

运动声源的多普勒效应

——第22届亚洲物理奥林匹克竞赛实验试题第二题介绍与解析

钱 钧^{1,2} 张春玲^{1,2} 李文华^{1,2} 赵明刚¹ 刘丽飒^{1,2} 惠王伟^{1,2} 王 瑾^{1,2} 张天浩¹ 孔勇发^{1,2} 宋 峰¹
(南开大学¹物理科学学院; ²基础物理国家级实验教学示范中心, 天津 300071)

摘 要 第22届亚洲物理奥林匹克竞赛实验试题共两道, 其中第二道是声学黑匣子。该题目是一道虚拟实验题目, 在二维平面上通过探测器对于运动声源的频率信号探测, 判断声源的初始位置以及相关运动学参数等。该题目设计新颖, 解法巧妙, 综合了声波的传播与测量、声学多普勒效应等相关知识。在疫情形势下, 非常适合物理专业学生进行线上虚拟实验学习。本文详细介绍了竞赛试题的内容, 并给出试题的分析和解答。

关键词 亚洲物理奥林匹克竞赛; 多普勒效应; 声学; 虚拟实验

DOPPLER EFFECT OF MOVING SOUND SOURCE

—PROBLEMS AND SOLUTIONS OF THE 22TH ASIAN PHYSICS OLYMPIAD EXPERIMENTAL EXAM 2

QIAN Jun^{1,2} ZHANG Chunling^{1,2} LI Wenhua^{1,2} ZHAO Minggang¹ LIU Lisa^{1,2} HUI Wangwei^{1,2}
WANG Jin^{1,2} ZHANG Tianhao¹ KONG Yongfa^{1,2} SONG Feng¹

(¹School of Physics; ²National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Nankai University, Tianjin300071)

Abstract There are two experimental exams in the 22nd Asian Physics Olympiad, the second of which is the acoustic black box. This experimental question is a virtual experiment question, which detects the frequency signal of the moving sound source through the detector on the two-dimensional plane, and determines the position of the sound source and related kinematic parameters. This topic is novel in design and ingenious in solution, integrating the propagation and measurement of sound waves, acoustic Doppler effect and other related knowledge. Under the epidemic situation, it is very suitable for students majoring in physics to carry out online virtual experimental learning. This paper introduces the content of the experimental exam 2 in detail, and gives the analysis and the solutions to the problems.

Key words Asian Physics Olympiad exam; Doppler effect; acoustics; virtual experiment

第22届亚洲物理奥林匹克竞赛于2022年5月23—31日在印度举行。因受新冠疫情影响, 竞

赛采取线上、线下融合方式, 理论/实验竞赛由参赛各国设立线下考场进行, 题目讨论和翻译通过

收稿日期: 2022-11-21

基金项目: 教育部产学合作协同育人项目(No. 220802557262257)。

作者简介: 钱钧, 男, 副教授, 主要从事物理实验教学和微纳光学方面研究工作, qianjun@nankai.edu.cn。

通讯作者: 张春玲, 女, 副教授, 主要从事物理实验教学和非线性光学研究工作, zhangchl@nankai.edu.cn。

引文格式: 钱钧, 张春玲, 李文华, 等. 运动声源的多普勒效应——第22届亚洲物理奥林匹克竞赛实验试题第二题介绍与解析[J]. 物理与工程, 2023, 33(4): 26-30, 35.

Cite this article: QIAN J, ZHANG C L, LI W H, et al. Doppler effect of moving sound source—Problems and solutions of the 22th Asian Physics Olympiad experimental exam 2[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(4): 26-30, 35. (in Chinese)

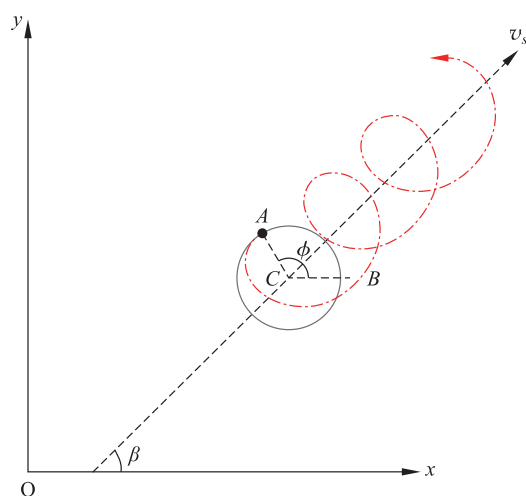
线上进行,学生的答卷等资料扫描上传评阅。南开大学物理科学学院率领中国代表队参加了此次竞赛,获得 7 枚金牌和 1 枚银牌,并取得团体总分第一。

本次竞赛的实验试题共有二道^[1,2],均为虚拟仿真实验,其中第二题是声学黑匣子实验。在本题中,在二维平面上存在一个运动声源,声源绕着一个匀速直线运动的圆心作圆周运动,通过可变位置的探测器对声源频率信号进行测量,判断声源的初始位置以及相关运动学参数等。这道虚拟实验题目,设计新颖,解法巧妙,综合了波的传播与测量、声学多普勒效应等相关知识。本文中做一个较为详细的介绍与分析,下文的第一部分介绍题目,第二部分详细作答和分析。

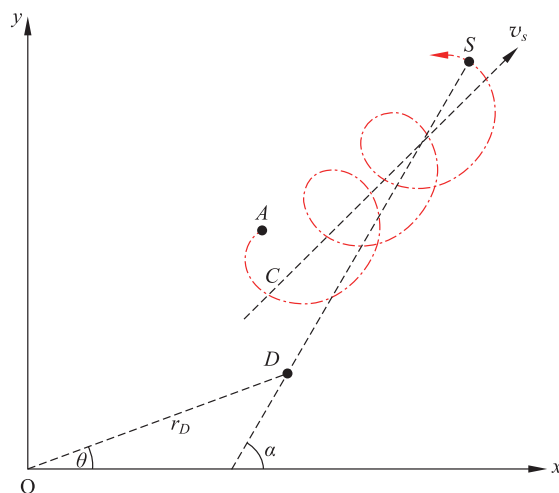
1 实验题目介绍

如图 1 所示,声源在 x - y 平面上半径为 R 的圆周上以恒定角速度 ω 运动,同时圆心以匀速 v_s 运动, v_s 与 x 轴正方向夹角为 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$)。图 1 中红色点划线为声源的运动轨迹。在 $t=0$ 时刻,圆心位于 C 点,其坐标为 (X_C, Y_C) ,声源的位置可以由 C 指向 A 的矢量 $\vec{CA}$ 表示。此外,在 $t=0$ 时刻,声源 S 开始沿逆时针方向运动,并同时发出频率为 f_0 的声音。在 $t=0$ 时刻,矢量 $\vec{CA}$ 与 x 轴正方向的夹角为 ϕ (在图 1(a)中 $\angle BCA = \phi$)。探测器 D 在同一平面(x - y)中,其到原点的距离是 r_D ,其位置矢量与 x 轴正方向夹角为 θ 。探测器 D 和声源 S 的连线与 x 轴成一个夹角 α ,声源与探测器仅在 x - y 平面上运动。声速 $c = 330\text{m/s}$ 。声源运动的速度小于声速 c 。在 c 时刻,探测器探测到的声源发声频率为 $f(t)$,仿真模拟展示了探测到的频率 $f(t)$ 。

如图 2 所示,实验模拟面板分为两部分。上半部分为输入面板,用于输入探测器参数、模拟起止时间和数据点时间间隔等。其中 r_D 是探测器 D 到原点的距离, θ 是探测器位置矢量与 x 轴正方向夹角, v_d 是探测器匀速运动的速率, γ 是速度矢量 $\vec{v}_d$ 与 x 轴的夹角。Graph Start time (t_i) 是模拟开始时间, Graph End time (t_f) 是模拟结束时间, Data-point-interval (Δ) 是采集数据点的时间间隔(这一时间间隔只能是 0.001 秒的倍数)。下半部分为显示面板,展示了探测器在 t 时刻探



(a)



(b)

图 1 声源和探测器的相对位置
(a) 声源的起始位置; (b) 探测器的位置

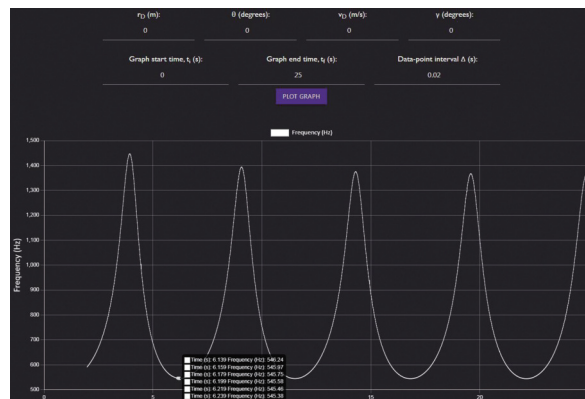


图 2 实验模拟面板

测到的频率曲线 $f(t)$ 。点击“PLOT GRAPH”按键,程序开始模拟,在显示面板中将展示模拟开

始时间(t_i)至模拟结束时间(t_f)内的 $f(t)$ 曲线。图 2 中,展示了 0~25 秒范围内的 $f(t)$ 曲线。实验中需要注意,如果数据采集间隔(Δ)设置得过小(比如 0.001),并绘制很长时间范围的曲线,模拟可能会卡住,和计算机的内存容量有关。在进行模拟时,计算机最多能够画出 25000 个数据点。将光标放置在曲线的相应数据点时,屏幕会显示数据点的坐标值。

本题共分为 7 个小题,如下,满分共 10 分。

A.1(0.2 分)用 β, ϕ, v_s 和相关物理量表达声源的轨迹 $x(t), y(t)$ 。

A.2(1.2 分)在模拟中,将探测器固定在 $r_D = \theta = 0$ 处。观察模拟开始和结束时间分别为 5 秒和 55 秒之间的 $f(t)$ 输出曲线。将此时间范围内所有的极小值($f_{\min}$ 和相应时间 t)制成表格,并绘制 $f_{\min}$ 随时间 t 变化的曲线。

A.3(1.0 分)探测器保持静止时,求得最终(时间趋于无穷大)测得的最小频率的表达式,用 v_s, ω, R 和相关变量表示。

A.4(1.4 分)求出声源的初始坐标(X_A, Y_A),即 $t=0$ 时刻 A 点的坐标,单位为米。

A.5(2.1 分)求出 f_0, ω, R, v_s 的值。

A.6(2.0 分)求出 β 的值。

A.7(2.1 分)求出声源的初始中心坐标(X_C, Y_C),即 C 点的坐标,单位为米。

2 试题解答与分析

2.1 A.1 部分: 声源的轨迹

由图 1 所示,我们容易得到

$$x(t) = v_s t \cos(\beta) + R \cos(\omega t + \phi) + X_C \quad (1)$$

$$y(t) = v_s t \sin(\beta) + R \sin(\omega t + \phi) + Y_C \quad (2)$$

2.2 A.2 部分: $f_{\min}$ 随时间 t 的变化曲线

按照题目要求,设置 $r_D = \theta = 0$,此外,在本部分以及后面所有解答中,均设置 $v_D = \gamma = 0$ 。取模拟开始和结束时间分别为 5 秒和 55 秒,得到 $f(t)$ 输出曲线如图 3 所示。放置于图 3 中各个频率最小值 $f_{\min}$ 处,得到各点横纵坐标,如表 1 所示。根据表 1 数据绘制 $f_{\min}$ 随时间 t 的变化曲线(图 4)。从图中可以看到,随着时间的增大, $f_{\min}$ 随时间增大而变小,表示声源正在远离探测器运动。探测器接收到的频率不断出现最大和最小值,是由于声源自身的匀速圆周运动造成的,当声源圆周运

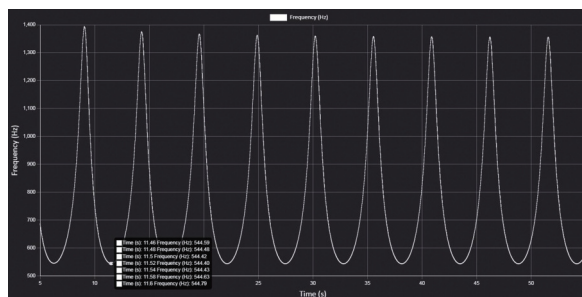


图 3 A.2 部分模拟输出曲线

动方向与 v_s 方向一致时,探测器接收到的频率为最小值;当声源圆周运动方向与 v_s 方向相反时,探测器接收到的频率为最大值。

表 1 频率最小各点的横纵坐标

t/s	6.26	11.52	16.82	22.14	27.46	32.80
$f_{\min}/\text{Hz}$	545.36	544.40	544.03	543.85	543.75	543.69
t/s	38.14	43.50	48.84	54.18	59.52	
$f_{\min}/\text{Hz}$	543.65	543.62	543.59	543.58	543.57	

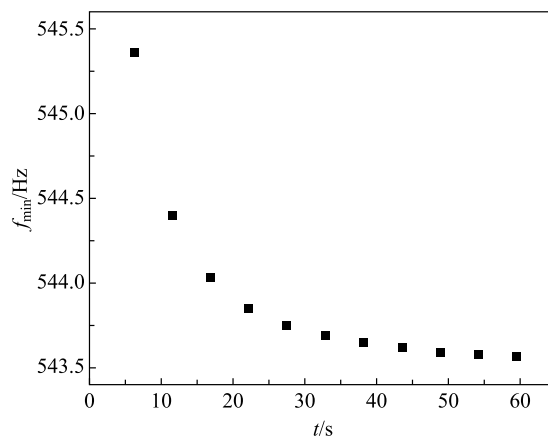


图 4 $f_{\min}$ 随时间 t 的变化曲线

2.3 A.3 部分: 最小频率的表达式

这里考虑更普遍的情况,即探测器 D 以速度 v_d 运动,声源做圆周运动的圆心以 v_s 运动,声源的净速度为 v_T 。如图 1(b)所示,探测器和声源的连线与 x 轴成 α 角, α 角是随时间变化的函数 $\alpha(t)$ 。令 $\hat{n}$ 为连接声源和探测器的单位矢量,当声源靠近探测器时,探测器探测到的频率为

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cdot \hat{n}(t)}{c - v_T \cdot \hat{n}(t)} \quad (3)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cdot \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [(v_s + R\omega\hat{\theta}) \cdot \hat{n}(t)]} \quad (4)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cdot \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [v_s \cos(\beta - \alpha(t)) + R\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2 - \alpha(t))]} \quad (5)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cdot \cos(\gamma - \alpha)}{c - [v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \cos(\omega t + \phi - \alpha(t))]} \quad (6)$$

同理,当声源远离探测器时,我们可以得到

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cdot \cos(\gamma - \alpha)}{c + [v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \cos(\omega t + \phi - \alpha(t))]} \quad (7)$$

当探测器静止时($v_d=0$),在系统最终状态($t \rightarrow \infty$)时,声源在探测器右侧无限远,可以认为在图1中的 $\alpha \approx \beta$,则最小频率的表达式为

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + (v_s + R\omega)} \quad (8)$$

2.4 A.4 部分: 声源的初始坐标

解答此部分,需要注意探测器接收到的曲线初始位置的横坐标,即为初始声波信号传播到探测器所需要的时间。设声源初始坐标为(x, y),可以将探测器D分别放置在 x 轴上和 y 轴上,探测器位置坐标分别为($x_1, 0$)和($0, y_1$),分别记录下探测器探测到初始声波信号的时间 Δt_{x1} 和 Δt_{y1} ,那么有

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (c\Delta t_{x1})^2 \quad (9)$$

$$x^2 + (y - y_1)^2 = (c\Delta t_{y1})^2 \quad (10)$$

由上述方程可以解得声源初始位置。在模拟中,我们取 $x_1 = y_1 = 500\text{m}$,测得 $\Delta t_{x1} = 1.5344\text{s}$, $\Delta t_{y1} = 1.2727\text{s}$,由式(9)和式(10)得到声源初始坐标

$$x_A = 419.99\text{m}, \quad y_A = 499.99\text{m}$$

2.5 A.5 部分: 求出 f_0, ω, R, v_s 的值

在这一部分中,我们将探测器固定放在 x 轴正方向很远的一点,这样我们可以观察到如下过程中探测器所接受到的信号:声源从距离探测器的左侧很远距离处,朝向探测器运动,经过探测器,再向探测器右侧远距离运动。

根据多普勒效应公式,当声源位于探测器左侧很远距离处,且近似在两者连线上运动时($\alpha \approx \beta$),探测器接收到的频率最大值和最小值为:

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c - (v_s + R\omega)} \quad (11)$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c - (v_s - R\omega)} \quad (12)$$

当声源位于探测器右侧很远距离处,可以认为 $\alpha \approx \beta$,探测器接收到的频率最大值和最小值为

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c + (v_s - R\omega)} \quad (13)$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + (v_s + R\omega)} \quad (14)$$

由式(11),式(12)可得

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c - v_s}{\omega R} \quad (15)$$

由式(13),式(14)可得:

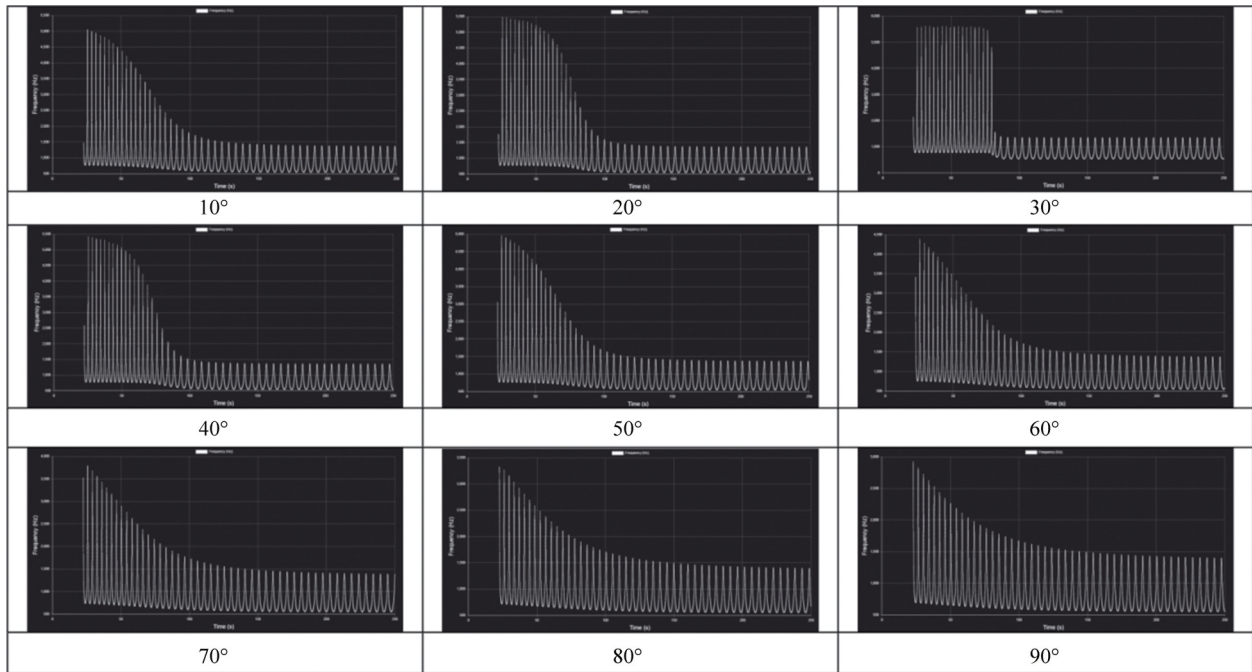
$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c + v_s}{\omega R} \quad (16)$$

上面我们根据多普勒效应公式,给出了特殊条件下的两个频率方程,其中 $f_{\min}$ 和 $f_{\max}$,可以从探测器接收到的曲线图中的频率极值点得出。为了求解未知参数,我们还需要给出一个方程,下面考虑曲线上两个相邻极值点的时间间隔。令 Δt 为声源运动到探测器右侧很远处相邻两个频率最大峰值间的时间间隔,注意到这个时间间隔内包含声源圆周运动一周的时间 $2\pi/\omega$,以及在 $2\pi/\omega$ 时间内探测器探测到的后一个峰相比于前一个峰值多走的距离所对应的时间,即

$$\Delta = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \quad (17)$$

由式(15)~式(17),可以求出 f_0, ω, R, v_s 等的值。

在模拟实验中,我们将探测器放置在 $r_D = 8000\text{m}$ 的位置,改变 θ (探测器位置矢量与 x 轴夹角)的值,记录 $0 \sim 250\text{s}$ 时间内探测器接收到的频率信号,如图5所示。在图中,我们观察到在 $\theta = 30^\circ$ 附近时,频率信号从较高频率(接近探测器)到较低频率(远离探测器)有一个急剧的瞬态变化,说明此时声源定向运动方向与探测器位置矢量方向接近一致,声源圆心运动的直线轨迹近似的通过探测器($\alpha \approx \beta$),声源运动通过探测器的位置位于图中的瞬态变化区域。选定 $\theta = 30^\circ$ 附近时的数据代入上面公式进行计算,得到的结果最为准确。确定 θ 的准确数值(即 β 角),也可以用2.6部分的方法进行确定,但2.6部分的简易方法不容易想到,这里按照原题目给出的答案顺序给出解答。

图5 不同 θ 角度下探测器探测到的信号

为了获取更精确的数值,我们可以局部的放大曲线。在 $\theta=30^\circ$ 这个模拟曲线中,在图像的左侧部分,可以读取频率最大值 $f_{\max}=5569.59\text{Hz}$ 和最小值 $f_{\min}=788.24\text{Hz}$,代入式(15),可得

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 1.33 = \frac{c - v_s}{\omega R} \quad (18)$$

在图像的右侧部分,可以读取频率最大值 $f_{\max}=1353.45\text{Hz}$ 和最小值 $f_{\min}=543.96\text{Hz}$,代入式(16),可得

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 2.34 = \frac{c + v_s}{\omega R} \quad (19)$$

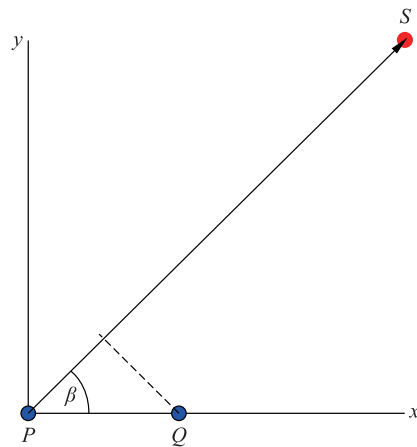
由式(18)、式(19),可以得到 $v_s=91.1\text{m/s}$, $\omega R=179.66\text{m/s}$ 。在图像右侧远端,可以记录任意相邻两个频率最大值的时间坐标,代入式(17),如下

$$\Delta t = 148.84 - 143.48 = 5.36 = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \quad (20)$$

综合上面式子,可得 $\omega=1.49\text{rad/s}$, $R=120.57\text{m}$ 。将上述结果代入式(8),即可得 $f_0=990.26\text{Hz}$ 。

2.6 A.6 部分: 求出 β 的值

此部分给出确定 β 的简易方法。如图6所示, S 代表位于十分远距离的声源, P 和 Q 代表在不同时刻放在两个不同位置上的探测器。在实验中,将探测器分别放置于 P (原点)和 Q 点(x 轴正

图6 计算 β 角度示意图

方向600m处),选取声源长时间运动后探测到的某一频率峰值, P 点探测到的传播时间为 $t_0=1009.61\text{s}$, Q 点探测到的传播时间为 $t_1=1007.50\text{s}$,由此,我们得到

$$t_0 - t_1 = \frac{PQ \cos(\beta)}{c} \quad (21)$$

且 $\beta=28.53^\circ$ 。

2.6 A.7 部分: 声源的初始中心坐标

如图7所示,将探测器放在 y 轴正方向500m位置,当 $t=0$ 时,探测到第一个信号为795.69Hz,

(下转第35页)

拔尖班实施本文的研究内容,激发了学生的学习兴趣,学生基于本文的研究工作,小组协作的形式研究了“傅科摆的轨迹”“考虑科里奥利力的落体运动轨迹”“地球万有引力场中卫星的轨迹”等问题,学生评价反馈中高度评价了这个教学环节,认为不但巩固了相关的理论知识,增强了解决实际问题的能力,更为海洋科学和大气科学专业的学生的后续相关专业课的学习打下了很好的理论和应用基础。

参考文献

- [1] 简粤. 无阻尼情况下科里奥利力对抛体运动的影响[J]. 兰州工业学院学报, 2016, 23(3): 86-90.
JIAN Y. Effect of Coriolis force on the projectile motion without resistance[J]. Journal of Lanzhou Institute of Technology, 2016, 23(3): 86-90. (in Chinese)
- [2] 王安祥, 李继军, 等. 基于 Matlab 的科里奥利力对抛体运动的影响[J]. 陕西科技大学学报: 自然科学版, 2010, 28(6): 106-110.
WANG A X, LI J Y, et al. Study on the effect of Coriolis' force on projectile motion based on Matlab[J]. Journal of Shanxi University of Science & Technology, 2010, 28(6): 106-110. (in Chinese)
- [3] 潘武明. 牛顿动力学方程的数值解法[J]. 高等函授学报(自

然科学版), 2002(1): 22-23.

PAN W M. Numerical solution of Newton's dynamic equations[J]. Journal of Higher Correspondence Education(Natural Sciences), 2002(1): 22-23. (in Chinese)

- [4] 蒋志洁, 阳生红, 张日理, 等. 运用 Matlab 辅助大学物理教学, 提高教学质量[J]. 物理与工程, 2019, 29(S1): 69-72.

JIANG Z J, YANG S H, et al. Improving teaching quality of college physics using the Matlab numerical calculation and simulation[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(S1): 69-72. (in Chinese)

- [5] 华玲玲, 杨阳. 大学物理教学中培养科学计算能力的研究[J]. 物理与工程, 2013, 23(3): 37-41

HUA L L, YANG Y. Research on cultivating scientific computing ability in college physics teaching[J]. Physics and Engineering, 2013, 23(3): 37-41. (in Chinese)

- [6] 于凤军. 质点在非光滑转动圆盘上的运动[J]. 大学物理, 2018, 37(2): 22-25, 41.

YU F J. The motion of a particle on a non-smooth rotating disk[J]. College Physics, 2018, 37(2): 22-25, 41. (in Chinese)

- [7] 乔雷, 姜波, 朱红波. 在转动参考系中研究中心力场的圆形轨道稳定性[J]. 大学物理, 2012, 31(11): 49-51.

QIAO L, JIANG B, et al. Research on stability of circular orbit of a particle exerted by a central force in a rotating frame of reference[J]. College Physics, 2012, 31(11): 49-51. (in Chinese)

(上接第 30 页)

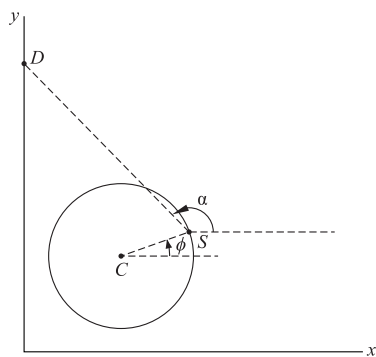


图 7 计算声源初始中心坐标示意图

根据之前计算出的声源坐标(419.99, 499.99)m, 有

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{0}{419.99} \quad (22)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad (23)$$

将探测到的频率值和 α 的值代入式(6), 可得 $\phi \approx 0^\circ$ 。由此可得声源的初始中心坐标为(299.42, 499.99)m。

3 结语

近两年由于疫情原因, 亚洲及国际物理奥赛

实验题目大多改为虚拟仿真实验。这个虚拟仿真实验题目很有特色。它将待测声源和测量仪器都简化为一个二维的点, 而测量到的只是一个随时间变化的动态曲线。相比于其他的虚拟仿真实验, 这个实验更为抽象化也更具难度, 需要同学对于声波传播的物理图象非常清晰才可以解答好。同时在解答时, 还需要一定的公式推导能力以及实验技巧。在当前疫情形势下, 本实验进行简单改编后, 非常适合物理专业的同学作为线上虚拟实验进行学习, 其源程序为网页版可在竞赛网站方便下载。

致谢: 感谢参与试卷翻译等工作的南开大学本科生志愿者郝嘉静、綦昭栋、邓名豪, 感谢参与奥赛培训、选拔与远程考试的各位老师, 感谢中国科学技术协会、中国物理学会、天津市物理学会等单位 and 部门对赛事的支持。

参考文献

- [1] Results of the 22th Asian Physics Olympiad [EB/OL]. <https://apho2022.in/problems-and-result/>. 2022-06.
- [2] Problems & solutions for the 22th Asian Physics Olympiad [EB/OL]. <https://apho2022.in/questions-and-solutions/>. 2022-06.