

基于 Hirota 方法探求非零边界条件下 MNLS/DNLS 方程的孤子解

周国全 雒润嘉 齐 莹

(武汉大学物理科学与技术学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要 Hirota 双线性导数变换处理非线性偏微分方程, 是一种比反散射变换更为方便的直接方法。本文展示了 Hirota 双线性导数变换法应用于求解非线性可积方程的一般手续, 以非零驻波边界条件下修正的非线性薛定谔(MNLS)方程为例, 探求其孤子解; 再通过简单的参数归零法直接得到导数非线性薛定谔(DNLS)方程在非零常数边界条件下的相应孤子解, 亮/暗孤子解随时间和空间变量的演化也通过图像加以演示, 所得孤子解与反散射方法得到的结果一致相符。

关键词 孤子; 非线性方程; 修正的非线性薛定谔方程; 导数非线性薛定谔方程; Hirota 方法; Hirota 双

SOLITON SOLUTION OF MNLS/DNLS EQUATION WITH NONVANISHING BOUNDARY CONDITION BASED ON HIROTA METHOD

ZHOU Guoquan LUO Runjia QI Ying

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072)

Abstract Hirota's bilinear derivative transformation is a direct method which is more convenient than the inverse scattering transform to deal with a nonlinear partial differential equation. Based on Hirota's method, the soliton solutions of the modified nonlinear Schrödinger (MNLS) equation under standing wave boundary condition, are obtained; and by simple method of parameter vanishing, the corresponding soliton solutions of the derivative nonlinear Schrödinger (DNLS) equation under constant nonvanishing boundary condition, are gotten, which allows the existence of both bright and dark solitons. The evolution of bright/ dark-soliton solutions in time and space is demonstrated in figures. The results are consistent with what were obtained by the inverse scattering transform.

Key words soliton; nonlinear equation; modified nonlinear Schrödinger equation; derivative nonlinear Schrödinger equation; Hirota method; Hirota's bilinear derivative transformation

自然界存在两类稳定的波动状态, 一类稳定波动存在于线性且无色散的均匀媒质中, 因为非线性效应和色散效应都会破坏波的稳定性。但

是, 当传波媒质的非线性效应与色散效应达到一种精致而稳定的平衡并相互抵消的时候, 媒质中又会产生一种孤立、稳定的局域波动, 称为孤立波

收稿日期: 2023-05-28

作者简介: 周国全, 男, 副教授, 研究方向为非线性可积方程及孤子理论, 电磁场理论, zgq@whu.edu.cn。

引文格式: 周国全, 雒润嘉, 齐莹. 基于 Hirota 方法探求非零边界条件下 MNLS/DNLS 方程的孤子解[J]. 物理与工程, 2023, 33(4): 79-84.

Cite this article: ZHOU G Q, LUO R J, QI Y. Soliton solution of MNLS/DNLS equation with nonvanishing boundary condition based on Hirota method[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(4): 79-84. (in Chinese)

(solitary wave), 即第二类稳定传播的波动现象^[1]。描述这类孤立、稳定且局域的波动现象在时空中的演化过程的偏微分方程, 称为可积非线性微分方程。可积非线性方程既有非线性项, 又有色散项, 可以改写成一对关于时空变量的线性演化方程(所谓 Lax pair)的可积条件^[1], 也称为相容性条件(compatibility condition), 或者零曲率条件(zero-curvature condition)。一些稳定的孤立波之所以被称为孤子(soliton), 是因为它们的传播呈现一种经典的准粒子运动状态, 其相互间的碰撞过程类似于弹性粒子之间的碰撞。孤子种类很多, 诸如亮/暗孤子、呼吸子、高阶孤子、流氓波(rogue wave), 并且各具不同的物理背景, 比如光纤中传播的光孤子, 等离子体中传播的阿尔芬孤波, QCD 的规范量子场微分方程的真空瞬子(instanton), 等等。本文专注于讨论非线性光纤光学中的光孤子理论。

光孤子理论应用于光纤通信领域, 十分重要, 广受关注^[1]。将在单模光纤中传播的皮秒或飞秒级超短脉冲激光波包函数记为 $u(x, t)$ (正比于激光脉冲的电场分量), 在考虑了自相位调制和自陡变效应以后, $u(x, t)$ 满足修正的非线性薛定谔(MNLS)方程^[2]

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\partial_x(|u|^2 u) + 2\gamma|u|^2 u = 0 \quad (1)$$

其中含参数 γ 的项量化体现了电场引起的非线性克尔效应, 注意实际上 x 是时间变量, 而 t 是空间变量, (这是为了与其他领域的某些非线性模型拥有统一的微分方程, 从而发展出统一的解决方案^[1-3])。若将参数 γ 归零或进行类规范变换^[3,4], MNLS 方程(1)可演变为导数非线性薛定谔(DNLS)方程

$$i\partial_t v + \partial_x^2 v + i\partial_x(|v|^2 v) = 0 \quad (2)$$

上述 DNLS 方程(2)中的 $v(x, t)$ 可用于描述等离子体中的阿尔芬孤波和一些铁磁/反铁磁介质中传播的弱非线性电磁波^[5-8]。

探求非线性可积方程的各类孤子解的常见方法有反散射(inverse scattering)变换, Daboux 变换, Bäcklund 变换等间接方法, 和 Hirota 双线性导数变换等直接方法。对于非零边界条件下 DNLS 方程的求解, 使用 Bäcklund 变换法将会得到矩阵形式解, 它并不适合直观地演示孤子的相互作用^[9]; 而反散射变换法将会遇到黎曼面上的

多值问题和发散的围道积分, 迂回曲折, 繁难费时。Hirota 方法更为直观简便, 它结合摄动微扰技术, 对方程的非零边界条件的预设更少, 能够求解各类不同的孤子解。本文即采用 Hirota 双线性导数变换法求解 MNLS/DNLS 在非零特殊边界条件下的亮/暗孤子解。

在 MNLS 方程提出后不久, 它在零边界条件下的孤子解已被学者们用反散射变换法求得^[1,2]。文献[6]使用 Hirota 方法求得了 MNLS 方程在平面波背景下的特殊流氓波解。至于 DNLS 方程, 文献[11-13, 4, 14-16]分别用不同方法求出了该方程在零/非零边界条件下的亮/暗单孤子或 N 孤子解, 纯孤子/呼吸子或混合孤子解; 文献[17]运用 Hirota 方法求得 DNLS 方程的特殊流氓波解和空间周期解。迄今未见有人尝试用 Hirota 方法探求非零边界条件下的 MNLS/DNLS 方程的亮/暗孤子解或呼吸子解。本文以 MNLS 方程为例, 介绍了 Hirota 双线性导数变换的定义与性质, 及其应用于非线性可积方程的一般手续与技巧; 尝试并成功地求解了 MNLS 方程在驻波边界条件下的孤子解, 并在其微扰参数 γ 趋近于零时, 使该解退化为 DNLS 方程在常数边界条件下的亮/暗孤子解。最后我们还讨论了微扰强弱——参数 γ 的大小、背景波振幅对亮/暗孤子行为的影响。

1 Hirota 双线性导数变换

Hirota 最先引入双线性导数变换——即一个双 D 算符, 用来处理一些偏微分方程^[18,19], 其定义为

$$D_t^m D_x^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial/\partial t - \partial/\partial t')^m \cdot (\partial/\partial x - \partial/\partial x')^n f(x, t) g(x', t')|_{t'=t, x'=x} \quad (3)$$

其中符号 $\cdot$ 代表 f, g 之间的有序乘积, 当 m 或 n 为 1 时可省去上标, 例如

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x = -D_x g \cdot f \quad (4)$$

$$D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx} = D_x^2 g \cdot f \quad (5)$$

$$D_x^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3f_{xx} g_x + 3f_x g_{xx} - f g_{xxx} = -D_x^3 g \cdot f \quad (6)$$

易证 Hirota 双线性导数变换具有若干重要性质: 性质 1:

$$D_t^m D_x^n f \cdot g = (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n g \cdot f \quad (7)$$

特别地,当 $m+n$ 为奇数时,

$$D_t^m D_x^n f \cdot f = -D_t^m D_x^n f \cdot f = 0 \quad (8)$$

性质 2:若 C 为常数,有

$$D_x^n C \cdot f = -\partial_x^n f \quad (9)$$

性质 3:设 $\eta_j = \omega_j t + k_j x + \eta_j^0$, 其中 $j=1, 2, \omega_j$ 和 k_j 均为复常数,则有

$$D_t^m D_x^n e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = (\omega_1 - \omega_2)^m (k_1 - k_2)^n e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (10)$$

推论,具有相同系数的线性指数函数的双线性导数为零,即当 $\omega_1 = \omega_2$ 或 $k_1 = k_2$ 时

$$D_t^m D_x^n e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = 0 \quad (11)$$

为应用上述 D 算符的便利的性质,将方程转化为仅含双线性 D 算符而不含其他普通偏导算符的形式,即双线性形式,分离变量后将其拆解为双线性方程组。

2 MNLS/DNLS 方程的双线性导数形式及其孤子解

参考 MNLS/DNLS 方程的孤子解所具有的典型形式^[4,6-8,12,14,16]

$$u = g\bar{f}/f^2 \quad (12)$$

本文将上式作为 MNLS 方程未知解函数的变换形式。据定义(3),可以给出如下两个常用的双线性导数变换公式

$$(f/g)_x = (D_x f \cdot g)/g^2 \quad (13)$$

$$(f/g)_{xx} = (D_x^2 f \cdot g)/g^2 - f(D_x^2 g \cdot g)/g^3 \quad (14)$$

运用以上公式,可得

$$u_t = \frac{D_t g \cdot f}{f^2} \frac{f}{f} + \frac{g}{f} \frac{D_t \bar{f} \cdot f}{f^2} \quad (15)$$

$$u_{xx} = \left(\frac{D_x^2 g \cdot f}{f^2} - \frac{g}{f} \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right) \frac{f}{f} + 2 \frac{D_x g \cdot f}{f^2} \frac{D_x \bar{f} \cdot f}{f^2} + \frac{g}{f} \left(\frac{D_x^2 \bar{f} \cdot f}{f^2} - \frac{f}{f} \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right) \quad (16)$$

$$\partial_x (|u|^2 u) = 2 \frac{g}{f} \frac{D_x g \cdot f}{f^2} + \frac{g^2}{f^2} \frac{D_x \bar{g} \cdot f}{f^2} \quad (17)$$

将上述各式代入 MNLS 方程,可得

$$\begin{aligned} & i \frac{f\bar{f}}{f^4} D_t g \cdot f + i \frac{f\bar{g}}{f^4} D_t \bar{f} \cdot f + \frac{\bar{f}f}{f^4} D_x^2 g \cdot f - \\ & \frac{2g\bar{f}}{f^4} D_x^2 f \cdot f + \frac{2}{f^4} (D_x g \cdot f) (D_x \bar{f} \cdot f) + \\ & \frac{g\bar{f}}{f^4} D_x^2 \bar{f} \cdot f + i 2 \frac{g\bar{g}}{f^4} D_x g \cdot f + i \frac{g^2}{f^4} D_x \bar{g} \cdot f + \\ & 2\gamma \frac{g^2 \bar{g}}{f^3} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

将上式两边分别乘以 f^4 , 合并化简得仅含 D 算符的双线性导数形式

$$\begin{aligned} & f\bar{f}(iD_t + D_x^2)g \cdot f + 2\gamma g^2 \bar{g}f - \\ & fg(iD_t + D_x^2)f \cdot \bar{f} + \\ & f^{-2} \{ D_x f^3 \cdot [g(2D_x f \cdot \bar{f} - ig\bar{g})] \} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

不同于零边界条件的处理方法^[15],为得到非零边界条件下的解,引入参数 λ ,将上式(19)拆分为如下双线性方程组:

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda)g \cdot f = 0 \quad (20)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda)f \cdot \bar{f} = 2\gamma g\bar{g} \quad (21)$$

$$D_x f \cdot \bar{f} = (i/2)g\bar{g} \quad (22)$$

其中 λ 的取值取决于函数 f, g 的函数形式、 γ 的取值及其正负,以及 $u(x, t)$ 在无穷远处的边界条件。先将函数 f, g 展开为摄动微扰参数 ϵ 的无穷级数

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)}, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i g^{(i)} \quad (23)$$

代入式(20)~式(22)后,再将变换后的方程展开为摄动微扰参数 ϵ 的无穷级数,合并整理,比较方程两边参数 ϵ^n 的同幂项,得到

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) \left(\sum_{j=0}^n g^{(j)} \cdot f^{(n-j)} \right) = 0 \quad (24)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda + 4i\gamma D_x) \left(\sum_{j=0}^n f^{(j)} \cdot \overline{f^{(n-j)}} \right) = 0 \quad (25)$$

$$D_x \left(\sum_{j=0}^n f^{(j)} \cdot \overline{f^{(n-j)}} \right) = (i/2) \left(\sum_{j=0}^n g^{(j)} \cdot \overline{g^{(n-j)}} \right) \quad (26)$$

其中式(25)由式(21),式(22)导出。 n 可取 $0, 1, 2, \dots, \infty$, 即有无穷组这样的方程。

现在设定 $f^{(i)} = 0, i \geq 2, g^{(i)} = 0, i \geq 2$ 。这是使得式(23)中仅剩对应于单孤子解的相关级数项,同时满足双线性方程,即单孤子截断的充分不

必要条件。换言之, Hirota 方法选择了单孤子解^[14]。涉及到式(24)~式(26)中 $\epsilon=0,1,2$ 三组共 9 个方程:

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda + 4i\gamma D_x) f^{(0)} \cdot \overline{f^{(0)}} = 0 \quad (27)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda + 4i\gamma D_x) \cdot$$

$$(f^{(0)} \cdot \overline{f^{(1)}} + f^{(1)} \cdot \overline{f^{(0)}}) = 0 \quad (28)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda + 4i\gamma D_x) f^{(1)} \cdot \overline{f^{(1)}} = 0 \quad (29)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) g^{(0)} \cdot f^{(0)} = 0 \quad (30)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) (g^{(0)} \cdot f^{(1)} + g^{(1)} \cdot f^{(0)}) = 0 \quad (31)$$

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) g^{(1)} \cdot f^{(1)} = 0 \quad (32)$$

$$(i/2) g^{(0)} \overline{g^{(0)}} = D_x f^{(0)} \cdot \overline{f^{(0)}} \quad (33)$$

$$(i/2) (g^{(0)} \overline{g^{(1)}} + g^{(1)} \overline{g^{(0)}}) = D_x (f^{(0)} \cdot \overline{f^{(1)}} + f^{(1)} \cdot \overline{f^{(0)}}) \quad (34)$$

$$(i/2) g^{(1)} \overline{g^{(1)}} = D_x f^{(1)} \cdot \overline{f^{(1)}} \quad (35)$$

考虑到 Hirota 双线性导数变化法探求非线性可积方程的孤子解的关键手段是将未知函数 f, g 展开为线性指数函数的级数, 不失一般性, 将 f, g 的各阶微扰项写作线性指数函数。对于形如 $h(x, t) = e^{i\phi_1} e^{i\phi_2}$, $\phi_j = \omega_j t + k_j x + \phi_j^{(0)}$ ($j=1, 2$) 的指数函数, 从双线性导数方程

$$\sum_{m,n} D_t^m D_x^n h \cdot \bar{h} = \sum_{m,n} (2i\omega_1)^m (2ik_1)^n = 0 \quad (36)$$

仅能得到函数 $h(x, t)$ 的辐角的变量前的参数 ω_1, k_1 的相关方程。式(27)正是这种形式, 即无法从中得到 $f^{(0)}$ 的辐角中的常数项和模的信息, 不妨将它们吸收入 $g^{(0)}$ 的表达式中。鉴于式(12)的 u 表达式中含有 f, g 之商, 此举不失一般性, 即假设 $f^{(0)} = e^{i\xi_0}$, $\xi_0 = \omega_0 t + k_0 x$ 。 $f^{(0)}, f^{(1)}$ 分别满足的式(27)、式(29)完全一致, 且形如式(36), 即 $f^{(0)}$ 与 $f^{(1)}$ 的辐角满足同一微分方程, 可以假设 $f^{(0)}, f^{(1)}$ 的辐角仅相差一常数:

$$f^{(1)} = e^{\omega_0 t + k_0 x + \xi_1^{(0)}} e^\eta = f^{(0)} e^{i\xi_1^{(0)}} e^\eta, \quad \eta(x, t) = \tau t + \kappa x + \eta^{(0)} \quad (37)$$

其中所有常参数 $\omega_0, k_0, \xi_1^{(0)}, \tau, \kappa, \eta^{(0)}$ 均为实数。

将 $g^{(0)}$ 写作 $g^{(0)} = \rho e^{ia_0}$, $a_0 = a_0 t + b_0 x$, 其中 a_0, b_0 为实数, ρ 可以取复数值。将 $f^{(0)}, f^{(1)}$ 代入式(33)、式(35), 得到 $|g^{(1)}|^2 = |\rho|^2 e^{2\eta}$, 不妨将 $g^{(1)}$ 写作

$$g^{(1)} = \rho e^{ia_1} e^\eta, \quad a_1 = a_1 t + b_1 x + \alpha_1^{(0)} \quad (38)$$

其中 $a_1, b_1, \alpha_1^{(0)}$ 为实数。再将 $f^{(0)}, f^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}$ 代入式(32), 可得

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) \rho e^{i(a_1 t + b_1 x)} \cdot f^{(0)} = 0 \quad (39)$$

代入式(30), 可得

$$(iD_t + D_x^2 - \lambda) \rho e^{i(a_0 t + b_0 x)} \cdot f^{(0)} = 0 \quad (40)$$

不妨假设 $a_0 = a_1, b_0 = b_1$, 得到 f, g 的表达式

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = e^{i\xi_0} (1 + e^{i\xi_1^{(0)}} e^\eta) \quad (41)$$

$$g = g^{(0)} + g^{(1)} = \rho e^{ia_0} (1 + e^{ia_1^{(0)}} e^\eta) \quad (42)$$

其中

$$\xi_0 = \omega_0 t + k_0 x; \alpha_0 = a_0 t + b_0 x; \eta = \tau t + \kappa x + \eta^{(0)} \quad (43)$$

当我们需要 $e^\eta \rightarrow +\infty$, 在 $x \rightarrow \pm\infty$ 或 $t \rightarrow \pm\infty$ 时 (取决于时间空间变量前的系数正负性, 例如在 $\tau > 0, \kappa > 0$ 时, $x \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow +\infty$), 我们有

$$u = \rho e^{i(a_0 - 3\xi_0)} e^{i(a_1^{(0)} - 3\xi_1^{(0)})} \quad (44)$$

而当边界条件使得 $e^\eta \rightarrow 0$ 时, u 的边界极限取值与上式(44)仅差一常数相因子。由以上分析可见, 若 α_0 与 ξ_0 简单地取 x, t 的线性函数, 通过 Hirota 双线性导数变换法可以求解的非零边界条件的类型有常数边界、平面波边界、驻波或正/余弦边界。要使波函数在无穷远处趋近于驻波边界条件, 即只含时间变量 x , 即让 $\alpha_0 - 3\xi_0$ 仅随时间参量 x 改变, 可以假定 α_0, ξ_0 中 t 的参数均为零, 即 $\omega_0 = a_0 = 0$ 。值得注意的是, 分析发现, 使用 Hirota 方法无法得到 MNLS 在常数边界条件的解, 因为它会导致式(27)与式(30)两式矛盾。

将解中 $f^{(0)}$ 和 $g^{(0)}$ 代入式(27), 式(30), 式(33), 同时考虑边界条件上述约束, 得到

$$k_0 = (1/4) |\rho|^2, \quad b_0 = (1/4) |\rho|^2 \pm \sqrt{(1/4) |\rho|^4 + 2\gamma |\rho|^2}, \quad \lambda = -(1/4) |\rho|^2 - 2\gamma |\rho|^2 \quad (45)$$

将其中各参数表达为 ρ 与 γ 的函数, 以便根据给定的具体边界条件与微扰项 γ 值来拟合理论解中的参数。

将获得的 $f^{(0)}, f^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}$ 表达式代入式(28), 式(31), 式(34), 得到含 $e^{i\xi_1^{(0)}}, e^{ia_1^{(0)}}, \tau, \kappa$ 四个未知数的三个方程, 不妨将其余三者用 $\xi_1^{(0)}$ 表示:

$$\alpha_j^{(0)} = \xi_j^{(0)} + \arccos(\cos^2 \xi_j^{(0)} + (\Delta - 1) \sin^2 \xi_j^{(0)}), \quad \Delta = 2(|\rho|^2 \mp \sqrt{|\rho|^4 + 8\gamma |\rho|^2} + 4\gamma) / |\rho|^2 \quad (46)$$

$$\kappa = (1/2) |\rho|^2 (\cos \alpha_1^{(0)} - \cos \xi_1^{(0)}) / \sin \xi_1^{(0)},$$

$$\tau = -4(\gamma + k_0) \kappa + \cot \xi_1^{(0)} \kappa^2 \quad (47)$$

而式(29),式(32),式(35)中包含的信息在寻找孤子解的过程中已经运用。至此我们得到 MNLS 方程在驻波边界条件下的单孤子解

$$u = \rho e^{i(b_0 - 3k_0)x} (1 + e^{ia_1^{(0)}} e^\eta) (1 + e^{-i\xi_1^{(0)}} e^\eta) /$$

$$(1 + e^{i\xi_1^{(0)}} e^\eta)^2 \quad (48)$$

其中 $\eta = \tau t + \kappa x + \eta^{(0)}$, 各常数参数取值见式(45)~式(47)。将 $\rho, \gamma, e^{i\xi_1^{(0)}}$ 视作可调节参数。取特殊参数值作图,如图 1 所示,它对应着在波导中传播的超短脉冲的电场的绝对值的时空演化。其中 (a) 单孤子振幅绝对值大于背景波,为亮孤子; (b) 中单孤子振幅绝对值小于背景波,为暗孤子。以图 1(a) 为例,取 $t = t_0$ ($-\infty < t_0 < +\infty$) 做截面,得到光脉冲电场随时间的演化,即一个突然出现又消失的孤立波峰;而不同 t_0 对应的截面的波形类似,也就是波形随空间演化平移不变。

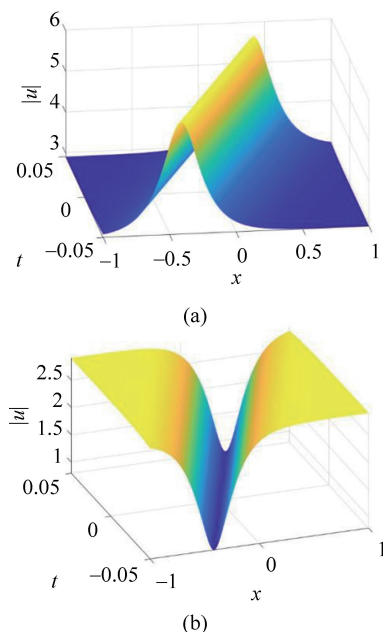


图 1 MNLS 方程的暗、亮孤子解

其中 (a) $\rho = 2.9, \xi_1^{(0)} = \pi/3, \gamma = -1$; (b) $\rho = 2.9, \xi_1^{(0)} = 4\pi/3, \gamma = -1$

当 MNLS 方程的参数 γ 取零时,前述孤子解退化为 DNLS 方程的孤子解

$$u = \rho (1 + e^{i3\xi_1^{(0)}} e^\eta) (1 + e^{-i\xi_1^{(0)}} e^\eta) / (1 + e^{i\xi_1^{(0)}} e^\eta)^2 \quad (49)$$

其中

$$\eta = -|\rho|^2 \sin 2\xi_1^{(0)} (x - |\rho|^2 (1 + 2\cos^2 \xi_1^{(0)}) t + \eta_1^{(0)}) \quad (50)$$

$$k_0 = (1/4) |\rho|^2, \quad b_0 = (3/4) |\rho|^2 \quad (51)$$

$$\alpha_1^{(0)} = 3\xi_1^{(0)}, \quad \kappa = -|\rho|^2 \sin 2\xi_1^{(0)},$$

$$\tau = |\rho|^4 \sin 2\xi_1^{(0)} (1 + 2\cos^2 \xi_1^{(0)}) \quad (52)$$

$\gamma = 0$ 时,上面的解满足边界条件 $u = \rho$, 当 $e^\eta \rightarrow +\infty$, 即 $x \rightarrow \pm\infty$ 或 $t \rightarrow \pm\infty$ 时(取决于时间空间变量前的系数正负性,例如在 $\tau > 0, \kappa > 0$ 时, $x \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow +\infty$),即 MNLS 的驻波/简谐波边界条件,在 γ 趋近于零时对应于 DNLS 的非零常数边界条件。这与文献[8,14]利用改进的反散射法得到的常数边界条件下 DNLS 方程的纯孤子解一致。两种方法对比可知,本文 Hirota 方法得到的 DNLS 方程的孤子解中的复常参数 $\rho e^{i\xi_1^{(0)}}$ 对应于反散射法[14]中围道积分的极点。如图 2 所示,当复常参数取不同的特殊值(相差 π 的相位)时,可分别得到亮/暗孤子解。

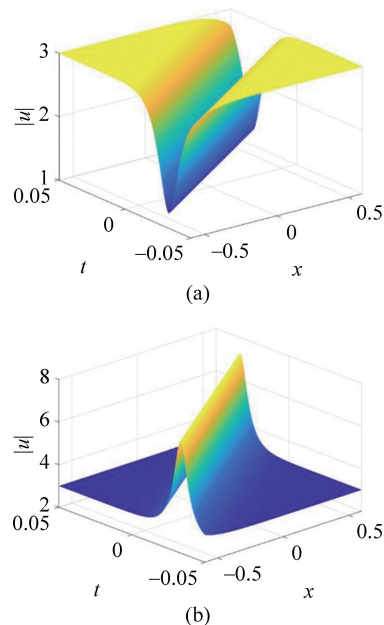


图 2 DNLS 方程的暗/亮孤子解

其中 (a) $\rho = 3, \xi_1^{(0)} = \pi/4$; (b) $\rho = 3, \xi_1^{(0)} = 5\pi/4$

当参数 γ 趋近于 0 (但不等于 0) 时, MNLS 方程的孤子解趋近于 DNLS 方程的孤子解。为探究 γ 不为零带来的新特点,固定 ρ , 将解减去背景波的影响,分析发现随着 γ 趋近于零,孤子变高变窄,反之则变矮变宽,即微扰项让 DNLS 方程的孤子解弥散。另一方面,如图 3 所示,随着背景波振幅 ρ 的增加,孤子变高变窄,即更剧烈的背景振荡

将更突显孤子的存在。注意到 γ 作为 MNLS 方程在 DNLS 方程基础上的微扰强度的度量, 对 MNLS 方程单孤子解的影响远不及背景波振幅的影响。

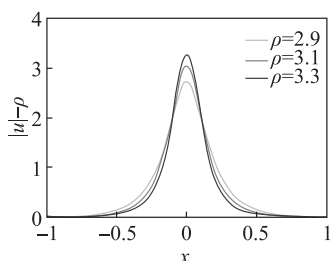


图3 孤子波模与背景波模高差随背景波振幅 ρ 的变化

3 结语

本文展示了运用 Hirota 双线性导数变换法求解非线性可积方程的全部手续与过程; 以 MNLS 方程为例求出其在驻波边界条件下的亮/暗单孤子解。通过参数归零法使 MNLS 方程退化为 DNLS 方程时, 该解自然地变为 DNLS 方程在常数边界条件下的亮/暗孤子解, 并与运用修改的反散射法求得的孤子解完全一致。通过对比, 找到了两种方法等价结果的对应参数关系。同时研究表明, 微扰项导致孤子解的弥散, 更剧烈的背景振荡将更突显孤子的存在。

参 考 文 献

- [1] ABHINAV K, GUHA P, MUKHERJEE I. Study of quasi-integrable and non-holonomic deformation of equations in the NLS and DNLS hierarchy[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 2018, 59(10). DOI:10.1063/1.5019268.
- [2] SONG Y, SHI X, WU C, et al. Recent progress of study on optical solitons in fiber lasers[J/OL]. Applied Physics Reviews, 2019, 6(2). DOI:10.1063/1.5091811.
- [3] CHEN Z Y, HUANG N N. Explicit N-soliton solution of the modified nonlinear Schrödinger equation[R]//PHYSICAL REVIEW A: 卷 41. 1990.
- [4] LASHKIN V M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, 40(23): 6119-6132. DOI:10.1088/1751-8113/40/23/008.
- [5] KHALIQUE C M, PLAATJIE K, ADEYEMO O D. First integrals, solutions and conservation laws of the derivative nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2022, 5. DOI:10.1016/j.padiff.2022.100382.
- [6] 唐宇轩, 周国全. 用 Hirota 双线性导数变换法求 MNLS 方程的 Rogue 波解[J]. 数学物理学报, 2023, 43(A(1)):

132-142.

- TANG Y X, ZHOU G Q. The Rogue wave solution of MNLS/DNLS equation based on Hirota's bi-linear derivative transformation[J]. Acta Mathematica Scientia, 2023, 43, A(1): 132-142. (in Chinese)
- [7] CAI H. Research about MNLS Equation and DNLS Equation[D]. Wuhan: Wuhan University, 2005.
- [8] CHEN X J, YANG J, LAM W K. N-soliton solution for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(13): 3263. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/39/13/006>. DOI:10.1088/0305-4470/39/13/006.
- [9] MJØLHUS E, HADA T. Nonlinear waves and chaos in space plasmas[M]. Tokyo, 1997.
- [10] CHEN X J, YANG J, LAM W K. N-soliton solution for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(13): 3263-3274. DOI:10.1088/0305-4470/39/13/006.
- [11] KAUP D J, NEWELL A C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1977, 19(4): 798-801. DOI:10.1063/1.523737.
- [12] ZHOU G Q, HUANG N N. An N-soliton solution to the DNLS equation based on a revised inverse scattering transform[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, 40.
- [13] NIAN-NING HUANG, ZONG-YUN CHEN. Alfvén solitons[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1990, 23(4): 439. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/23/4/014>. DOI:10.1088/0305-4470/23/4/014.
- [14] ZHOU G Q. Explicit breather-type and pure N-soliton solution of DNLS+ equation with nonvanishing boundary condition[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2013, 18: 147-155.
- [15] ZHOU G Q, BI X T. Soliton solution of the DNLS equation based on Hirota's bilinear derivative transform[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2009, 14: 505-510.
- [16] LI X J, ZHOU G Q. Mixed breather-type and pure soliton solution of DNLS equation[J/OL]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2017, 22(3): 223-232. <https://doi.org/10.1007/s11859-017-1239-0>. DOI:10.1007/s11859-017-1239-0.
- [17] ZHOU G Q, LI X J. Space periodic solutions and rogue wave solution of the derivative nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2017, 22: 373-379. DOI:10.1007/s11859-017-1261-2.
- [18] HIETARINTA J, NIMMO J. Foreword[M]//BOLLOBAS B, FULTON W, KATOK A, et al. The Direct Method in Soliton Theory. New York: Cambridge University Press, 2004: vii-viii.
- [19] HIROTA R. The direct method in soliton theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2004.