

特约稿件

关于动生电动势起源的讨论

李志兵

(中山大学·深圳理学院, 广东 深圳 518107)

摘 要 法拉第电磁感应定律统一描写了两种不同的物理现象:(1)曲面内磁通变化在构成曲面边界的闭合曲线上存在感应电动势;(2)在磁场中运动的曲线上存在动生电动势。虽然都知道这两个现象背后的基本规律均为麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式,但是对现象(2)有不同的解释。本文从电荷轨道约束的角度讨论动生电动势的意义。对运动电荷的轨道进行约束需要对电荷施加一定的约束力。若预定轨道依赖于时间,约束力会对电荷做功,从而导致动生电动势,磁场在其中起着传递约束力的作用。我们通常不知道约束力的准确表达式。动生电动势的主要用处是让我们分析电荷沿预定轨道运动的能量变化时无需求助于约束力,而这严格来说仅适用于准静态过程。电动势概念从准静态过程到迅变过程的推广并不唯一。本文把电动势一般地定义为:在单位正电荷瞬间走过某预定轨道的虚过程中外界对该电荷所作的虚功。这个定义同时适用于感应电动势和动生电动势,预定轨道曲线可以具有任意形状(开或闭合)并随时间变化。

关键词 感生电动势;动生电动势;约束轨道

DISCUSSION ON MOTIONAL ELECTROMOTIVE FORCE

LI Zhibing

(Shenzhen Campus of Sun Yat-sen University, Shenzhen, Guangdong 518107)

Abstract Faraday's law of electromotive force describes two different phenomena: (1) changing magnetic flux through a surface induces an electromotive force in the boundary circuit of the surface; (2) a wire moving in a magnetic field is exerted a motional electromotive force. It is known that the fundamental principles supporting both phenomena are the Maxwell equations and the Lorentz formula for the electromagnetic force. However, there are different statements explaining the latter phenomenon. This paper will discuss the motional electromotive force from the viewpoint of constraint on charge trajectory. A charge moving in a predetermined trajectory is exerted a constraint force generally. When the trajectory is time-dependent, the magnetic field extends the constraint force to do work on the charge and leads to the motional electromotive force. It is convenient to describe the energy of charge moving in a predetermined trajectory by electromotive force, as it can avoid the constraint force which is usually unknown. However, strictly speaking, this description is only valid in quasi-static processes. A general concept of the electromotive force for arbitrary processes may be defined, but the generalization is not unique. Here we define the electromotive force as the work done to a

收稿日期: 2023-07-13

作者简介: 李志兵,男,教授,主要从事物理教学科研工作,研究方向为纳米电子学和统计物理, stslzb@mail.sysu.edu.cn。

引文格式: 李志兵. 关于动生电动势起源的讨论[J]. 物理与工程, 2023, 33(4): 3-6.

Cite this article: LI Z B. Discussion on motional electromotive force[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(4): 3-6. (in Chinese)

positive unit charge when the charge moves along the trajectory instantly. This definition is valid for induced and motional electromotive forces of wires of arbitrary time-depending shape, whatever close or open.

Key words induced electromotive force; motional electromotive force; constraint force

法拉第首先发现了电磁感应现象,其内容为:(1)两个导体线圈,在一个线圈突然通电或者突然断电的瞬间,另一线圈会感生出电流;(2)让一个通有稳恒电流的线圈相对另一个线圈移动,另一个线圈会感生出电流;(3)让一个永久磁铁(或电磁铁)相对线圈移动,会在线圈中感生出电流^[1,2]。电流的出现解释为导线在上述过程中获得了感应电动势。楞次指出感应电动势的方向总是企图阻碍磁通的变化。电磁感应定律通常表述为磁通法则^[3]

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

左边称为线圈中的感应电动势, Φ 是线圈所围曲面的磁通,曲面的方向按照右手螺旋法则与线圈中电动势约定的正向一致。实际上可以把磁通法则从实验现象抽象成为一条物理定律, Φ 是关于一个几何面的磁通, $\mathcal{E}$ 是关于该几何面边界线的电动势,与线圈实物无关。几何面的边界线总是一条闭合几何曲线,然而磁通法则也适用于电荷束缚在非闭合曲线中的情形,在后面的情形 Φ 是 dt 时间内曲线扫过曲面的磁通。两种情形都可以归结为电荷约束在曲线上运动,无论曲线是闭合的还是非闭合的,我们都称之为预定轨道。

磁场变化和预定轨道变化变化都可以造成 Φ 随时间变化。

先讨论闭合预定轨道不随时间变化,仅磁场变化的情形。把固定的带方向的闭合曲线记为 C ,以 C 为边界的任意一个曲面记为 S ,据麦克斯韦理论^[3]

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi(t, C)}{\partial t} \bigg|_C \quad (2)$$

若把式(2)解读为从实验现象总结出来的式(1)的一个应用,则左边的线积分便是闭合曲线 C 中的感生电动势 $\mathcal{E}$,显然它起源于涡旋电场,即沿闭合曲线积分不等于零的电场。静电场沿闭合曲线的线积分恒等于零,所以式(2)左边只需考虑非静电场。电场强度 $\mathbf{E}$ 是单位正电荷受到的电场力,假想电荷沿预定的闭合曲线 C 移动一周,

式(2)左边便是涡旋电场在这过程中对单位正电荷所作的功。严格地讲,这个假想过程要理解为不需要时间的虚位移,从而相应的功是虚功,不需要真实发生,也不可能真实发生。这与电动势是一种作功的能力相一致。按照通常的定义,电动势是非静电场的某种力场对单位正电荷作功的能力,因此式(2)左边是电动势。当然,涡旋电场不是保守力场,它作的功依赖于移动电荷的路径。但对一条已经确定的轨道,电动势的意义和势能相似:若单位正电荷从轨道一点移动到另一点,它将获得一份等于电动势的能量增量。本质上,式(2)的全部内容就是变化磁场和涡旋电场的制约关系。在许多教科书中,法拉第电磁感应定律专指固定闭合曲线的感应电动势与磁通变化率的这个关系^[4-7]。

下面我们讨论电荷限制在依赖于时间的运动曲线 $L(t)$ 中的情形。关于代表性例子的类似讨论可见 Griffiths 的教材^[8]。假设点电荷 q 在 dt 时间沿 $L(t)$ 从 A 点移动到 B 点,经过的线元为 $d\mathbf{l} = \mathbf{u}dt$ 。设该处线元的速度为 $\mathbf{v}$,则线元在 dt 从 AB 移动到 $A'B'$,如图1所示。注意 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 都是在实验室惯性系定义的,所以 q 相对实验室运动的速度为 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$,从而经 dt 发生位移 $d\mathbf{x} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})dt$,即图1的 AB' 。垂直线元方向的位移为 $d\mathbf{p} = \mathbf{v}_\perp dt$,即图1的 AC 和 BC' 。

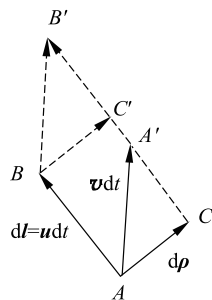


图1 运动曲线的一个线元。它经 dt 从 AB 移动到 $A'B'$

根据洛伦兹力公式,电荷 q 在磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 中受到磁力

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

把 $\mathbf{v}$ 分解为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, 其中 $\mathbf{v}_\perp$ 垂直线元, $\mathbf{v}_\parallel$ 平行线元。平行线元的磁力为

$$\mathbf{F}_{m\parallel} = q \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

因为总磁力不作功, 所以平行线元的磁力 $\mathbf{F}_{m\parallel}$ 所作的功和垂直线元的磁力 $\mathbf{F}_{m\perp}$ 所作的功刚好互相抵消, 即

$$\mathbf{F}_{m\parallel} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{F}_{m\perp} \cdot d\mathbf{\rho} \quad (5)$$

又因为电荷 q 被约束在线元内运动, 所以 $\mathbf{F}_{m\perp}$ 必然被其他力(包括惯性力)所抵消。这个“其他力”就是约束力。约束力在 dt 内对 q 作功

$$\delta W = -\mathbf{F}_{m\perp} \cdot d\mathbf{\rho} = \mathbf{F}_{m\parallel} \cdot d\mathbf{l} \quad (6)$$

把式(4)代入上式得

$$\delta W = q(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = q \left(\frac{d\mathbf{\rho}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

利用矢量公式 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ 将上式写成

$$\delta W = -\frac{q}{dt} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{\rho} \times d\mathbf{l}) \quad (8)$$

右边 $d\mathbf{\rho} \times d\mathbf{l}$ 等于图 1 中以 $ACC'B$ 为顶角的平行四边形面元, 同时也等于以 $AA'B'B$ 为顶角的平行四边形面元。通过它的磁通为

$$\delta \Phi = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{\rho} \times d\mathbf{l}) \quad (9)$$

因此约束力对单位正电荷作功

$$\delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{q} \delta W = -\frac{\delta \Phi}{dt} \quad (10)$$

上式告诉我们, 约束力对经过预定线元的单位正电荷所作的功等于单位时间线元扫过面元上的负磁通变化率。回忆线元 $d\mathbf{l}$ 和 $d\mathbf{\rho}$ 的定义可知它们都正比于无穷小量 dt , 从而式(10)是正比于 dt 的无穷小量。若磁场 $\mathbf{B}$ 随时间变化, 它在 dt 的改变量正比于 dt , 对式(9)的贡献是 3 阶无穷小量, 所以在式(9)中不需要考虑 $\mathbf{B}$ 随时间的变化。因此, 式(10)对变化磁场也是正确的。

从推导过程可见, $\delta \mathcal{E}_c$ 与曲线的物理构造以及电荷沿曲线的运动无关, $\delta \mathcal{E}_c$ 实际上起源于线元对电荷可能运动轨迹的约束, 同时反映了磁力不作功的特性。若电荷沿导线发生真实移动, 则 $\delta \mathcal{E}_c$ 是真实的功。若电荷相对曲线的位移只是假想的虚位移, 则 $\delta \mathcal{E}_c$ 是虚功。显然 $\delta \mathcal{E}_c$ 不仅依赖于线元的两个端点, 而且与整个线元有关, 从而不是保守力场的势函数。然而对已确定的线元, $\delta \mathcal{E}_c$ 只与电荷假想经过的线元的两端点有关, 它就是动生电动势。从力的角度看, 约束力和磁力的合力与曲线

方向相同。因磁力不作功, 所以合力作的功(无论虚实)等于约束力作的功, 对单位正电荷这个功就是动生电动势。

在磁场中运动(或变形)的任意形状的曲线 $L(t)$ 如图 2(a)(不闭合)和图 2(b)(闭合), 假想在一个瞬间让单位正电荷从曲线的一端移动到另一端(若 $L(t)$ 不闭合), 或让单位正电荷绕行 $L(t)$ 一周(若 $L(t)$ 闭合), 则约束力所作的功等于它在每个线元所作虚功的积分, 即

$$\mathcal{E}_c = - \int_{L(t)} \frac{\delta \Phi}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (11)$$

积分是沿 $L(t)$ 进行的线积分。由式(11)给出的 $\mathcal{E}_c$ 便是磁场中运动曲线上的动生电动势。

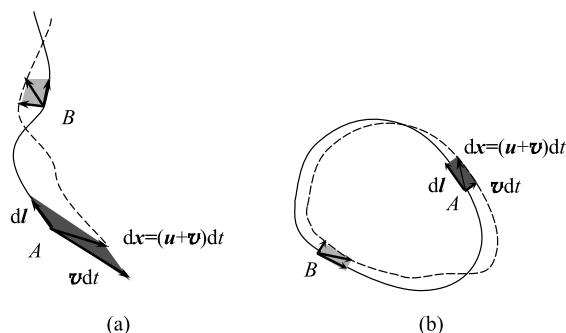


图 2 变形或运动曲线 $L(t)$, 曲面以指向读者为正向。实线是 t 时刻的曲线, 虚线是 $t+dt$ 时刻的曲线, $d\mathbf{x}$ 是电荷在 dt 发生的位移。A 处新增面元(深色)方向指向读者外, 为正; B 处新增面元(浅色)方向背向读者, 为负

(a) 非封闭曲线; (b) 封闭曲线

小结和讨论如下。

感应电动势是对一条固定闭合曲线而言的, 起源于涡旋电场, 它是在假想单位正电荷瞬间绕闭合曲线一周的过程中电场对该电荷所作的虚功。动生电动势可以出现在任意曲线上, 起源于把电荷约束在曲线的某种约束力, 它是在假想单位正电荷瞬间走过整条曲线的过程中约束力和磁力的合力对该电荷作的功, 其中磁力作的总功等于零。在实际物理情形, 约束力可能有多种来源。例如导线的原子系统提供的电磁场、量子多体效应引起的交换关联能, 此外温度、自由电荷密度不均匀等都可以导致等效的约束力。如果线元加速运动, 原则上还应该把惯性力包括在约束力中。

这两种不同物理现象的规律形式上都可以总结为磁通法则。固定闭合曲线上的感应电动势等于通过曲线所围曲面的磁通负变化率。运动曲线

上的动生电动势等于通过曲线扫过曲面的磁通负变化率。单一惯性系中的麦克斯韦电磁理论能够完整准确地描写这两个现象。若用法拉第电磁感应定律(磁通量法则)表述这两个现象的规律,其中电动势要理解为与虚功相联系的一种做功的能力。如文献[3,9]强调的,只在拟稳恒电路中,电动势是一个方便有用的概念。在一般情形,式(2)或式(11)仍然是严格正确的。但是在电磁波通过电路的时间不能忽略的情形,严格地说电磁场对电荷所作的功不能如电动势字面上暗示的那样拥有类似势能的含义,即使电荷位移的路径是预定的。在后面的情形,所谓电动势或本文所称之为虚功只是相应表达式的一种命名而已。根据麦克斯韦方程和洛伦兹力公式有不同方法推导动生电动势,不同的方法可能因为电动势的定义不同或者语境不同导致动生电动势的表达式不同,但其实质一定是等价的,起源是相同的。^[10]

费曼物理学讲义提到,感应电动势和动生电动势是两种不同的物理现象,它们的规律却可以简洁地写成如式(1)的统一方程,是物理学中仅有(少见)的情形^[11]。从惯性系变换的角度讨论感应电动势和动生电动势的关系已有一些有趣的文章^[3,9],本文不再复述。

致谢:感谢邓文基、张宏浩、李新奇、马中水、

帅志刚等教授的有益讨论,及李东宜的英文帮助。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- [2] JACKSON J D. 经典电动力学[M]. 3版,影印版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [3] 邓文基. 电磁感应的通量法则与场方程[J]. 物理与工程, 2022,32(3):3-5,20.
DENG W J. Flux rule and field equation for the electromagnetic induction[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 3-5, 20. (in Chinese)
- [4] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2008.
- [5] 王振林. 现代电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2022.
- [6] 赵玉民. 电动力学教程[M]. 2版. 北京:科学出版社,2021.
- [7] 曹昌祺. 经典电动力学[M]. 北京:科学出版社,2009.
- [8] GRIFFITHS D J. 电动力学导论[M]. 3版,影印版. 新加坡:世界图书出版社,2005.
- [9] 戴希,沙威,陈昊. 对于麦克斯韦方程组,洛伦兹变换的低速极限是伽利略变换吗? [J]. 物理,2022,51(3):145.
- [10] 王青. 深入理解“拓展的麦克斯韦方程组”——2.0版[J]. 物理与工程,2022,32(2):3-6.
WANG Q. Deeply understanding “Expanded Maxwell equations”—Version 2.0 [J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 3-6. (in Chinese)
- [11] FEYMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M. 费曼物理学讲义Ⅱ[M]. 影印版. 新加坡:世界图书出版社,2004.