

大中衔接

第 22 届亚洲物理奥林匹克竞赛理论
第 3 题介绍与解答李文华^{1,2} 刘丽飒^{1,2} 惠王伟^{1,2} 钱 钧^{1,2} 宋 峰¹ 孔勇发^{1,2}(南开大学¹物理科学学院; ²基础物理国家级实验教学示范中心, 天津 300071)

摘 要 第 22 届亚洲物理奥林匹克竞赛理论部分共三道题目, 第三题主要围绕瑞利散射的推导路线展开, 考查了偶极子振荡、光的传播以及量纲分析等知识点, 本文主要对理论第三题的命题和解答进行介绍。

关键词 瑞利散射; 量纲分析; 偶极子振荡; 亚洲物理奥林匹克竞赛

INTRODUCTION AND ANSWERS TO QUESTION 3 IN
THE THEORY PART OF THE 22ND ASIAN PHYSICS
OLYMPIAD EXPERIMENT EXAMLI Wenhua^{1,2} LIU Lisa^{1,2} HUI Wangwei^{1,2} QIAN Jun^{1,2} SONG Feng¹ KONG Yongfa^{1,2}¹ School of Physics; ² National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract There are three topics in the theory part of the 22nd Asian Physics Olympiad. The third topic focuses on the derivation route of Rayleigh scattering, examines knowledge points such as dipole oscillation, light propagation and dimensional analysis. This paper mainly introduces the proposition and solution of the third theoretical topic.

Key words Rayleigh scattering; dimensional analysis; dipole oscillation; Asian Physics Olympiad

2022 年 5 月 23 日至 31 日, 南开大学物理科学学院率领中国代表队参加了由印度主办的第 22 届亚洲物理奥林匹克竞赛(Asian Physics Olympiad, 简称 APhO)。参赛的 8 名中学生获得 7 金 1 银的好成绩, 并取得团体总分第一、理论第一和女生第一的优异成绩。比赛采取线上方式举行, 理论试题有三道大题, 分别为 Stern-Gerlach 实验, 相变的力学模型(A Mechanical Model for Phase Transitions)和麦克斯韦、瑞利与珠穆朗玛峰(Maxwell, Rayleigh and Mount Everest)^[1]。

理论试题总分 30 分, 每题各计 10 分。本文主要对理论试题第 3 题的命题和解答进行介绍, 并对题目间的联系以及中国学生的答题情况进行了简单的分析。

1 试题

1897 年, 瑞利勋爵访问了印度的大吉岭(Darjeeling)。他在远眺 170 km 外的珠穆朗玛峰时, 想起了 26 年前詹姆斯·麦克斯韦提出的关于光

收稿日期: 2023-01-08

基金项目: 2020 高等学校教学研究项目(DJZW202010hb), 南开大学“四新”专业课程改革项目(21NKSYX02), 2022 年南开大学实验课程改革项目-开放实验类(22NKSYKF02)。

作者简介: 李文华, 女, 实验师, 主要研究方向为非线性光学和物理实验教学, liwenhua@nankai.edu.cn。

通讯作者: 刘丽飒, 女, 副教授, 主要研究方向为物理实验教学与激光, lisaliu@nankai.edu.cn。

引文格式: 李文华, 刘丽飒, 惠王伟, 等. 第 22 届亚洲物理奥林匹克竞赛理论第 3 题介绍与解答[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 115-119.

Cite this article: LI W H, LIU L S, HUI W W, et al. Introduction and Answers to Question 3 in the Theory Part of the 22nd Asian Physics Olympiad Experiment Exam[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 115-119. (in Chinese)

在空气中衰减以及遥远山峰的可见度的问题。两年后的 1899 年,瑞利勋爵在研究了这个问题后,他发表了一篇著名的论文^[2]。本题中我们试图重构,或至少部分重构一个现代版的瑞利的推导路线图。

电子云的振荡

建立如下模型:在此模型中考虑经典的中性气体分子,该中性气体分子可视为静止的正电荷 q 被质量为 m 、半径为 r 、电量为 $-q$ 的均匀球形电子云环绕。分子本征振动角频率为 ω_0 ,当以电场矢量为 $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \hat{y}$ 的光照射到该分子上时,环绕正电荷 q 的电子云会以频率 ω 振荡,振荡形式如下

$$y = y_0 \cos(\omega t)$$

此处, y 代表分子中的静止正电荷与负电子云中心之间的距离。

A.1 设电场导致的加速度大小用 $E(t)q/m$ 表示,试建立 y 的运动方程。(0.5 分)

A.2 基于上面给出的信息,求解 y 的运动方程;并求出振幅。(0.5 分)

A.3 在 $\omega \ll \omega_0$ 条件下,求出气体分子的电偶极矩的大小 $p(t)$ 关于时间 t 的表达式。(0.5 分)

A.4 求出 ω_0 关于 q, m, r 的表达式。(0.5 分)

辐射功率: 随时间正弦变化的电偶极子会辐射电磁波。辐射功率依赖于偶极矩的振幅 $p_0 = qy_0$ 、真空介电常数 ϵ_0 、光速 c 和振荡频率 ω 。

B.1 运用量纲分析,求出平均辐射功率 s 关于上述这些物理量的表达式。(1 分)

B.2 令上述表达式中的常数因子为 $1/12\pi$ 。在 $\omega \ll \omega_0$ 条件下,求辐射功率 s 的表达式,用 E_0, ω_0, ω 及相关物理量表示。(0.2 分)

强度的衰减 $I(x)$: 电磁波的强度为 $\frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$, 电磁波的强度会随着光的传播而衰减,单位体积损耗的功率为

$$S = n_0 s$$

其中, n_0 为单位体积内的分子数。

C.1 建立模型,推导出强度 $I(x)$ 随传播距离 x 变化的微分方程。(1 分)

C.2 设初始强度为 I_0 , 求出强度 $I(x)$ 关于距离 x 的函数表达式,用一个与强度下降相关的特征长度 L 来表征。(0.5 分)

C.3 设 m 为一个电子的质量(通常只有一个

电子构成电荷云),并且利用下面的参数

$$n_0 = 2.54 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\omega_0 = 1.25 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 3.25 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

求得 L 的数值(以 km 为单位)。(0.3 分)

D.1 观测者看到的山峰的高度 H' : 图 1 中 P 点表示大吉岭(Darjeeling),大吉岭是喜马拉雅山脉东部的一个小山岗,其海拔高度 $h = 2042 \text{ m}$ 。线段 BS 表示珠穆朗玛峰,其距大吉岭的距离 $d = 170 \text{ km}$,高度 $H = 8848 \text{ m}$ 。另一座山峰干城章嘉峰(图中未显示)距离大吉岭 75 km ,高度为 8586 m 。依据以上提到的物理量,假定观测者无法看到视平线以下,求出大吉岭上的观测者看到的这些山峰相对观测者而言的视竖直高度 H' 的表达式和数值。画出合适的图。已知地球半径 R 为 6378 km 。

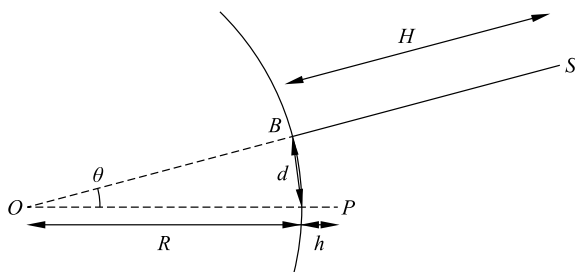


图 1 地表圆弧上坐落着高度 H 的山峰 BS 和高度为 h 的观测点 P 。注意,此图并未按比例绘制

E.1 以在大吉岭上观测到的干城章嘉峰的光强为参考值,则从大吉岭上看,珠穆朗玛峰相对于干城章嘉峰的光强度是多少? 在这个问题中,我们忽略了空气分子数密度随高度的变化。如果光强度为参考值的 5% 或更高,则该山峰可以被看见。试问,在大吉岭上能看到珠穆朗玛峰吗?(1 分)

F.1 气溶胶污染的衰减长度 L_p : 以上,我们计算了与空气分子散射导致的光强度下降有关的特征长度 L 。现在我们关注与气溶胶颗粒(污染)导致的光强度下降有关的特征长度 L_p 。 L_p 取决于粒子数密度 n 和半径为 r 的气溶胶颗粒的横截面积 πr^2 。利用物理推导和量纲分析来获得这种依赖关系。无量纲常数取为 $1/8$ 。假设大吉岭上轻度污染时的平均气溶胶密度为 $\rho_p = 5 \mu\text{g}/\text{m}^3$, 气溶胶颗粒的平均半径为 500 nm 。则特征长度 L_p 为多少? 取单个气溶胶粒子的密度为 $\rho = 3 \text{ g}/\text{cm}^3$ 。注意 $1 \mu\text{g} = 10^{-9} \text{ kg}$, $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ 。

G.1 干城章嘉峰和珠穆朗玛峰的相对强度和能见度;在上述污染水平下,分别估算干城章嘉峰和珠穆朗玛峰的相对于参考值的相对强度。在大吉岭上是否可以看到哪座山峰?假设污染在光的传播路径上是均匀的。

2 试题解答

2.1 A 部分 电子云的振荡

此部分以光场与物质分子的相互作用为主题,从微观角度,将气体分子视为电偶极子^{[3]:83-84},在没有外电场作用时,电子云(见图2)以本征频率 ω_0 作简谐振动,则电子云的本征振荡可表示为

$$y = y_a \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

由题设可知,在有外电场时,电子云的运动方程即 y 的运动方程为

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) \quad (2)$$

将有外电场干扰下的电子云的位移 $y = y_0 \cos(\omega t)$ 代入式(2)可得

$$-\omega^2 y_0 \cos(\omega t) = -\omega_0^2 y_0 \cos(\omega t) - \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3)$$

进一步得到振幅为

$$y_0 = \frac{qE_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (4)$$

则在外电场的作用下,电子云的运动方程为

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) = \frac{qE_0 \cos(\omega t)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (5)$$

分子的电偶极矩为 $p = qy$,且在 $\omega \ll \omega_0$ 条件下,电偶极矩的大小随时间的变化为

$$\begin{aligned} p(t) &= q |y(t)| = q \left| \frac{qE_0 \cos(\omega t)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right| \\ &\approx \frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2} |\cos(\omega t)| \end{aligned} \quad (6)$$

对于近似下的空气分子,中心正电荷对球形电子云的静电力可以表示为

$$\mathbf{F}_{el} = m\ddot{\mathbf{y}} = -m\omega_0^2 \mathbf{y} \quad (7)$$

而正负电荷间的库仑力相等,考虑正电荷在电子云电场中的受力,此时由高斯定理^[4]可知

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{el} &= q \cdot \mathbf{E}_-(y) = q \cdot \frac{4\pi y^3/3}{4\pi r^3/3} (-q) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 y^2} \hat{y} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} y \hat{y} \end{aligned} \quad (8)$$

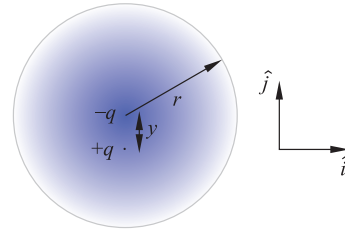


图2 电子云示意图

联立式(7)和式(8)可以得到分子的本征振动频率为

$$\omega_0 = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (9)$$

2.2 B 部分 辐射功率

在国际单位制(SI)下,功率的量纲为

$$[s] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \quad (10)$$

偶极矩的量纲为

$$[p_0] = \text{C} \cdot \text{m} \quad (11)$$

其中,C为库伦,角频率 ω 的量纲为

$$[\omega] = \text{s}^{-1} \quad (12)$$

ϵ_0 的量纲为

$$[\epsilon_0] = \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{C}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^2 \quad (13)$$

光速 c 的量纲为

$$[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (14)$$

假设功率 $s = p_0^a \omega^\beta \epsilon_0^\gamma c^\delta$,即

$$[s] = [p_0]^a [\omega]^\beta [\epsilon_0]^\gamma [c]^\delta \quad (15)$$

可以得到四个方程

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 3\gamma + \delta = 2 \\ -\beta - 2\gamma + \delta = -3 \\ -\gamma = 1 \end{cases} \quad (16)$$

从而可以解得

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -1 \\ \delta = -3 \end{cases}$$

则平均辐射功率 s 可以表示为

$$s = k \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3} \quad (17)$$

其中, k 为常数。若 $k = \frac{1}{12\pi}$,在 $\omega \ll \omega_0$ 时, $p_0 =$

$\frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2}$,则此时功率为

$$s = \frac{1}{12\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3} = \frac{1}{12\pi} \frac{q^4 E_0^2}{m^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (18)$$

2.3 C部分 强度的衰减

如图3所示,假设光照射区域的横截面积为 A ,长度为 Δx ,入射光强为 $I(x)$,透射光强为 $I(x+\Delta x)$ 。则经过该部分大气后,光强的损耗为

$$I(x)A - I(x+\Delta x)A = S \cdot A \cdot \Delta x \\ = n_0 s \cdot A \cdot \Delta x \quad (19)$$

则强度随传播距离 x 的变化的微分方程为

$$-\frac{dI}{dx} = n_0 s \quad (20)$$

已知 $s \propto E_0^2$,同时 $I \propto E_0^2$,则将式(20)改写为

$$-\frac{dI}{dx} = \frac{I}{L} \quad (21)$$

可知

$$L = \frac{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}{n_0 q^4} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \quad (22)$$

若初始光强为 I_0 ,则方程(21)的解为

$$I(x) = I_0 e^{-x/L} \quad (23)$$

将 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $n_0 = 2.54 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $\omega_0 = 1.25 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 3.25 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入式(22)得 $L \approx 130 \text{ km}$ 。

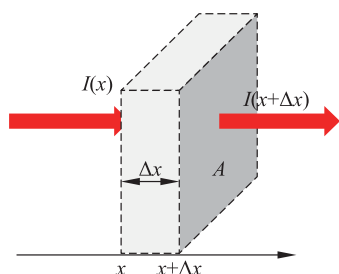


图3 光强衰减示意图

2.4 D部分 山峰的高度

由题设知观测者看不到其视平线以下的內容,则由图1作出如图4的几何图,其中 $B'P$ 代表大吉岭 P 上观测者的视平线,由 P 向 S 延伸的虚线代表观测者望向珠穆朗玛峰的视线,则 $B'S'$ 表示观测者眼中珠穆朗玛峰的高度 H' 。

由图4可知, $\triangle B'SS'$ 和 $\triangle OSP$ 为相似三角形,则可以得到

$$\frac{B'S'}{OP} = \frac{B'S}{OS} = 1 - \frac{OB'}{OS} \quad (24)$$

则

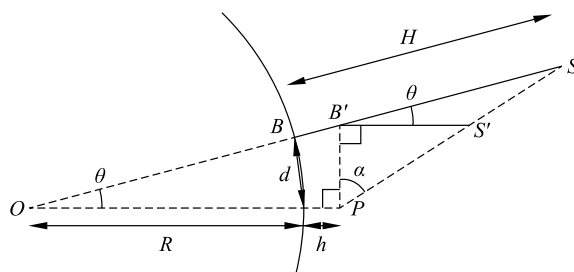


图4 山峰高度几何关系图

$$H' = OP \left(1 - \frac{OB'}{OS}\right) \\ = (R+h) \left(1 - \frac{R+h}{\cos(\theta)(R+H)}\right)$$

山峰间的距离 $d \ll R$,则 $1/\cos(\theta) = \sec(\theta)$ 且 $\sec(\theta) \approx 1 + \theta^2/2$, $\theta \approx d/R$ 。山峰的视觉高度 H' 为

$$H' \approx R+h - \frac{(R+h)^2}{R+H} \left(1 + \frac{d^2}{2R^2}\right) \quad (25)$$

代入数据得到从大吉岭上看珠穆朗玛峰的高度为 $H'_1 = 4535 \text{ m}$,干城章嘉峰的高度为 $H'_2 = 6097 \text{ m}$ 。

2.5 E部分 山峰的可见度

此题要求以干城章嘉峰的能见度为参考点,比较两座山峰作为点光源的光传播到大吉岭处光强的相对强度。如图5所示,考虑珠峰的光传到大吉岭处,除了空气分子的散射耗散外,还有球面波传播的特征^{[3]:37-39},即若光源的出射功率为 P_0 ,则在沒有损耗的情况下距光源 d 处某一点的光强为 $I_0 = P_0/4\pi d^2$,在同时考虑两者的影响时,距离光源 d 处的光强可以表示为

$$I = \frac{P_0}{4\pi d^2} \exp\left(-\frac{d}{L}\right) \quad (26)$$

从大吉岭上看到的珠峰强度相对于干城章嘉峰的强度为

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \exp\left(\frac{d_2 - d_1}{L}\right) \quad (27)$$

代入数据得到 $I_1/I_2 = 9.3\% > 5\%$,所以在大吉岭

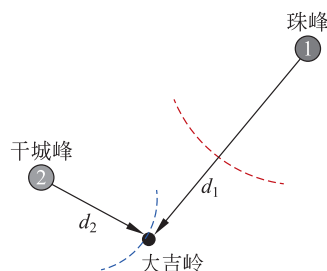


图5 从大吉岭观看两座山峰示意图

上可以看到珠峰。

2.6 F 部分 气溶胶特征长度

与 B 部分的量纲分析类似,可以得到气溶胶的特征长度 L_p 与粒子数密度 n 和颗粒半径 r 的关系为

$$L_p = \frac{1}{8n\pi r^2} \quad (28)$$

已知气溶胶的平均密度 $\rho_p = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, ρ 为气溶胶颗粒密度,将数据代入式(28)可得

$$L_p = \frac{r\rho}{6\rho_p} = \frac{500 \times 10^{-9} \text{ m} \cdot 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{6 \cdot 5 \times 10^{-9} \text{ kg/m}^3} = 50 \text{ km}$$

2.7 G 部分 山峰相对强度和能见度

此部分内容可以说是 E 部分的延伸,在大气分子的基础上加上了污染颗粒的影响,此时式(26)变为

$$I = \frac{P_0}{4\pi d^2} \exp\left(-\frac{d}{L} - \frac{d}{L_p}\right) \quad (29)$$

则干城章嘉峰相对参考值的强度为

$$\frac{I'_2}{I_2} = \exp\left(-\frac{d_2}{L_p}\right) = 0.22 \quad (30)$$

珠穆朗玛峰的相对强度为

$$\frac{I'_1}{I_2} = 0.093 \cdot \exp\left(-\frac{d_1}{L_p}\right) = 0.003 \quad (31)$$

可见在大吉岭上只能看到干城章嘉峰。

3 分析讨论

理论试题 3 考查内容相对来说比较简单,物理知识背景为瑞利散射^{[3]:111-113},即分子量级颗粒对光的散射损耗,正如题目开始说的,题目部分重构了一个现代版的瑞利的推导路线图。题目 A 部分从分子的偶极子模型入手,让答题者先推导出分子在外电场中的极化关系,从而得到分子的偶极矩。B 部分提出运用量纲分析求出分子的平均辐射功率的物理表达式,运用量纲分析较易推导出结果。C 部分由功率转到光的强度,在 C.1 建立了光强的衰减模型后,剩下的就相对简单。D 部分为位置几何关系的考查,考生需明白题中所说的视平线和视竖直高度的含义。E 部分主要是 C 部分理论的应用,此部分只考虑空气分子对光的散射损耗。F 重复使用 B.1 中的量纲分析方法,引出气溶胶对光的散射参量。G 在 E 和 F 的基础上引入除空气分子外其他小颗粒对光强散射

耗散的影响。其中 C 部分可以说是瑞利散射的核心理论,而 E、F 和 G 部分都是瑞利散射结论的应用。各个小题之间的联系如图 6 所示。

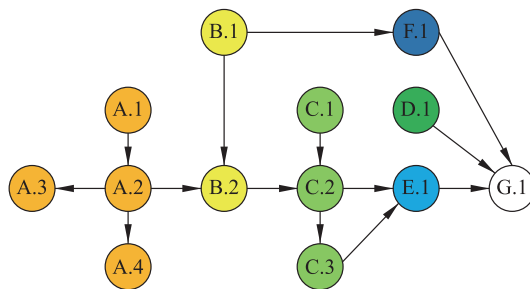


图 6 各题目间连系框图

中国参赛学生在 A.3~C.3、F.1 各题中均拿到满分,而在 A.1~A.2 部分,个别学生因为没有考虑电荷的正负而被扣掉一些分数;在 D.1 题,部分学生因为误将图 4 中 B'S 作为山峰的可视高度而失掉 0.5 分,在 E.1 中只有一位学生考虑了球面波随距离平方衰减的因素,在 G.1 部分,大部分同学因为数值计算错误而失掉 0.1 分。

4 结语

本文对第 22 届亚洲物理奥林匹克竞赛理论第三题的命题和解答进行了详细介绍,并对题目间的连系和中国参赛学生的答题情况进行了简单分析。题目内容主要为瑞利散射理论,同时考查了量纲分析的应用。在本科物理教学中,光的散射部分讲解较少,若将此题目作为课程作业应用于本科的光学教学,相信学生可以通过此题目对瑞利散射理论有一个更好的理解。

参 考 文 献

- [1] [https://apho2022.in/questions-and-solutions/\[Z/OL\]](https://apho2022.in/questions-and-solutions/[Z/OL]) (2022-06-10). [2022-07-15].
- [2] RAYLEIGH L. XXXIV. On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1899, 47(287): 375-384.
- [3] HECHT E. 光学[M]. 5 版. 秦克诚,林福成,译. 北京:电子工业出版社,2019: 83-84.
- [4] 贾瑞皋,薛庆忠. 电磁学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2011:21-25.