形状等等, 可以很方便得通过调节实验参数研究输运介质的特性。其中苏黎世理工的 Esslinger 教授小组在量子点接触这一输运体系中进行了一系列实验, 包括粒子输运、自旋输运、超流输运、热输运以及耗散输运等等, 观测到许多新的物理现象, 也对材料物理学研究方向给出了启示。本文详细介绍了这些实验进展。此外, 本文也介绍了处理量子点接触这一体系常用的非平衡场论方法, 并展示了利用这一方法推导描述无相互作用体系的著名的 Landauer-Büttiker 公式的过程, 此方法也可以很方便的拓展到相互作用体系的计算中。

参 考 文 献

- [1] VAN WEES B J, van HOUTEN H, BEENAKKER C W J. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas[J]. Physical Review Letters, 1988, 60(9):

- 848-850.
- [2] WHARAM D A, THORNTON T J, NEWBURY R, et al. One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance[J]. *Journal of Physics C: solid state physics*, 1988, 21(8): 209.
 - [3] LANDAUER R. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction[J]. *IBM Journal of Research and Development*, 1957, 1(3): 223-231.
 - [4] BÜTTIKER M, IMRY Y, LANDAUER R, et al. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings[J]. *Physical Review B*, 1985, 31(10): 6207.
 - [5] KRINNER S, STADLER D, HUSMANN D, et al. Observation of quantized conductance in neutral matter[J]. *Nature*, 2015, 517(7532): 64-67.
 - [6] HUSMANN D, UCHINO S, KRINNER S, et al. Connecting strongly correlated superfluids by a quantum point contact[J]. *Science*, 2015, 350(6267): 1498-1501.
 - [7] KRINNER S, LEBRAT M, HUSMANN D, et al. Mapping out spin and particle conductances in a quantum point contact[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(29): 8144-8149.
 - [8] KANÁSZ-NAGY M, GLAZMAN L, ESSLINGER T, et al. Anomalous conductances in an ultracold quantum wire [J]. *Physical review letters*, 2016, 117(25): 255302.
 - [9] UCHINO S, UEDA M. Anomalous transport in the superfluid fluctuation regime[J]. *Physical review letters*, 2017, 118(10): 105303.
 - [10] LIU B, ZHAI H, ZHANG S. Anomalous conductance of a strongly interacting Fermi gas through a quantum point contact[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(1): 013623.
 - [11] BRANTUT J P, GRENIER C, MEINEKE J, et al. A thermoelectric heat engine with ultracold atoms[J]. *Science*, 2013, 342(6159): 713-715.
 - [12] HAN X, LIU B, HU J. Enhancement of the thermal-transport figure of merit and breakdown of the Wiedemann-Franz law in unitary Fermi gases[J]. *Physical Review A*, 2019, 100: 04360.
 - [13] HUSMANN D, LEBRAT M, HÄUSLER S, et al. Breakdown of the Wiedemann-Franz law in a unitary Fermi gas [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, 115(34): 8563-8568.
 - [14] HÄUSLER S, NAKAJIMA S, LEBRAT M, et al. Scanning gate microscope for cold atomic gases[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(3): 030403.
 - [15] LEBRAT M, HÄUSLER S, FABRITIUS P, et al. Quantized conductance through a spin-selective atomic point contact[J]. *Physical review letters*, 2019, 123(19): 193605.
 - [16] CORMAN L, FABRITIUS P, HUSLER S, et al. Erratum: Quantized conductance through a dissipative atomic point contact[J]. *Physical review A*, 2019, 100: 053605.
 - [17] NAZAROV Y V, BLANTER Y M. Quantum transport: introduction to nanoscience[M]. United Kingdom: Cambridge university press, 2009.
 - [18] COHEN M H, FALICOV L M, PHILLIPS J C. Superconductive tunneling[J]. *Physical Review Letters*, 1962, 8(8): 316.
 - [19] DUKE C B, LAMBE J. Tunneling in Solids[J]. *Physics Today*, 1973, 26(6): 63-64.
 - [20] CUEVAS J C, MARTÍN-RODERO A, YEYATI A L. Hamiltonian approach to the transport properties of superconducting quantum point contacts[J]. *Physical Review B*, 1996, 54(10): 7366.
 - [21] KELDysh L V. Diagram technique for nonequilibrium processes[J]. *soviet physics jetp*, 1965, 20(4): 1018-1026.
 - [22] ALEX K. Field Theory of Non-Equilibrium Systems[M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2011.