

抖空竹, 说物理 ——中国传统游戏与大学物理教学

石宏霆 刘兆龙 王 菲 胡海云
(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

摘 要 “抖空竹”是一项有着悠久历史的中国传统经典游戏。我们将它引入大学物理教学, 挖掘其中蕴含的物理知识, 包括刚体定轴转动定律、回转体进动、绳缠绕问题等, 并用于课堂演示实验与互动。从物理角度探讨空竹游戏, 将中国元素融入大学物理教学, 集知识性、趣味性、思想性于一体, 寓教于乐。这种授课模式, 既加深了学生们对物理知识的理解, 又弘扬了中国传统文化。

关键词 传统游戏; 空竹; 定轴转动定律; 进动

SHAKING DIABOLO, TALKING ABOUT PHYSICS —CHINESE TRADITIONAL GAMES AND COLLEGE PHYSICS TEACHING

SHI Hongting LIU Zhaolong WANG Fei HU Haiyun

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract “Shaking Diabolo” is a Chinese traditional classic game with a long history. We introduced it into college physics teaching, and explored the physical knowledge contained in it, including the law of fixed-axis rotation of rigid bodies, precession of rotating bodies, rope winding problems, etc., and used it for classroom demonstration experiments and interactions. Discuss diabolo games from the perspective of physics, integrate Chinese elements into college physics teaching, integrate knowledge, interest and ideology, and combine education with fun. This teaching mode not only deepens students’ understanding of physics, but also promotes Chinese traditional culture, increases their national pride.

Key words traditional game; diabolo; the law of fixed-axis rotation of rigid bodies; precession

0 引言

中国是一个历经五千年历史的文明古国, 有着灿烂辉煌、博大精深的传统文化, 中国古代的经典玩具也是其中的一部分, 是古人智慧的结晶。对于新时代的大学生, 从多角度、多层面了解中国

传统文化, 有利于培养他们的爱国主义精神。我们大学物理教学团队也积极响应号召, 致力于从多方面加强大学物理课程的思政建设, 力争做到在传授物理知识的同时, 提高学生们的思想政治素养。本文主要介绍我们教学团队在实际课程中的一个实例, 通过玩转一个中国古代传统玩具——空竹(见图1), 讲授其中蕴含的物理知识, 并融入了一定

收稿日期: 2022-11-09

作者简介: 石宏霆, 男, 副教授, 工作方向为凝聚态物理理论计算, 主要研究内容材料高压条件下的结构和磁性相变、弹性属性; 材料体和表面及其缺陷系统的位形和电子结构; 合金生长过程中的动力学演化; 材料可见光区域的光催化性质等。

引文格式: 石宏霆, 刘兆龙, 王菲, 等. 抖空竹, 说物理——中国传统游戏与大学物理教学[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 70-75.

Cite this article: SHI H T, LIU Z L, WANG F, et al. Shaking diabolo, talking about physics—Chinese traditional games and college physics teaching[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 70-75. (in Chinese)

的中国传统文化内容,以寓教于乐的方式,吸引学生的注意力,激发学生的兴趣,积极与学生进行课堂互动,从而加深学生对知识的理解,与此同时,也让学生们对中国传统文化能有更多的了解。



图1 空竹

空竹,又称为空钟、空箏、扯铃等,为一种中国民间传统玩具,发源于北京一带,流行于全国各地。典型的空竹有单轮和双轮之分(见图1),因玩转单轮空竹时,有明显的进动现象,且过程中也涉及刚体定轴转动,所以本论文所介绍的演示实验采用的是单轮空竹。

空竹在中国具有悠久的历史,早在三国时期,曹植即写过一首诗《空竹赋》;宋朝时期,宋江也写过一首关于空竹的诗:“一声低来一声高,嘹亮声音透碧霄,空有许多雄气力,无人提挈漫徒劳。”证明空竹在中国历史上已有较久的历史,是中国传统文化苑中一株灿烂的花朵^[1,2]。

玩转空竹的游戏称作抖空竹、抖地铃、拉空竹等,具有很强的观赏性,可以强身健体。18世纪时,空竹随着欧洲外交使节流传到法国,法国巴黎即有空竹的俱乐部和比赛,空竹变成一种时髦的运动,在拿破仑的宫廷中出现了第一个木制空竹;后来英国人也迷上了这个神奇的小玩意儿,他们称为“两根棍子上的精灵”,很快地受到广泛欢迎。如今空竹已经遍及世界各地,同时每年例行举办的世界杂技大赛中也有空竹的项目。可见空竹这个玩具也为我们与世界的文化交流,做出了自己的贡献^[1,2]。

普通人抖空竹,一般分为启动阶段和维持阶段。启动阶段是通过反复拉扯缠绕在空竹轴上的绳子,利用绳与轴之间的摩擦力矩,加速空竹旋转,最终使得空竹能够达到稳定的进动(见图2)。这个阶段虽然严格来说,不是定轴转动,但我们实际讨论这个过程时,主要是关注摩擦力矩使空竹

加速旋转这一点,可以忽略进动对角动量的影响,因而只涉及刚体定轴转动定律的应用。通过课堂展示,可以定性甚至定量的讨论摩擦力的冲量矩对刚体定轴转动角动量的影响。此外,这个阶段还涉及大学物理力学中的一个典型问题,就是缠绕在圆柱上的绳子两端的拉力、缠绕包角和摩擦力之间的关系。维持阶段是指当空竹转速很快时,已经不用不停地拉扯绳子继续加速转动,空竹会稳定的悬吊在绳子上进动。当然,由于摩擦力的作用,空竹转速会减慢,所以还需要时不时地拉扯一下绳子,以维持空竹的高速自转和稳定进动。这个阶段主要涉及大学物理教学中回转体进动这一知识点。通过现场演示,可以让学生们很直观的理解进动,并且了解自转角速度与进动角速度之间的关系。

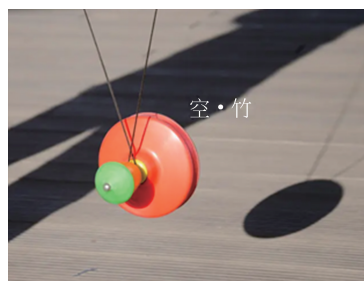


图2 进动中的空竹

接下来,我们将以实际教学为例,分别讨论这两个阶段所涉及的物理问题。

1 空竹中的物理

1.1 启动阶段

1.1.1 刚体定轴转动定律的应用

在启动阶段,主要研究的是摩擦力矩使空竹加速旋转的问题(见图3)。刚体定轴转动定律的表达式为^[3-5]

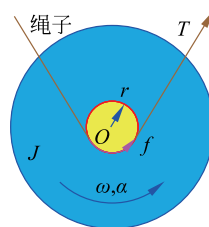


图3 截面图:空竹在摩擦力矩的作用下加速旋转

$$M = fr = J\alpha \quad (1)$$

其中, f 为绳与轴之间的摩擦力, r 为空竹轴的半径, J 为空竹对轴中心线的转动惯量, α 为角加速度, M 为摩擦力对轴中心线的力矩。上式的积分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J(\omega_2 - \omega_1) = J\Delta\omega \quad (2)$$

更能说明这个演示实验中空竹的加速转动过程, 它表明摩擦力对空竹中心轴的冲量矩等于该段时间内空竹对同一轴角动量的增量。式中 ω_1 、 ω_2 、 $\Delta\omega$ 分别为空竹初态角速度、末态角速度、角速度增量。在空竹的启动过程中, 每一次拉扯绳子, 相当于绳子的摩擦力给了空竹一个冲量矩, 使其获得一个角动量(或角速度)增量, 经过反复不断的拉扯, 累积了角动量增量, 使空竹达到很高的转速。由于空竹这个玩具, 在旋转过程中还可以发出响声, 所以它的转速可以很直观的反应在发出声音的强度和音调上。在开始拉扯时, 由于转速较慢, 几乎听不到什么声音, 随着拉扯次数的增加, 发出的声音会越来越响亮, 音调也会越来越高。

启动阶段空竹状态并不稳定, 转速增加是不连续的。每次拉扯绳子, 空竹还伴有向上的加速度, 而拉扯间隙摩擦阻力矩又使它转速减小, 因而整个动力学过程比较复杂, 虽然可以定性的用刚体定轴转动定律来解释, 但几乎无法定量描述。在演示完空竹的进动现象后, 总有一个空竹悬挂在绳子上, 一方面进动, 另一方面在恒定摩擦阻力矩的作用下比较稳定的转速减小过程。如果忽略掉进动, 只考虑这个减速转动, 我们还可以定量的来讨论刚体定轴转动定律在这个过程中的应用, 虽然这里的定量性与严谨的科学实验无法比拟, 但作为粗略的估算, 可以在一定程度上验证定轴转动定律, 有助于学生们对这个知识点的理解。

实际操作中, 在空竹侧面贴上反光膜, 配合一台光感应的转速测量仪(见图4), 可以随时测量空竹的瞬时转速, 进而验证刚体定轴转动定律。由式(2), 在恒定的摩擦阻力矩 M 作用下, 空竹应该做匀减速转动, 有

$$M\Delta t = J(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{M}{J}\Delta t \quad (3)$$

其中, J 为空竹对中心轴线的转动惯量, 显然为常



图4 本实验所用的转速测量仪

量。于是, 此式表明, 在匀减速转动过程中, 相同的时间间隔 Δt , 空竹转速的减小量 $\Delta\omega$ 应该相同。实际演示时, 我们让空竹处于末期的稳定减速转动中, 以相等的时间间隔多次测量空竹转速, 结果显示能较好地符合式(3), 从而验证刚体定轴转动定律。

1.1.2 如何更快的启动空竹——绳缠绕问题

在空竹的启动阶段, 有一个值得讨论的问题, 就是绳子的缠绕方式如何影响转动加速的快慢? 这里涉及绳子两端拉力、摩擦力、绳轴包角之间的关系, 也是大学物理或普通物理中一个常提及的典型问题^[6,7]。

如图5所示, 在空竹轴心 O 参考系, 设绳子一端的拉力为 T_0 , 此端与轴接触点 A 的角位置设为 0° , 在绳上角位置 θ 处截取一段小弧 $d\theta$, 弧两端的拉力分别设为 T 和 $T+dT$, 轴给这段小弧的正压力为 dN , 摩擦力则为 $df = \mu dN$ (因为拉扯过程绳与轴之间有相对滑动, μ 为滑动摩擦系数)。假设绳子为轻绳, 应有小弧所受合外力为零, 于是

$$dN = T \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} \quad (\text{法向}) \quad (4)$$

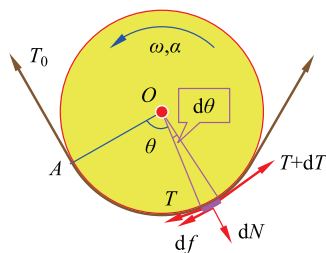


图5 绳对轴的包角与摩擦力矩的关系

$$df = \mu dN = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} \quad (\text{切向}) \quad (5)$$

$d\theta$ 很小, 有 $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, 并略去二阶小量, 可得

$$dT = \mu dN = df \quad (6)$$

$$dN = T d\theta \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu d\theta \quad (7)$$

两边积分

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu d\theta \Rightarrow T = T_0 e^{\mu\theta} \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = T_0 (e^{\mu\theta} - 1) \quad (8)$$

此式表明, 一端拉力确定的情况下, 绳子对轴的包角越大, 两端的拉力差越大。进一步推导, 可得

$$M = \int r df = \int r dT = \Delta T r = T_0 r (e^{\mu\theta} - 1) \quad (9)$$

即加速空竹旋转的摩擦力矩 M 的大小等于绳子两端拉力差 ΔT 乘以轴半径 r , 显然此力矩越大, 空竹旋转的角加速度越大。

实际启动空竹阶段, 一般采用两种绕轴方式, 如图 6 所示。假设图 6(a) 包角为 120° , 图 6(b) 包角为 240° , 显然, 在 T_0 相同的情况下, 包角大的拉扯方式, 获得的加速转动摩擦力矩大, 加速效果也更加明显。演示时, 我们也确实可以看到, 采用图 6(b) 缠绕方式拉扯空竹, 更加容易使它比较快的达到较高的转速。

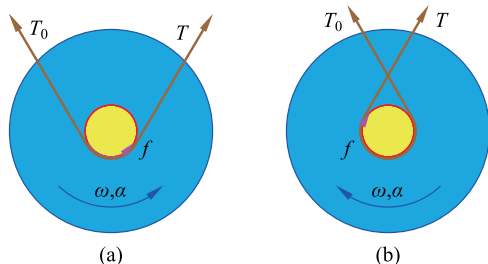


图 6 绳对空竹轴的两端缠绕方式

1.1.3 为什么能加速转动——拉扯与悬吊对空竹转动的影响

这里还有一个问题值得讨论。我们每拉扯一次, 空竹的转速增加一点, 而每次拉扯的间隙中, 空竹是悬吊在绳子上旋转的, 这时绳子的摩擦力反而阻碍它旋转。于是, 在启动阶段, 空竹处在一个不断加速, 减速, 再加速, 再减速的转动状态。

我们发现, 在拉扯绳子增加转速时, 空竹轴与绳子之间是有相对移动的, 所以使其加速转动的是滑动摩擦力矩, 另一方面, 在拉扯间隙中使其减速转动的也是滑动摩擦力矩, 而且实际演示时, 每一次的拉扯时间都很短, 反倒是间隙中悬吊的时间比较长 (每一次拉扯用时约 0.5 秒, 间隙大约 1~2 秒), 也就是说加速时间短, 减速时间长, 为什么总体来说还能加速转动呢?

其实, 这也可以作为一个问题让学生们思考。我们可以这样来解释这个现象: 拉扯空竹的时候, 空竹质心并不是悬停在一个高度上, 而是有一个很大的向上的加速度, 我们向上拉扯的力越大, 这个加速度就越大。这样一来, 它对绳子的压力就会明显增加, 导致滑动摩擦力增大, 于是起到加速转动作用的摩擦力矩会远大于空竹悬吊在绳子上时阻碍它转动的摩擦力矩, 虽然前者的持续时间较短, 但只要我们拉扯的力够大, 前者的冲量矩数值上就会大于后者。于是, 通过这样不断使力的拉扯, 可以让空竹在启动阶段呈现出总体上的加速转动状态。

为简化计算, 分别设想图 7 中的两种情况, 绳子两端都是竖直的。情况 (a) 是空竹悬吊在绳子上, 质心静止, 在摩擦阻力矩的作用下减速转动; 情况 (b) 是拉扯比较使劲, 空竹有一个向上的加速度, 并且此时滑动摩擦力矩加速空竹转动。对于情况 (a), 竖直方向力平衡, 有

$$mg = 2T_0 + f \quad (10)$$

其中, m 为空竹质量, T_0 为右侧绳子的拉力。作用在空竹轴上的总摩擦力为两端绳子的拉力差, 即 $f = \Delta T$ 。由式 (8) 可得

$$\Delta T = T_0 (e^{\mu\pi} - 1) = f \Rightarrow T_0 = \frac{mg}{e^{\mu\pi} + 1} \quad (11)$$

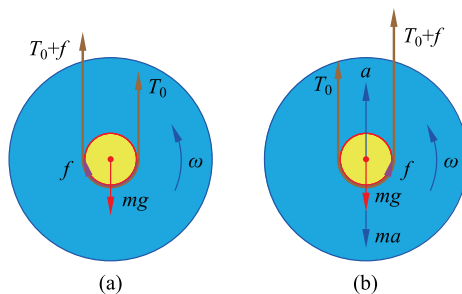


图 7 悬吊与拉扯对空竹转动的影响

(a) 空竹悬吊时, 质心静止; (b) 拉扯绳子加速空竹转动时, 有一个向上的加速度 a

于是摩擦阻力矩为

$$M = fr = mgr \frac{e^{\mu\pi} - 1}{e^{\mu\pi} + 1} \quad (12)$$

对于情况(b),假设拉扯的力量能够使空竹获得向上的加速度 a ,则在空竹的质心参考系中,有如下方程

$$m(g+a) = 2T_0 + f$$

$$\Delta T = T_0(e^{\mu\pi} - 1) = f \Rightarrow T_0 = \frac{m(g+a)}{e^{\mu\pi} + 1}$$

$$M = fr = m(g+a)r \frac{e^{\mu\pi} - 1}{e^{\mu\pi} + 1} \quad (13)$$

对比式(12)和式(13)可以看到,在使劲拉扯空竹,使其有一个向上加速度 a 的时候,摩擦力矩会比悬吊情况下的摩擦力矩大 $mar \frac{e^{\mu\pi} - 1}{e^{\mu\pi} + 1}$,这也就解释了为什么我们可以不断使空竹转动加速。

图7中,因悬吊时,摩擦力矩是阻碍空竹转动的,通过受力分析可知,左侧绳子的拉力大,右侧绳子拉力小,而发力拉扯空竹时,摩擦力矩加速空竹旋转,右侧绳子拉力比左侧大,两种情况相反。

空竹的转速有没有极限呢?我们发现,当空竹转速快到一定程度后,再怎么使劲拉扯,几乎都不会再加快了。绳与空竹轴接触点的线速度达到这一点绳子的最大移动速度时,空竹就不会再增加转速了。因为这时两者相当于在同步移动,也没有了相对移动趋势,所以无论是滑动摩擦还是静摩擦实际上都为零,也就不会再增加空竹的转速了,而我们人拉扯绳子的速度是有极限的。可以估算一下,假设我们拉扯绳子,能使与空竹轴接触点的速度达到 $v = 3\text{m/s}$,那么空竹轴边缘的线速度也只能达到 3m/s ,则它的转速 ω 只能达到 $\omega = \frac{v}{r}$,其中,若轴处的半径取 $r = 0.5\text{cm}$,计算可得最大转速 $\omega \approx 95$ 转/秒。

1.2 维持阶段——空竹的进动

接下来,讨论维持阶段。此阶段空竹悬吊在绳子上,一方面高速自转,另一方面自转轴绕悬吊绳在水平面内转动,发生进动。在不太长的时间内,由于自转速度下降还不明显,可以看到稳定的进动现象,并且如果改变拉扯空竹的方向,使它自转反向,还可以看到它的进动方向也随之改变。

考虑空竹处于水平形态的稳定进动情况,它的侧面如图8(a)所示。设空竹质心 C 到悬吊点

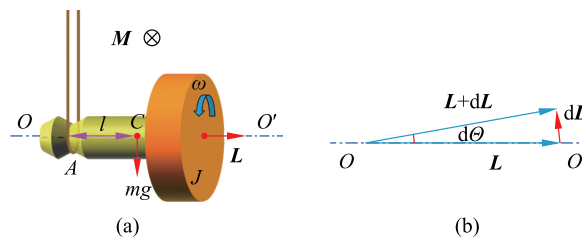


图8 空竹进动分析

(a) 空竹进动时侧面图; (b) 俯视的角动量示意图

A 的距离为 l ,空竹的质量、转动惯量和绕轴 OO' 的角速度分别为 m 、 J 和 ω 。于是,重力对 A 点的力矩为 $M = mgl$,图中位置时指向纸面里,空竹对 OO' 轴的角动量为 $L = J\omega$,图中情况指向右方。

角动量定理 $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$,表明力矩的方向与角动量改变的方向一致,也就是说在如图8(a)的情况中,重力矩不会使得空竹顺时针翻倒(因为如果这样倒下的话,表明角动量改变量的方向竖直向下,与力矩方向不一致,不符合角动量定理),而是使空竹的大头向纸面里偏转(这样才能保证角动量改变量的方向与重力矩一致)。这也就解释了为什么空竹有高速自转时,不会翻倒,而会有进动现象。

图8(b)是从正上方俯视的角动量 $\mathbf{L}$ 和角动量增量 $d\mathbf{L}$ 关系的示意图。在 dt 时间内,不考虑 $\mathbf{L}$ 大小的变化(认为自转速度不变),相当于 $\mathbf{L}$ 在水平面内转过了 $d\theta$,于是有

$$d\theta = \frac{dL}{L} \Rightarrow \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{M}{J\omega} = \frac{mgl}{J\omega} \quad (14)$$

此即空竹进动角速度 Ω 的表达式。上式表明,自转角速度越快,进动越慢。在实际的课堂演示中,可以很明显地看到自转速度与进动快慢之间的这一关系。每次操作,开始阶段空竹自转比较慢,这时进动比较快,自转速度随着拉扯次数而增加后,进动角速度明显慢了下来。这也可以从空竹的声响中判断出来,声音比较小的时候,进动总是比较快,而声音响亮的时候,进动就比较慢。

上面的讨论,我们采用了一定的近似,认为空竹相对于 A 点的角动量,只包含了自转角动量,而忽略了它的进动角动量,这种近似在空竹稳定进动阶段是合理的。根据转速测量仪的测量结果,稳定进动时,自转角速度与进动角速度之比超

过了 10^3 , 因而可以忽略进动角动量对总角动量的影响。演示将要结束时, 在摩擦力的作用下空竹自转会减慢下来, 进动角动量就不能忽略了。此时空竹头会有明显的上下晃动, 这是更为复杂的章动现象, 不在大学物理课程的讨论范围之中了。

我们还可以定量的验证一下式(14)。由于空竹侧面形状不规则, 它的转动惯量 J 不容易获得, 因而完全的验证式(14), 至少在不是以实验为主的大学物理理论课上很难完成。我们退而求其次, 部分验证这个公式, 即验证进动角速度 Ω 与自转角速度 ω 成反比。 Ω 由于比较慢, 用秒表就可以测量; ω 可以用转速测量仪获得(见图4)。表1列出了我们一次实际测量的结果, 可以看到 ω 和 Ω 的乘积大约在 140~160 这一比较小的区间内, 表明实验结果基本符合两者成反比这一结论。当然, 由于实验比较粗糙, 不可能得到很精确的数据和结果, 但对于初学这部分知识的大学生来说, 这个实验还是很直观和形象的, 对于加深他们的理解, 应该也是很有帮助的。

表1 自转角速度与进动角速度的关系
(一次实际测量的记录)

$\omega/(\text{rad/s})$	523	501	443	392
$\Omega/(\text{rad/s})$	0.281	0.312	0.336	0.413
$\omega \times \Omega/(\text{rad}^2/\text{s}^2)$	146.96	156.31	148.85	161.90

其实, 这个课堂演示实验, 是可以与学生们互动的。一方面, 有些测量(比如测角速度)就需要学生们从旁协助, 另一方面, 还可以让学生亲自来玩转空竹。不过, 这对于从没玩过的人来说有一定难度, 需要比较高的技巧, 我们可以用圆形锅盖来代替空竹。锅盖通常很扁, 用绳子悬吊起来后, 质心的位置离悬吊点比较近, 通过拉扯绳子让它旋转起来并且产生稳定进动, 相对容易, 一些学生很快就能掌握。而且对于锅盖, 式(14)中的 l 比较小, 它的进动角速度相对来说就比较小, 这在与空竹的对比中非常明显。稍微拉扯几下锅盖, 它就能产生稳定的进动, 而且比较慢。我们曾作为思考题, 问学生们“空竹和锅盖哪一个更容易玩转起来?”不少学生想当然的给出了错误的回答, 他们会觉得空竹虽然难, 但毕竟就是这么玩的, 应该

会比“非专业”的锅盖简单吧? 可见要想回答这个问题, 还是需要对这部分知识有一定深度的理解。

2 结语

大学物理是理工科大学生的必修基础课。由于不同专业对物理的要求不同, 学生们的重视程度也会有很大差别, 靠生硬的说教, 要求他们人人都热爱物理, 达到很高的物理水平, 是不现实的。然而让学生们在每一节课上都有所收获, 都有令他们难忘的东西, 这是老师们通过努力能够做到的。本文基于我们的课堂实践, 介绍了讲授大学物理中刚体定轴转动定律、进动等知识点的时候, 利用空竹这一有着悠久历史的中国传统经典玩具, 在课堂上实现寓教于乐的一些经验。我们介绍了空竹的历史, 从另一个角度引入了一些中国传统文化的内容, 增强了学生们的爱国主义精神和民族自豪感。通过玩转空竹、实验测量, 以及课堂互动, 加深了学生们对所学知识的理解。这样一个简单的玩具, 包含了不少大学物理中需要讲授的知识点, 综合性很高。这种既学习了知识, 又开拓了眼界, 还可以参与其中、娱乐其中的授课模式, 学生们都对此给予较高的评价, 还有学生现场拍摄视频, 传到网上, 获得了更高的关注度^[8]。

参 考 文 献

- [1] <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A9%BA%E7%AB%B9>
- [2] https://baike.baidu.com/item/%E6%8A%96%E7%A9%BA%E7%AB%B9?fromModule=lemma_search-box
- [3] 张三慧. 大学物理 A 版 力学、热学[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [4] 刘兆龙, 冯艳全, 石宏霆. 大学物理(第一卷)力学与热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [5] GIAMBATTISTA A, RICHARDSON B M, RICHARDSON R C. 物理学(卷1)力学和热学[M]. 4 版. 刘兆龙, 罗莹, 冯艳全, 译. 北京: 机械工业出版社, 2015.
- [6] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
- [7] 漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程 力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [8] <https://mp.weixin.qq.com/s/48r15ogM2jyzt3OHnIcW9w>