

关于二分点进动的一种计算方法

赵 强¹ 刘 萍¹ 张 喆²

(¹ 西安交通大学物理学院, 陕西 西安 710049;

² 西安交通大学计算机科学与技术学院, 陕西 西安 710049)

摘 要 本文首先推导出了一个圆环给处在其环心位置的小圆环的引力力矩公式, 然后利用此公式计算出了月亮及太阳给赤道环的合力矩, 从而用简洁地方法解释了二分点进动的周期。

关键词 圆环; 力矩; 赤道环; 进动

A CALCULATION METHOD OF BINARY PRECESSION

ZHAO Qiang¹ LIU Ping¹ ZHANG Zhe²

(¹ School of Physics; ² School of Computer Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049)

Abstract In this paper we first derived a formula of a large circle's gravitational moment toward a small circle positioned on its center. Then based on this formula, the resultant moment from the Sun and the Moon to the equatorial ring is calculated so that we could briefly explain the period of binary precession.

Key words cycle; moment; equatorial ring; precession

地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动, 进动一周约 26000 年, 这一现象在天文学上被称为二分点的进动或岁差。二分点的进动这一现象早在 2000 多年前就被细心的古代天文学家所发现, 但不同的教科书对谁是首先发现这一现象的人的讲述并不一致^[1-3]。受弗伦奇教授的启发^[1], 本文试图用一简单的、但还不算太粗糙的方法从动力学角度解释二分点的进动。

从动力学角度来说, 地轴之所以会发生进动是由于地球并非是一个严格的球体。在地球的赤道附近有一个凸起的物质带, 而且此物质带随地轴有一 23.5° 的倾角。月亮和太阳给此凸起物质带的合力矩不为零。正是给这一力矩, 使得地轴产生了缓慢的进动。为了求出月亮和太阳给地球

的力矩, 下面我们先做一些准备工作。

如图 1 所示, 一个半径为 r , 质量为 M 的均匀大圆环, 其环心在坐标原点 O 。在距环心为 b ($b \ll r$) 的 O' 点有一质量为 m 的质点, 此质点受到大圆环的万有引力的大小和方向如何?

显然, 根据对称性, 大圆环给质点 m 的万有引力的方向只能沿着 $\overline{OO'}$ 的方向, 即 x 轴的方向。设 dM 为大圆环上的一个小质元, dM 给质点 m 的万有引力沿 x 轴方向的分量为

$$dF = G \frac{m dM}{r'^2} \cos \theta' = G \frac{m dM}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \cos \theta'$$

由于 $b \ll r$, 因此有 $\theta' \approx \theta$ 。将这关系式及 $dM = \frac{M}{2\pi} d\theta$ 代入上式, 并忽略 2 阶小量 b^2 , 有

收稿日期: 2023-04-11

作者简介: 张喆, 女, 工程师, 主要从事计算机基础教学及智慧城市方向的研究, zzhang03@xjtu.edu.cn。

引文格式: 赵强, 刘萍, 张喆. 关于二分点进动的一种计算方法[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 49-51, 56.

Cite this article: ZHAO Q, LIU P, ZHANG Z. A Calculation method of binary precession[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 49-51, 56. (in Chinese)

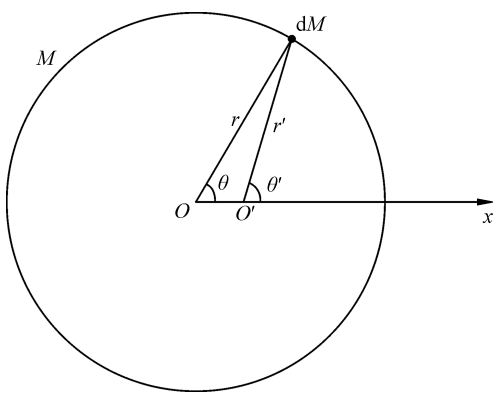


图 1

$$dF \approx G \frac{mM}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{2b}{r} \cos\theta \right) \cos\theta d\theta$$

积分上式,有

$$F = \int dF = G \frac{mM}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + G \frac{mMb}{\pi r^3} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$$

$$= 0 + G \frac{mMb}{r^3} = Gb \frac{mM}{r^3} \quad (1)$$

从式(1)可以看出,大圆环对质点 m 的万有引力与质点偏离圆心的距离 b 成正比,与大圆环半径 r 的三次方成反比。若 $b=0$,即质点正好在环心,大圆环给质点的合力为零。这一点也可由对称性看出。下面利用式(1)来求一个大圆环 M 给一个放在其中心的小圆环 m 的引力力矩。

如图 2 所示,在 xy 平面中,有一个半径为 r ,质量为 M 的大圆环(图中未画出),其环心在原点 O 。在大圆环中心有一半径为 R ($R \ll r$),质量为 m 的小圆环,小圆环的环心也在原点 O 。开始,小圆环也在 xy 平面上,现让小圆环绕 x 轴转 θ 角度。其中的虚线为小圆环 m 的一条垂直于 x 轴的直径。当小圆环平面在 xy 平面上时,该直径与 y 轴重合。当小圆环平面绕 x 轴转 θ 角度时,该直径也随小圆环平面绕 x 轴转 θ 角度,即与 y 轴夹角为 θ 。 n 为小圆环平面的法方向。在这种情况下,大圆环对小圆环的万有引力将会对原点 O 产生多大的力矩呢?

根据对称性,小圆环所受的合力矩只可能沿 x 轴,在 y 轴及 z 轴上的分量必然为零。因此在计算小圆环上的小质元所受的引力对原点 O 的力矩时,只须考虑在 x 轴上的分量即可。如图 2 所示,在小圆环上选一小质元 dm ,其中 $dm = \frac{m}{2\pi} d\varphi$ 。

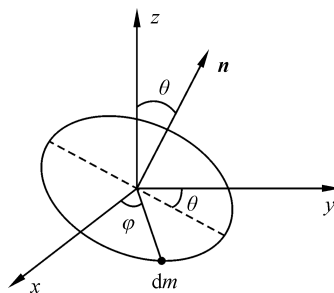


图 2

dm 所对应的矢径在 y 轴上的分量为 $b = R \sin\varphi \cos\theta$,此分量 b 正是小质元 dm 在 y 轴方向偏离原点的距离。所以,根据式(1),质元 dm 受到的沿 y 轴方向的分力为

$$dF = Gb \frac{Mdm}{r^3} = \frac{1}{2\pi} GR \cos\theta \frac{Mm}{r^3} \sin\varphi d\varphi$$

dF 对 x 轴的力矩为

$$d\tau = dFR \sin\varphi \sin\theta = \frac{1}{4\pi} GR^2 \sin 2\theta \frac{Mm}{r^3} \sin^2\varphi d\varphi$$

积分上式,可以得到大圆环给小圆环的引力对环心的合力矩,即

$$\tau = \int d\tau = \frac{1}{4\pi} GR^2 \sin 2\theta \frac{Mm}{r^3} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} GR^2 \sin 2\theta \frac{Mm}{r^3} \quad (2)$$

式(2)表明小圆环所受的力矩与小圆环的半径 R 的平方成正比,与小环的质量 m 成正比。力矩的方向与 θ 的方向相反,有迫使小圆环平面回到 xy 平面的趋势。为了书写简洁,本文只考虑 τ 的数值,不考虑正负号,且将 θ 限制在 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ 之间。至此,我们的准备工作已全部完成。

现在我们来计算月亮和太阳给地球的合力矩。若要直接按力矩的定义来计算月球和太阳给地球的力矩,将会面临两大困难。第一个困难是:月亮和太阳都相对于地球在运动,月亮和太阳在不同的位置给地球的力矩不同,这平均效果如何计算?第二个困难是:赤道附近凸起物的每一个质元相对于月亮及太阳距离和方向都不相同,而且也不存在一个简单的规律,如何去求这无限多个小质元所受力矩的合力矩?弗伦奇教授在他的那本著名的教科书《牛顿力学》中,用一个巧妙的办法完美地解决了第一个困难。现直接引用弗伦

奇教授的原文更为恰当:“如我们已经知道的,进动的周期极其之长,因之,从地球的观点来看,在自转轴的方向没有多少改变的一段时间(例如100年)内,太阳和月球都已走了很多圈。在效果上这意味太阳或月球所代表的质量,从地球上看去,是环绕着它的轨道均匀地抹开的。换言之,地球的引力环境就像是有两个物质环那样。”这一等效的假设使问题大为简化,且十分精确。受弗伦奇教授的启发,我们将地球赤道附近这部分凸起物,近似地看成是紧套在地球赤道上且具有相同质量的均匀圆环。不妨将此环称做“赤道环”。有了“赤道环”的假设,我们就可以利用准备工作中的式(2)来计算弗伦奇教授的“月亮环”及“太阳环”给“赤道环”的合力矩,从而避免了求无限个小质元所受力矩的合力矩的麻烦!至此,两个困难均已得到解决。

图3为月亮环与赤道环之间的位置关系图。太阳环与赤道环之间也存在类似的关系。假设赤道环的质量为 ΔM ,根据式(2),月亮环和太阳环给赤道环的合力矩为

$$\tau = \frac{1}{4}GR^2 \sin 2\theta \Delta M \left(\frac{M_m}{r_m^3} + \frac{M_s}{r_s^3} \right) \quad (3)$$

其中, $R=6.371 \times 10^6 \text{ m}$ 是地球的平均半径, $\theta=23.5^\circ$ 为地轴的倾角; $M_m=7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$ 及 $r_m=3.84 \times 10^8 \text{ m}$ 分别为月亮的质量及地月间距离; $M_s=1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 及 $r_s=1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 分别为太阳的质量及日地间距离。由式(3)可以看出,月亮环及太阳环给赤道环力矩的相对大小为 $\frac{M_m}{r_m^3}/$

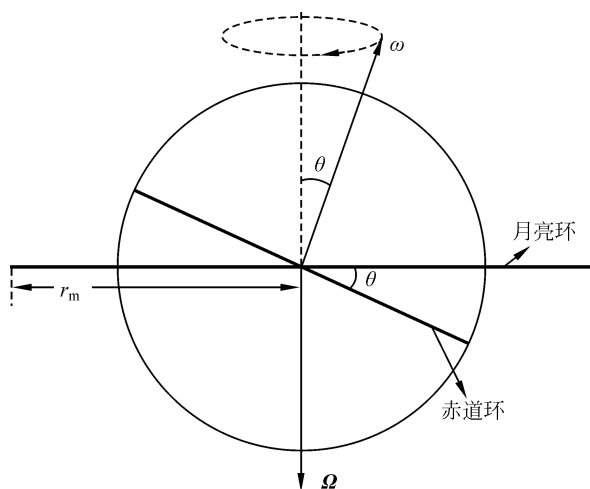


图3

$$\frac{M_s}{r_s^3} = 2.15。$$

地轴的进动方程为

$$\tau = \Omega I \omega \sin \theta \quad (4)$$

其中, Ω 为地轴进动的角速度, $I=0.331MR^2$ 为地球的转动惯量^[4], $\omega=7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 为地球的自转角速度。将式(3)代入式(4),并整理后,有

$$\Omega = \frac{G \cos \theta}{0.662\omega} \left(\frac{M_m}{r_m^3} + \frac{M_s}{r_s^3} \right) \frac{\Delta M}{M} \quad (5)$$

将式(5)中的符号用具体数值代入,有

$$\Omega = 4.00 \times 10^{-34} \Delta M \quad (6)$$

地轴进动的周期为

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\Omega} = 1.57 \times 10^{34} \frac{1}{\Delta M} (\text{秒}) \\ &= 4.97 \times 10^{26} \frac{1}{\Delta M} (\text{年}) \end{aligned} \quad (7)$$

从式(7)可以看出,只要求出赤道环的质量 ΔM ,就可求出二分点进动的周期。可赤道环的质量 ΔM 如何求呢?这一点让笔者感到相当棘手。因地球的凸起物在赤道附近更明显,因此作为一个近似,我们暂且认为赤道环的质量可以看做是南纬 30° 到北纬 30° 之间的凸起物的质量(这也是本文中唯一可能产生较大误差的计算)。赤道半径比极半径大 $h=2.1 \times 10^4 \text{ m}$,从南纬 30° 到北纬 30° 所对应的地球的弧长 $l=2\pi R \frac{60}{360}$,因此,赤道环的体积为

$$\Delta V = 2\pi R l h = \frac{2}{3} \pi^2 R^2 h$$

根据弗伦奇教授的观点,地表附近物质的密度为地球平均密度 $\rho=5.518 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 的一半^[1]。所以赤道环的质量为

$$\Delta M = \frac{\rho}{2} \Delta V = \frac{1}{3} \pi^2 R^2 h \rho \quad (8)$$

将具体的数值代入式(8),有

$$\Delta M = 1.55 \times 10^{22} \text{ kg} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7),有

$$T = 32000 \text{ 年} \quad (10)$$

计算出来的结果误差略大,主要原因是地球并非是一个严格的刚体,将地球看成一个刚体是

(下转第56页)

理论上还是实验上都已经得到初步证实。相关研究极大地丰富了拓扑物态,不仅扩展了人们对凝聚态物理领域中拓扑系统的认识,也拓展了WSM在光电子器件中的应用。通过各向异性的介电函数张量,比较了不同费米能级情况下WSM介电常数的变化。同时基于四阶传输矩阵求解麦克斯韦方程组,得到菲涅尔反射系数,描述电磁波的传输,研究波矢的色散曲线。研究结果表明,WSM的色散在短波矢处具有线性色散,而在长波矢极限近似具有恒定频率。当WSM厚度的持续增大时,能够支持更多的模式分支。

参 考 文 献

- [1] 周丽琴,徐远锋,翁红明,等. 磁性外尔半金属材料研究现状与展望[J]. 物理, 2020, 49(12): 807-816.
ZHOU L Q, XU Y F, WENG H M, et al. Magnetic Weyl semimetal materials[J]. PHYSICS, 2020, 49(12): 807-816. (in Chinese)
- [2] 刘娜,王译,李文波,等. 外尔半金属 WTe₂/Ti 异质结的热稳定性拉曼散射研究[J]. 物理学报, 2022, 71(19): 197501.
LIU N, WANG Y, LI W B, et al. Thermal stability study of Weyl semimetal WTe₂/Ti heterostructures by Raman scattering[J]. Acta Physica Sinica, 2022, 71(19): 197501. (in Chinese)
- [3] 张智强,蒋庆东,陈垂针,等. 外尔半金属及其输运特性[J]. 物理学进展, 2018, 38(3): 101-131.
ZHANG Z Q, JIANG Q D, CHEN C Z, et al. Weyl semimetals and their related transport properties[J]. Progress in Physics, 2018, 38(3): 101-131. (in Chinese)
- [4] 刘昕. 第一类与第二类外尔半金属界面上的菲涅尔反射系数[J]. 光学技术, 2020, 46(3): 342.
LIU X. Fresnel reflection coefficients on the surfaces of type-I and type-II Weyl semimetals[J]. Optical Technology, 2020, 46(3): 342. (in Chinese)
- [5] SU Y X, ILYA B NASSER A, et al. Discovery of a Weyl fermion semimetal and topological Fermi arcs[J]. Science, 2015, 349: 613-617.
- [6] GOOTH J, NIEMANN A C, MENG T, et al. Experimental signatures of the mixed axial-gravitational anomaly in the Weyl semimetal NbP[J]. Nature 547, 324-327 (2017).
- [7] CHI S M, LI Z L, YU H H, et al. Symmetrical broken and nonlinear response of Weyl semimetal TaAs influenced by the topological surface states and Weyl nodes[J]. Annalen der Physik, 2017, 529: 1600359.
- [8] ZHANG J T, ZHANG T N, YAN L, et al. Colossal Room-Temperature Terahertz Topological Response in Type-II Weyl Semimetal NbIrTe₄[J]. Advanced Materials, 2022, 34: 2204621.
- [9] ASADCHY V S, GUO C, ZHAO B, et al. Sub-wavelength passive optical isolators using photonic structures based on Weyl semimetals[J]. Advanced Optical Materials, 2020, 8(16): 2000100.
- [10] ZHAO B, GUO C, GARCIA C A C, et al. Axion-field-enabled nonreciprocal thermal radiation in Weyl semimetals[J]. Nano Letters, 2020, 20(3): 1923-1927.
- [11] PASSLER N C, PAARMANN A. Generalized 4×4 matrix formalism for light propagation in anisotropic stratified media: study of surface phonon polaritons in polar dielectric heterostructures[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2017, 34: 2128-2139.
- [12] HALE N, SIMONSEN I, BRUNE C, et al. Use of 4×4 transfer matrix method in the study of surface magnon polaritons via simulated attenuated total reflection measurements on the antiferromagnetic semiconductor MnF₂ [J]. Physical Review B, 2022, 105, 104421.

(上接第 51 页)

有近似性。最后引用弗伦奇教授的一句话来结束本文是适宜的,那就是:“重要的事情是,用相当简单的方法,我们证实了二分点的进动(岁差)确能用牛顿的动力学原理去理解。”^[1]

参 考 文 献

- [1] 弗伦奇著. A P. 郭敦仁,何成钧译. 牛顿力学(第三册)[M]. 北京:人民教育出版社,1982:217-223.
- [2] MARION J B 编著. 李筌译,杨润殷校. 质点与系统的经典动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1985:382.
- [3] 周衍柏编. 理论力学教程[M]. 1 版. 北京:人民教育出版社,1979:212.
- [4] 张三慧主编. 大学物理学(第一册)——力学[M]. 北京:清华大学出版社,1990:vii-viii,216.