

利用留数定理对一类广义积分的推广

张子啸¹ 杜学瑞² 马永利²

(复旦大学¹核科学与技术系;²物理学系,上海 200438)

摘要 在数学物理问题中常常遇到一类广义积分 $I_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n} dx$ 或 $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n} dx$, 其中正整数 n 和实数 α 满足 $n \geq 1$ 和 $0 < \alpha < n$ 。现有数学物理方法教科书中,一般将 n 和 α 取一些特殊值而不具有普遍意义,并且所选积分回路内含有多个奇点,计算较为复杂。我们从整个大圆弧中截取了弧度为 $2\pi/n$ 的大圆弧构成的最小扇形积分回路,既推广了参数范围,推导过程又简单。根据留数定理,结果简洁: $I_+ = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\alpha\pi}{n}$, $I_- = \frac{\pi}{n} \cot \frac{\alpha\pi}{n}$, 和 $I'_{\pm}$ 是 $I_{\pm}$ 的线性组合。我们综合介绍了此广义积分的几种解法,分析了由高等数学知识求解此类实变函数积分的限制性,并讨论了传统方法的繁琐性。

关键词 半无界区域;广义积分;留数定理

THE GENERALIZATION OF A KIND OF GENERALIZED INTEGRAL BY THE RESIDUE THEOREM

ZHANG Zixiao¹ DU Xuerui² MA Yongli²

(¹ Department of Nuclear Science and Technology;

² Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200438)

Abstract In the mathematical physics problem, for calculating a kind of generalized integral $I_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n} dx$ or $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n} dx$, where n is a positive integer and α is a real number with $n \geq 1$ and $0 < \alpha < n$, the recent textbooks have taken some special values of n and α , and selected a half complex-plane as a loop that includes many singularities. The calculations are very cumbersome and not universally applicable. We choose the minimum sector loop with a large arc and $2\pi/n$ a radian, extend the regime of parameters, and simplify the calculations. Based on the residue theorem, our brief results are $I_+ = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\alpha\pi}{n}$, $I_- = \frac{\pi}{n} \cot \frac{\alpha\pi}{n}$, and $I'_{\pm}$ are expressed as the linear combination of $I_{\pm}$. We review several methods to solve this integration, analyze the restrictive nature of this kind of integration with real variables in advanced mathematics textbooks, and also discuss the complexity and cumbersome of the integration in the traditional methods.

Key words semi-unbounded region; generalized integral; residue theorem

收稿日期: 2023-04-04

基金项目: 国家自然科学基金(12175040)。

通讯作者: 马永利,男,教授,主要从事理论物理科研和教学工作,研究方向为凝聚态理论与量子统计理论,ylma@fudan.edu.cn。

引文格式: 张子啸,杜学瑞,马永利. 利用留数定理对一类广义积分的推广[J]. 物理与工程,2023,33(4):12-17.

Cite this article: ZHANG Z X, DU X R, MA Y L. The generalization of a kind of generalized integral by the residue theorem[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(4): 12-17. (in Chinese)

无界、半无界区间是数学物理问题中常常采用简化模型而涉及的感兴趣的研究区域。在实际问题中往往会遇到一类无穷积分,其被积函数为 $f_{\pm}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n}$, 其中整数参数 n 和实数参数 α 满足条件: $n \geq 1$ 和 $0 < \alpha < n$ 。我们的目的是求一维无界区域的广义积分: $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\pm}(x) dx$, 为此先求这类典型的一维半无界区域的广义积分: $I_{\pm} = \int_0^{\infty} f_{\pm}(x) dx$ 。

现有数学物理方法教材中, 多将这个被积函数 $f_{\pm}(x)$ 的两个参数 n 和 α 取一些特殊整数值, 再利用留数定理的方法求出积分。例如数学物理方法^[1]计算的 I_+ 取 $\alpha=1, n=3, 4$ 。计算的 I'_+ 取 $\alpha-1, n$ 为偶数^[2]。计算的 I_+ 取 $\alpha=1, n \geq 2$ ^[3, 4]。计算的 I'_- 取 $\alpha=1, n=4$ ^[5]。计算的 I_+ 取 α 为奇数与 n 为偶数和 $\alpha=2, n=5$ ^[6]。计算的 I'_+ 取 $\alpha=5, n=6$ ^[7]。计算的 I'_- 取 $\alpha=1, n$ 为奇数^[8]等。特别是最近计算 $I_{\pm}$ 时^[9], 取 $\alpha=1, n \geq 2$, 并且采用多种弧形闭回路。^[1] 仅提及了扇形围道, 并没有分析讨论之。在小系统的统计理论中, “矩”的阶数 n 就是从 1 到无穷的正整数。我们将现有计算推广到一般的 $n \geq 1$ 和实数 $0 < \alpha < n$, 并且选择最小弧度的大圆弧构成的扇形积分回路, 使得计算量减少、结果的适用性扩大。传统中选择上半大圆围道的积分 $I'_{\pm}$ 较为复杂。选择整个大圆围道的积分, 不但更为复杂, 而且还限制 α 只能为非整数 (同时这正是我们的 $n=1, 0 < \alpha < 1$ 之特例)。另外, 高等数学教材中经过非线性变换, 使得 I_+ 之计算与 Beta 函数和 Gamma 函数联系起来, 而具有主值积分的 I_- 之计算过程就没有这种联系 (需要消发散)。总之, 通过分析、计算与讨论, 用复平面上最小扇形积分回路计算这类广义积分, 既推广了参数范围, 结果又更为简洁, 显示出留数定理的优势。

1 广义积分 $I_+ = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^n} dx$ (正整数 $n \geq 1$, 正实数 $0 < \alpha < n$)

首先, 这类积分在高等数学教材中已经利用 Beta 函数和 Gamma 函数的定义与性质求出^[3]: 作非线性变换, 令 $y = x^n \in [0, \infty)$, 则 $x = y^{1/n}, dx =$

$\frac{1}{n} y^{1/n-1} dy$ 。故

$$I_+ = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy \quad (1)$$

其中, $p = \frac{\alpha}{n}$ 。另一方面, 我们知道 Beta 函数定义为

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad \text{再令 } y = \frac{t}{1-t} \in$$

$$[0, \infty), \text{ 则 } t = \frac{y}{1+y}, 1-t = \frac{1}{1+y}, dt = \frac{1}{(1+y)^2} dy.$$

$$\text{故 Beta 函数变为 } B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

$$\text{两者比较得 } I_+ = \frac{1}{n} B(p, 1-p), \text{ 其中 } p = \frac{\alpha}{n} < 1.$$

$$\text{又由 Beta 函数和 Gamma 函数的性质: } B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \text{ 我们得到}$$

$$I_+ = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\alpha\pi}{n} \quad (2)$$

其次, 在复变函数理论中, 将被积函数延拓到复平面上, 所求问题化为 $\int_c \frac{z^{\alpha-1}}{1+z^n} dz$ 。考虑选取如图 1 所示的围道有三点考虑: 此弧度上的直线积分与 I_+ 成正比; 回路内仅仅有一个奇点; 此围道并不经过从 $x=0^-$ 到 $x=0^+$ 的路径, 因而 $x^{\alpha-1}$ 的多值性不影响积分结果。这个积分回路可简记为

$$\oint_c = \int_{l_1} + \int_{C_R} + \int_{l_2} \quad (3)$$

$$\text{其中, 对于 } \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z^n} dz, \text{ 因为 } \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{\alpha-1}}{1+z^n} \right| = 0,$$

$$\text{则由大圆弧引理可得 } \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z^n} dz = 0. \text{ 两段直线的积分之和为}$$

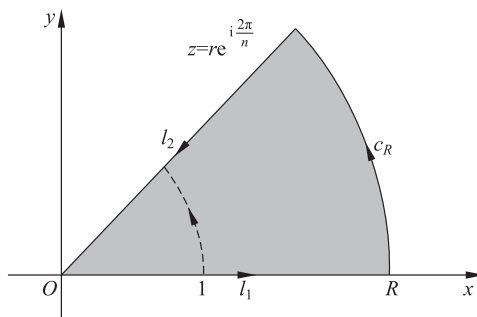


图 1 I_+ 积分围道: 弧度为 $2\pi/n$ 的大圆弧构成的最小扇形。围道内的单级极点在 $z = e^{i\pi/n}$ 处

$$\begin{aligned}
\int_{l_1} + \int_{l_2} &= \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^n} dx + \\
&\quad \int_\infty^0 \frac{r^{a-1} e^{i2(a-1)\pi/n}}{1+r^n} dr e^{i2\pi/n} \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^n} dx + \int_\infty^0 \frac{x^{a-1} e^{i2(a-1)\pi/n}}{1+x^n} dx e^{i2\pi/n} \\
&= (1 - e^{i2a\pi/n}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^n} dx \quad (4)
\end{aligned}$$

最后,根据留数定理,回路积分与 $z = e^{i\pi/n}$ 处单阶极点留数的关系为

$$\oint_c = i2\pi \text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{1+z^n}\right) \Big|_{z=e^{i\pi/n}} = -\frac{i2\pi}{n} e^{ia\pi/n} \quad (5)$$

故 $(1 - e^{i2a\pi/n})I_+ = -\frac{2\pi i}{n} e^{ia\pi/n}$, 解得 $I_+ = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\alpha\pi}{n}$ 。完全相同于式(2)的结果。

2 广义积分 $I_- = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx$ (正整数 $n \geq 1$, 正实数 $0 < \alpha < n$)

将被积函数延拓到复平面上,所求问题化为 $\int_c \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz$ 。考虑如图2所示的围道,回路内没有奇点,奇点在 $z=1, e^{i2\pi/n}$ 处。分别取小圆弧 c_1, c_2 , 其半径 $r_1 \rightarrow 0, r_2 \rightarrow 0$ 。如此选择的围道,此弧度上的直线积分与 I_- 成正比并且是最小扇形。

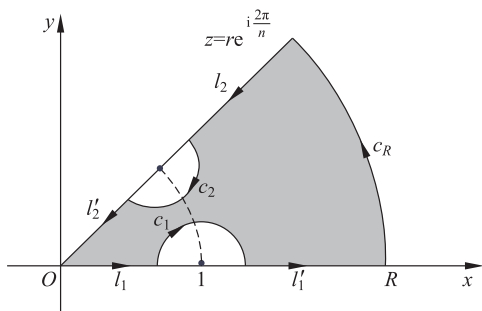


图2 I_- 积分围道:弧度为 $2\pi/n$ 的大圆弧构成的最小扇形, 绕过两条直线 $z=1, e^{i2\pi/n}$ 处的单阶极点。围道内没有极点。

则有简记的回路积分

$$\oint_c = \int_{l_1} + \int_{c_1} + \int_{l_2'} + \int_{c_R} + \int_{l_2} + \int_{c_2} + \int_{l_2'} \quad (6)$$

对于 $\int_{c_R} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz$, 因为 $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{z^a}{1-z^n} \right| = 0$, 则由

大圆弧引理可得 $\int_{c_R} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz = 0$ 。实轴上的 $z=1$ 和不在实轴上的 $z=e^{i2\pi/n}$ 都是直线积分遇见的单阶极点,我们取两个小半圆弧将极点绕过去。两个小半圆弧的弧度均为 π (相位差均为 $-\pi$)。对于 $\int_{c_1} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz$, 因为 $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^{a-1}}{1-z^n} = -\frac{1}{n}$ 则由小圆弧引理可得

$$\int_{c_1} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz = \frac{i\pi}{n} \quad (7)$$

对于 $\int_{c_2} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz$, 因为 $\lim_{z \rightarrow e^{i2\pi/n}} (z - e^{i2\pi/n}) \frac{z^{a-1}}{1-z^n} = -\frac{1}{n} e^{i2a\pi/n}$, 则由小圆弧引理同样可得

$$\int_{c_2} \frac{z^{a-1}}{1-z^n} dz = \frac{i\pi}{n} e^{i2a\pi/n} \quad (8)$$

四段直线的积分之和为

$$\begin{aligned}
&\int_{l_1} + \int_{l_1'} + \int_{l_2} + \int_{l_2'} \\
&= \lim_{\substack{r_1 \rightarrow 0 \\ r_2 \rightarrow 0}} \left[\left(\int_0^{1-r_1} + \int_{1+r_1}^\infty \right) \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx + \right. \\
&\quad \left. \left(\int_\infty^{1+r_2} + \int_{1-r_2}^0 \right) \frac{r^{a-1} e^{i2(a-1)\pi/n}}{1-r^n} dr e^{i2\pi/n} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx + \int_\infty^0 \frac{r^{a-1} e^{i2(a-1)\pi/n}}{1-r^n} dr e^{i2\pi/n} \\
&= (1 - e^{i2a\pi/n}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx \quad (9)
\end{aligned}$$

因为被积函数 $\frac{z^{a-1}}{1-z^n}$ 在积分回路内没有奇异性, 所以根据留数定理, 回路积分为 $\oint_c = 0$ 。将上述结果相加得到 $(1 - e^{i2a\pi/n})I_- + \frac{i\pi}{n} + \frac{i\pi}{n} e^{i2a\pi/n} = 0$, 解得

$$I_- = \frac{\pi}{n} \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{n}}{\sin \frac{\alpha\pi}{n}} = \frac{\pi}{n} \cot \frac{\alpha\pi}{n} \quad (10)$$

3 讨论

3.1 实变函数积分:消发散与积分的繁琐性

在高等数学教材求积分 I_+ 时^[10], 还可取

具体的 $y = x^n = \tan^2 \theta, \theta \in [0, \pi/2]$, 则 $I_+ = \frac{2}{n} \int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^{2(a-1)/n} d\theta$. 再令 $t = \sin^2 \theta \in [0, 1]$, 即正好是 $y = x^n = \frac{t}{1-t} \in [0, \infty)$, 积分变为 $I_+ = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p} dt$, 其中 $p = \frac{\alpha}{n} < 1$. 故 $I_+ = \frac{1}{n} \cdot B(p, 1-p) = \frac{\pi}{n \sin p \pi}$.

但是, 利用高等数学知识求实变函数积分 I_- 时, 由于实轴上存在发散, 情况就复杂多了. 为了消除发散, 作分段积分 $I_- = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1-t^n} dt + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx$. 在 $x=t=1$ 处, 被积函数 $f_-(x) = \frac{x^{a-1}}{1-x^n}$ 发散 ($x=1$ 是函数的单阶极点). 下面就 $\alpha=m$ 取正整数并且 $1 \leq m \leq n-1, n \geq 2$ 来论证其积分主值存在.

令 $x = \frac{1}{t}, t \in [0, 1]$, 这类广义积分变为有界区域积分

$$I_- = \int_0^1 g(t) dt, \quad g(t) = \frac{t^{m-1} - t^{n-m-1}}{1-t^n} \quad (11)$$

这个被积函数在 $t=1$ 处的值有限: $g(1) = 1 - \frac{2m}{n}$, 其数值及其正负依赖于参数 n 和 m 的取值. 特别地取 $n=2m \geq 2$, 则 $g(t)=0$, 积分值为零. 而 $I_- = \frac{\pi}{2m} \cot \frac{\pi}{2} = 0$ 也的确如此. 对于一般的 n 和 $m, g(t)$ 的分母可分解为

$$1-t^n = (1-t) \sum_{l=0}^{n-1} t^l \quad (12)$$

对于偶数 n , 还可进一步化简为偶函数

$$1-t^n = (1-t^2) \sum_{l=0}^{n/2-1} t^{2l} \quad (13)$$

显然地, $t=1$ 是被积函数 $g(t)$ 分母的单阶零点. 考查 $g(t)$ 分子的行为需要分两种情况.

1) 对于确定 $n \geq 2$ 的 $2m < n$ 情况: $g(t) = t^{m-1} \frac{1-t^{n-2m}}{1-t^n} (2 \leq 2m \leq n-1)$. 考查函数 $g(t)$ 分子的行为又要分两种情况:

a) 如果 n 为偶数 $n=2k$, 则 $m < k (k=1, 2, \dots)$, 通过 $g(t)$ 分子的偶函数分解使得 $g(t) = t^{m-1} \cdot$

$\sum_{l=0}^{k-m-1} t^{2l} / \sum_{l=0}^{k-1} t^{2l}$ 在 $t[0, 1]$ 有限, 发散消除了.

b) 如果 n 为奇数 $n=2k+1 (k=1, 2, \dots)$, 既有 $1 \leq m \leq n-1$, 又有 $2 \leq 2m \leq n-1$, 则 $1 \leq m \leq k (k=1, 2, \dots)$, 得到 $g(t) = t^{m-1} \sum_{l=0}^{2(k-m)} t^l / \sum_{l=0}^{2k} t^l$ 依然有限.

2) 对于确定 $m \geq 1$ 的 $n < 2m$ 情况: $g(t) = t^{n-m-1} \frac{1-t^{2m-n}}{1-t^n} (m+1 \leq n < 2m)$.

a) 如果 n 为偶数 $n=2k$, 则 $\left[\frac{m+1}{2} \right] \leq k \leq m-1$, $g(t) = -t^{2k-m-1} \sum_{l=0}^{k-m-1} t^{2l} / \sum_{l=0}^{k-1} t^{2l}$ 在 $t[0, 1]$ 也变得有限, 发散亦消除了.

b) 如果 n 为奇数 $n=2k+1$, 由 $m+1 \leq n = 2k+1 \leq 2m-1$ 得到 k 的取值范围为 $\left[\frac{m}{2} \right] \leq k \leq m-1$, 并且 $g(t) = -t^{2k-m} \sum_{l=0}^{2(m-k-1)} t^l / \sum_{l=0}^{2k} t^l$ 还是有限.

这种主值积分方法, 虽然发散消除了, 但是积分 $I_- = \int_0^1 g(t) dt$ 的结果呢? 分析表明, 对于一般的 $n \geq 2, 1 \leq m < n$, 上述四种情况均没有解析的积分结果. 然而对于确定的 n, m , 上述四种情况的数值结果完全等于简洁结果 $I_- = \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n}$. 这就是留数定理的威力.

3.2 复变函数积分: 整个大圆围道与上半大圆围道

1) 对于一维半无界区域的广义积分 $I_{\pm} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1 \pm x^n} dx$, 由于 α 在 $0 < \alpha < n (n \geq 1)$ 可以取非整数, 所以 $x=0$ 是 x^{a-1} 的分支点, 传统做法就是从原点到无限远点做割线, 再考虑整个大圆弧的积分回路. 所有教材都将这种多值函数积分归为一类特殊积分, 并且限制 α 为非整数. 我们的最小扇形积分回路没有多值问题, 因而不限制 α 为非整数. 当然, 由于原点的留数 $\text{Res} f_-(z)|_{z=0} = z \frac{z^{a-1}}{1-z^n} \Big|_{z=0} = \frac{z^a}{1-z^n} \Big|_{z=0} = 0$, 所以它对回路积分也没有贡献. 作为特例对于 $n=1 (0 < \alpha < 1)$, 我们的 $I_+ = \pi \csc \alpha \pi, I_- = \pi \cot \alpha \pi$ 完全相同于教材

中这类特殊积分的结果,这是因为我们的最小扇形积分回路也变成教材中带割线的整个大圆围道了。

2) 对于物理问题中要求一维无界区域的广义积分 $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 \pm x^n} dx$, 传统做法就是考虑上半复平面的大圆弧积分回路。虽然被积函数要经过 $x=0$ 的分支点,但是它仅仅贡献一个相因子 $e^{ia\pi}$,而对回路积分没有贡献。我们以 n 为偶数分别计算这两个积分。

a) 对于计算 I'_+ , 被积函数 $f_+(z)$ 在上半平面单位圆 $z = e^{i(2k+1)\pi/n}$ 处有 $n/2$ 个单阶极点 ($k = 0, 1, 2, \dots, n/2-1$)。根据留数定理

$$\begin{aligned} I'_+ &= i2\pi \sum_{k=0}^{n/2-1} \text{Res} \left(\frac{z^{a-1}}{1+z^n} \right) \Big|_{z=e^{i(2k+1)\pi/n}} + \\ &\quad i\pi \text{Res} f_-(z) \Big|_{z=0} = \frac{i2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n/2-1} z^{a-n} \Big|_{z=e^{i(2k+1)\pi/n}} \\ &= -\frac{i2\pi}{n} e^{ia\pi/n} \sum_{k=0}^{n/2-1} (e^{i2a\pi/n})^k = -\frac{i2\pi}{n} e^{ia\pi/n} \frac{1-e^{ia\pi}}{1-e^{i2a\pi/n}} \\ &= \frac{\pi}{n} (1-e^{ia\pi}) \csc \frac{\alpha\pi}{n} \end{aligned} \quad (14)$$

b) 对于计算 I'_- , 除被积函数 $f_-(z)$ 在上半平面单位圆 $z = e^{i2k\pi/n}$ 处有 $n/2-1$ 个单阶极点 ($k=1, 2, \dots, n/2-1$) 以外,在实轴 $z=1, -1$ 处有两个单阶极点 ($x=0$ 分支点对回路积分没有贡献)。实轴上 $z=\pm 1$ 两个极点的留数为

$$\begin{aligned} \text{Res} f_-(z) \Big|_{z=\pm 1} &= (z \mp 1) \frac{z^{a-1}}{1-z^n} \Big|_{z=\pm 1} \\ &= -\frac{1}{n} z^{a-n} \Big|_{z=\pm 1} = -\frac{1}{n} \begin{cases} 1 \\ e^{ia\pi} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

根据留数定理

$$\begin{aligned} I'_- &= i2\pi \sum_{k=1}^{n/2-1} \text{Res} \left(\frac{z^{a-1}}{1-z^n} \right) \Big|_{z=e^{i2k\pi/n}} + \\ &\quad i\pi [f_-(z) \Big|_{z=-1} + f_-(z) \Big|_{z=0} + f_-(z) \Big|_{z=1}] \\ &= -\frac{i2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n/2-1} z^{a-n} \Big|_{z=e^{i2k\pi/n}} - \frac{i\pi}{n} (1+e^{ia\pi}) \\ &= -\frac{i2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n/2-1} (e^{i2a\pi/n})^k - \frac{i\pi}{n} (1+e^{ia\pi}) \\ &= -\frac{i2\pi}{n} \left(\frac{1-e^{ia\pi}}{1-e^{i2a\pi/n}} - 1 \right) - \frac{i\pi}{n} (1+e^{ia\pi}) \\ &= \frac{\pi}{n} (1-e^{ia\pi}) \cot \frac{\alpha\pi}{n} \end{aligned} \quad (16)$$

3.3 空间对称性与积分 $I'_{\pm}$ 的简洁表示。从上述

的详细计算我们知道, $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 \pm x^n} dx$ 的结果与参数 n ($n \geq 1$) 的奇偶性和相因子 $e^{ia\pi}$ ($0 < \alpha < n$) 有关

a) n 为偶数: 被积函数中的 $\frac{1}{1 \pm x^n}$ 是偶函数 (称该函数为偶宇称), 则

$$\begin{aligned} I'_+ &= \int_{-\infty}^0 \frac{(-|x|)^{a-1}}{1+|x|^n} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^n} dx \\ &= -e^{ia\pi} I_+ + I_+ = (1-e^{ia\pi}) I_+ \end{aligned} \quad (17)$$

完全相同于上半复平面大圆弧回路的式(15)的结果。当 $\alpha=m$ 为偶(奇)整数时, $e^{ia\pi} = \pm 1$, 整个被积函数 $\frac{x^{m-1}}{1 \pm x^n}$ 是奇(偶)函数。显然地 $I'_+ = 0(2I_+)$ 。还有

$$\begin{aligned} I'_- &= \int_{-\infty}^0 \frac{(-|x|)^{a-1}}{1-|x|^n} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx \\ &= -e^{ia\pi} I_- + I_- = (1-e^{ia\pi}) I_- \end{aligned} \quad (18)$$

当 $\alpha=m$ 为偶(奇)整数时, 显然地 $I'_- = 0(2I_-)$ 。

b) n 为奇数: 被积函数中的 $\frac{1}{1 \pm x^n}$ 在左半轴

变为 $\frac{1}{1 \mp |x|^n}$ (对称性破缺), 则

$$\begin{aligned} I'_+ &= \int_{-\infty}^0 \frac{(-|x|)^{a-1}}{1-|x|^n} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^n} dx \\ &= -e^{ia\pi} I_- + I_+ \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I'_- &= \int_{-\infty}^0 \frac{(-|x|)^{a-1}}{1+|x|^n} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x^n} dx \\ &= -e^{ia\pi} I_+ + I_- \end{aligned} \quad (20)$$

总之, n 为偶数时, $I'_{\pm} = (1-e^{ia\pi}) I_{\pm}$; n 为奇数时, $I'_{\pm} = I_{\pm} - e^{ia\pi} I_{\mp}$ 。这些简洁结果表明, 不但在一维半无界区域的广义积分 $I_{\pm}$ 彰显出选择最小扇形积分回路的优越性, 而且在一维无界区域的广义积分 $I'_{\pm}$ 仅仅是 $I_{\pm}$ 的一种带相因子 $e^{ia\pi}$ 的线性组合。事实上, 无界区域的积分与被积函数的奇偶性和相因子 $e^{ia\pi}$ 密切相关。半无界区域与无界区域的空间对称性不同。半无界区域积分 $I_{\pm}$ 的结果很容易地推广到无界区域的积分 $I'_{\pm}$ 。反之不然: 由于空间对称性的原因, 既要给定 n 的奇偶性, 又要计算 $f_{\pm}(x) = \frac{x^{a-1}}{1 \pm x^n}$ 在实轴上和上半

平面内单位圆上的所有留数。当我们用复平面最小扇形积分回路计算时,虽然被积函数存在奇异性,但是简洁的结果即 $I_{\pm}$ 表达式与整数 $n (n \geq 1)$ 的奇偶性和 $x^{\alpha-1} (0 < \alpha < n)$ 的多值性均无关。

最后指出,当我们在实轴有界区域分析积分 $I_{\pm} = \int_0^1 g(t) dt$ 时,对应不同 $n, \alpha = m$ 奇偶性的四种情况,虽然被积函数的奇异性均被消除,但是仍然没有解析表达的积分结果;上半大圆围道的复变函数积分 $I'_{\pm}$ 亦较为复杂;整个大圆围道的复变函数积分,不但更为复杂,而且还限制 α 为非整数。我们的最小扇形回路积分一网打尽了所有结果。

4 结语

对于数学物理上常常遇到的被积函数 $f_{\pm}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n}$, 其中正整数 $n \geq 1$ 和正实数 $0 < \alpha < n$, 利用留数定理,首先计算了一维半无界区域的广义积分 $I_{\pm} = \int_0^{\infty} f_{\pm}(x) dx$ 。通过选择弧度为 $2\pi/n$ 的大圆弧构成的最小扇形积分回路,得到简洁的结果: $I_+ = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\alpha\pi}{n}, I_- = \frac{\pi}{n} \cot \frac{\alpha\pi}{n}$ 。既推广给定 n 整数到任意整数,又将 $\leq \pi$ 的辐角(对于 $n > 2$, 两个积分对应的围道内分别包住了 $n/2, n/2-1$ 个奇点)缩小成了 $2\pi/n$ (分别包住了 1, 0 个奇点)。计算量减少,适应性增强。其次,将一维无界区域

的广义积分 $I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 \pm x^n} dx$ 变成了简单的代数运算。隐含了空间对称性及其破缺对积分结果的影响。最后,我们综合介绍了此广义积分的几种解法,分析了用实变函数积分的限制性,讨论了用其他围道计算此广义积分的繁琐性。

参 考 文 献

- [1] 吴崇试,高春媛. 数学物理方法[M]. 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2019.
 - [2] 周治宁,吴崇试,钟毓澍. 数学物理方法习题指导[M]. 1 版. 北京: 北京大学出版社, 2004.
 - [3] 姚端正,梁家宝. 数学物理方法[M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 2010.
 - [4] TRISTAN N. 复分析——可视化方法[M]. 齐民友,译. 北京: 人民邮电出版社, 2021.
 - [5] 汪德新. 数学物理方法[M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 2006.
 - [6] 胡嗣柱,倪光炯. 数学物理方法[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
 - [7] 陆全康,赵惠芬. 数学物理方法[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
 - [8] 胡嗣柱,徐建军. 数学物理方法解题指导[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
 - [9] 周文平,刘奕帆,宋铁磊. 由留数定理求解的两类无穷积分[J]. 物理与工程, 2022, 32(1): 56-59.
ZHOU W P, LIU Y F, SONG T L. Two types of infinite integrals handled by residue theorem[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(1): 56-59. (in Chinese)
 - [10] 金路,徐惠平. 高等数学同步辅导与复习提高[M]. 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2018.
- (上接第 11 页)
- DUAN S F, GONG G Q. Artificial intelligence education application policies from an international comparative perspective [J]. Modern Educational Technology, 2019, 29(3): 11-17. (in Chinese)
- [5] 陈晓珊. 智能时代重新反思教育的本质[J]. 现代教育技术, 2018, 28(1): 31-37.
CHEN X S. Rethinking the essence of education in the age of intelligence[J]. Modern educational technology, 2018, 28(1): 31-37. (in Chinese)
- [6] 方圆媛,黄旭光. 中小学人工智能教育:学什么,怎么教——来自“美国 K-12 人工智能教育行动”的启示[J]. 中国电化教育, 2020(10): 32-39.
FANG Y Y, HUANG X G. Artificial intelligence education in primary and secondary schools: What to learn and how to teach—Inspiration from the “K-12 artificial intelligence education action in the united states”[J]. China electronic education, 2020(10): 32-39. (in Chinese)
- [7] 马文蔚,解希顺. 物理学下册[M]. 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 185.
- [8] BAIL M. Against the 3A's of edtech: AI, analytics, and adaptive technologies in education[EB/OL]. [2019-07-18]. <https://www.chronicle.com/blogs/profhacker/edtech-ai-analytics-and-adaptive-technologies-in-education/64604>, 2017.
- [9] MATT P. How we build the highest confidence GPT-3 chatbots available in 2022[EB/OL]. www.width.ai/post/gpt-3-chatbots, 2022.
- [10] 丹尼尔·平克,林娜译. 全新思维[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.