

一端部分封闭管内声波的谐振频率

胡安琦 张格格 李春熠 白在桥

(北京师范大学物理学系, 北京 100875)

摘要 实验发现声波谐振管封闭端微小的缝隙会导致谐振频率发生相当大的移动。本文从理论和实验两个方面对这个现象进行了探讨。理论上, 我们将缝隙简化为一段细管, 在一维波近似下得到确定谐振频率的特征方程, 结果可以定性上解释实验现象。实验上, 我们在封闭端开孔, 通过改变孔的面积使得边界条件从闭管连续过渡到开管情况。测量结果表明, 谐振频率的移动主要取决于开孔面积, 与孔的形状与位置关系不大。随着孔的面积增大, 频率向上移动, 而且呈现显著的先快后慢规律。

关键词 声波谐振管; 管口条件; 谐振频率

RESONANT FREQUENCY OF SOUND WAVE IN A RESONANCE TUBE WITH PARTIALLY CLOSED END

HU Anqi ZHANG Gege LI Chunyi BAI Zaiqiao

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

Abstract In acoustic resonant tube experiment, it is observed that a small clearance between the piston and tube wall can lead to a considerable shift of resonant frequency. In this paper, the phenomenon is investigated in both theoretical and experimental approaches. In theoretical analysis, the clearance is modeled as an additional (small and short) tube, and a characteristic equation for the resonant frequency is derived under the one-dimensional wave approximation. The results can qualitatively explain the experimental phenomenon. In the experimental approach, we cut holes in the plug that is placed at the end of the resonant tube. By controlling the size of the hole, the boundary condition can be changed from closed tube to open tube continuously. Measurement shows that the resonant frequency increases with the area of the hole, but has little to do with the shape and position of the hole. More strikingly, with the increase of the area of the hole, the increase of resonant frequency in the early stage is much faster than that at the later stage.

Key words acoustic resonance tube; boundary condition of the tube; resonant frequency

声波在管内传播的衰减很小, 而且在波长远大于管径时, 管内声波可按一维波处理, 理论分析相对容易^[1]。因此用声波谐振管研究反射、叠加和共振等波动现象具有装置简单、效果明显、测量结果与理论计算符合度高等优点^[2]。对于这个实验, 我们发现有一个问题没有引起足够的注

意^[3-4], 这就是管口封闭不严对谐振频率的影响。对于两端都为开口的谐振管(称为开管), 发生谐振时声压的波节在端口处, 等效管长是半波长的整数倍, 谐振频率可表示为^[2]

$$f_n = \frac{c}{2L}n \quad (1)$$

收稿日期: 2022-04-16

基金项目: 北京师范大学 2022 年度教学改革项目(普通物理实验课程融入思政元素的教学设计理念与方法探究)。

通讯作者: 白在桥, 男, 副教授, 主要从事非线性动力学研究与实验物理教学, phybai@163.com。

引文格式: 胡安琦, 张格格, 李春熠, 等. 一端部分封闭管内声波的谐振频率[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 115-119.

Cite this article: HU A Q, ZHANG G G, LI C Y, et al. Resonant frequency of sound wave in a resonance tube with partially closed end [J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 115-119. (in Chinese)

其中, $n=1,2,3,\cdots$ 为管内半波长的数目, 等效管长 L 为实际管长 L_0 加上两端的管口修正 $0.8d$, d 为管的内直径, c 为声速。对于一端开放、一端封闭(称为闭管)的情况, 由于封闭端是声压的波腹, 谐振频率可以表示为^[2]

$$f_n = \frac{c}{2L} \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

其中, 等效管长 $L = L_0 + 0.4d$ 。我们用 PASCO WA-9612 声波谐振管测量, 表 1 给出了一部分实测数据。可以发现, 开管的测量结果与理论值之差不超过 4Hz, 但闭管的测量结果相比理论值都偏大, 最大超过了 40Hz。经过排查, 发现误差源自用来封闭管口的活塞与谐振管内壁之间存在缝隙: 谐振管的内直径 $d = 32\text{mm}$, 而活塞的直径 $d' = 30\text{mm}$ 。厂家这样做的目的原本是为了使活塞能够在管内自由移动, 从而改变有效管长。我们用橡胶膜填充缝隙, 保证不漏气之后, 测量结果与理论值之差就在合理范围内了(表 1 中实测 2)。

表 1 谐振频率测量值与理论值比较

		$n=3$	$n=4$	$n=5$
开管	理论/Hz	560.7	749.6	934.5
	实测/Hz	564.6	746.2	935.6
闭管	理论/Hz	479.1	670.7	862.3
	实测/Hz	521.6	699.9	886.7
	实测 2/Hz	479.4	667.6	859.6

$c = 346\text{m/s}$, 开管 $L_0 = 900\text{mm}$, 闭管 $L_0 = 890\text{mm}$

虽然一个简单的操作就可以解决问题, 但这个现象本身看起来并不寻常: 与管径相比, 活塞与管壁之间的缝隙并不算大($1-d'/d=0.06$), 以至于仪器厂家想当然地认为问题不大, 但由此导致的谐振频率移动量却可以接近对应模式的开管与闭管谐振频率之差的一半。考虑到闭管端是声压的波腹, 如果存在开口与大气相通, 哪怕开口很小, 也会对原来的声场产生很大的影响。因此这个现象也并非难以理解。

本文将从理论和实验两个方面对这个现象进行进一步的讨论。在理论分析上, 我们采用一个非常粗略的模型, 把活塞与管壁之间的缝隙看成一段细管, 然后采用一维声波近似, 得到可以用来计算谐振频率的特征方程。为了检验简化模型的合理性, 我们在封闭端挖孔, 通过改变孔的面积(以及形状与位置), 使得边界条件从闭管连续过

渡到开管, 然后实测这个过程中谐振频率的变化。发现结果虽然在定量上有一定差别, 但是这个简化模型依然可以定性描述谐振频率的变化规律。

1 简化理论

我们在原来谐振管的一端接一段细而短的管代表活塞与管壁的间隙(参见图 1), 这种截面积有突变的管也可以用一维声波近似分析^[1]。在一维声波近似中, 两部分管的截面形状是不重要的, 只有截面积起作用。设两段管的等效长度分别为 L_1, L_2 , 截面积分别为 S_1, S_2 。如图 1 所示建立坐标系, 设管内各点空气柱的位移为

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{i(kx - \omega t)} + B_1 e^{-i(kx + \omega t)} & x \in [-L_1, 0] \\ A_2 e^{i(kx - \omega t)} + B_2 e^{-i(kx + \omega t)} & x \in (0, L_2] \end{cases}$$

其中, $\omega/k = c$ 。管内各点声压

$$p(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$$

在交界处($x=0$)满足流量连续(物质守恒)

$$S_1(A_1 + B_1) = S_2(A_2 + B_2)$$

和声压平衡

$$A_1 - B_1 = A_2 - B_2$$

在两端与大气相通, 声压为零

$$\begin{cases} A_1 e^{-ikL_1} - B_1 e^{ikL_1} = 0 \\ A_2 e^{ikL_2} - B_2 e^{-ikL_2} = 0 \end{cases}$$

综合以上关系, 有

$$\begin{bmatrix} S_1(1 + e^{-i2kL_1}) & S_2(1 + e^{i2kL_2}) \\ 1 - e^{-i2kL_1} & 1 - e^{i2kL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

此方程有非零解, 要求行列式

$$\begin{vmatrix} S_1(1 + e^{-i2kL_1}) & S_2(1 + e^{i2kL_2}) \\ 1 - e^{-i2kL_1} & 1 - e^{i2kL_2} \end{vmatrix} = 0$$

上式化简, 可得特征方程

$$\cot kL_1 + \epsilon \cot kL_2 = 0 \quad (3)$$

($\epsilon \equiv S_2/S_1$)。容易验证, 当 $\epsilon=0$ 和 $\epsilon=1$ 时, 特征方程分别给出闭管和开管的谐振频率计算公式。对于我们的情况, $\epsilon = 1 - d'^2/d^2 = 0.121$ 。如果

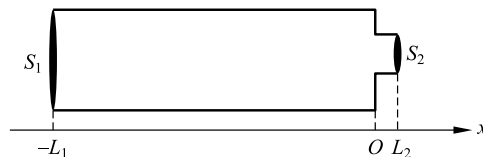


图 1 突变截面谐振管示意图

式(3)对任意的 ϵ 都成立,则有

$$L_2 = \frac{1}{k} \arctan(\epsilon \tan k L_1)$$

取 $L_1 = L_0 + 0.4d$,代入表1中闭管实测数据,得到 $n=3,4,5$ 对应的 L_2 分别为15mm,18mm和17mm,整体相差不大,而且略大于活塞的厚度(10mm),多出的部分可以理解为某种管口修正。在这点上说明一维波近似是合理的。

如果 $kL_2 \ll 1$,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,由式(3)可得

$$k \approx \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_1} + \frac{\epsilon}{L_2 \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi}$$

对应谐振频率移动

$$\Delta f = \frac{ck}{2\pi} - \frac{c}{2L_1} \left(n - \frac{1}{2}\right) \approx \frac{c\epsilon}{(2n-1)\pi^2 L_2} \quad (4)$$

可见 Δf 与 ϵ ,即缝隙的相对面积,成正比。但是其比例系数反比于一个小量 L_2 ,一般会相当大。这就解释了相当小的缝隙会导致可观的谐振频率移动。此外,这个关系也解释了模式数 n 越小, Δf 越大。

2 实验装置与测量方法

一维声波模型忽略了截面突变处空气柱的径向运动,虽然可以定性解释实验现象,但其适用性还需要用实验加以检验。为此我们改造了声波谐振管。选取一根长900mm,内径34mm,外径40mm的有机玻璃管,在两端各粘有一段不锈钢外螺纹管,上面可以拧紧一个环形端帽,用来在谐振管端部固定挡片。挡片是厚度2mm、直径略小于端帽内径的圆形有机玻璃片,中心用激光切割出不同大小的孔(参见图2)。安装时在挡片与谐振管之间放置乳胶环形垫片,然后拧紧端帽保证边缘密封良好。

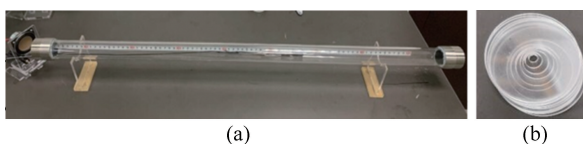
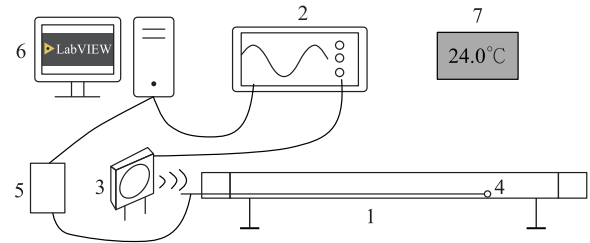


图2 声波谐振管(a)和一组挡片(b)

实验装置如图3所示,其中信号发生器为普源DG1032,扬声器是2寸全频喇叭(Hivi B2S),麦克风为Audio-Technica AT9904,数据采集卡为NI-myDAQ,可直接插入麦克风采集声压信号。

计算机安装有LabVIEW软件,可以编写程序控制信号发生器输出波形参数,并从信号采集卡读入采集波形进行分析。数字温度计用于监视环境温度。因为实验用时较长,测量过程中室温会有所改变。根据声速 $c \propto \sqrt{T}$,所有的谐振频率都先标定到相同温度下然后进行比较分析。



1—谐振管; 2—信号发生器; 3—扬声器; 4—微型麦克风;

5—数据采集卡; 6—计算机; 7—数字温度计

图3 实验装置示意图

在测量谐振频率之前,首先测量信号激励-采集系统的频率响应曲线:撤去谐振管,扬声器面对开放空间,将麦克风放在扬声器前约3cm处。信号发生器输出正弦波,保持幅度不变而扫描激发信号频率,记录采集信号的幅度,结果见图4。可以看出,除了在200Hz附近有一个明显的峰,频率特性曲线相当平坦。后续测量频率范围在400~1100Hz之间,共振曲线测量可以不做频率响应修正。

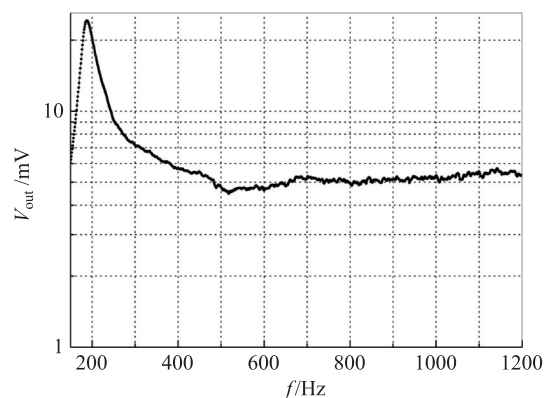


图4 激励-测量系统频率响应曲线

在测量谐振频率时,我们先根据麦克风测量信号幅度粗略确定其大小,并把麦克风移动到波腹附近。然后程序控制在谐振频率附近测量共振曲线(参见图5)。最后用洛伦兹线型

$$V_{\text{out}} = A_b + \frac{A\omega^2}{\omega^2 + (f - f_0)^2}$$

拟合共振峰的形状,得到谐振频率 f_0 。实测谐振频率的重复性误差一般小于 1Hz。虽然我们只关心谐振频率的变化,需要指出的是,我们在实验中发现开孔对共振峰宽度的影响很小,这意味着开孔并不会引入显著的耗散(阻尼)。

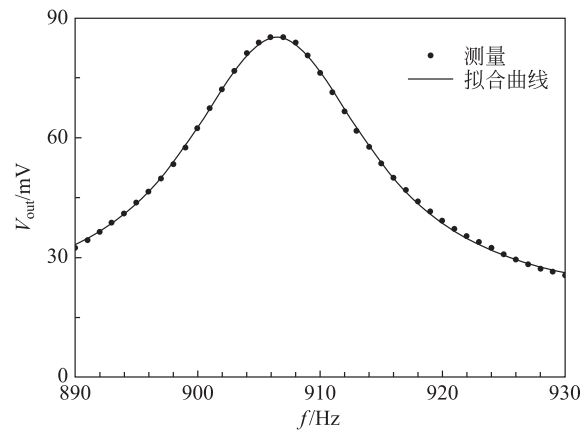


图 5 共振曲线及洛伦兹线型拟合

3 实验结果

3.1 开孔面积的影响

首先我们在挡片上的中心位置切割出面积不同的圆孔和正方形孔,测量 $n=5$ 模式的谐振频率,结果见表 2。以开孔面积(S_2)与管横截面积(S_1)之比为横坐标画出谐振频率的变化趋势,结果见图 6。可以发现:圆孔和方孔的数据点近似位于同一条光滑曲线上。这表明谐振频率主要由开孔面积决定。谐振频率随 S_2 增大而增大,呈现明显的先快后慢特征。这与引言中描述的现象是一致的。作为对比,图 6 中还画出了根据式(3)计算的理论曲线,计算时取

$$L_2 = d_0 + 0.4 \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}}$$

其中, $d_0=2\text{mm}$ 为有机玻璃片的厚度。虽然采用了一维波近似,理论计算曲线相当好地给出了谐振频率的变化趋势,尤其在两端符合得很好。

3.2 开孔形状的影响

考虑到圆和正方形具有较好的对称性,我们进一步测量了半圆形和长方形孔对谐振频率的影响,其中长方形孔的长保持 24mm,宽改变。半圆的圆心和长方形的中心位于挡片的中心。测量结果见表 3 和图 7。可以看出,长方形孔和半圆孔的数据与圆孔/正方形孔的有一些偏离,

表 2 圆孔和方孔对谐振频率的影响($n=5$)

圆孔		方孔	
半径/mm	谐振频率/Hz	边长/mm	谐振频率/Hz
0	851.02	0	851.02
2	862.27	3	860.56
4	878.25	6	873.99
6	893.88	9	886.83
8	905.25	12	898.80
10	914.59	15	907.86
12	921.21	18	915.27
14	925.78	21	920.27
16	928.19		

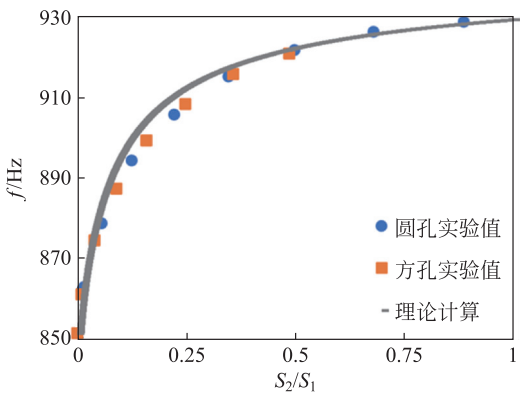


图 6 圆孔与方孔对谐振频率的影响

但整体趋势相似,都呈现明显的先快后慢规律。当面积较小时,长方形孔引起的频率移动比相同面积的圆孔和方孔的更大。这可以解释为:此时长方形孔类似一条细缝,更利于管内外空气的流动。

表 3 半圆和长方形孔对谐振频率的影响($n=5$)

长方形		半圆	
宽/mm	谐振频率/Hz	半径/mm	谐振频率/Hz
0	851.02		
2	884.70	0	851.02
4	896.24	2	859.60
6	902.32	4	870.00
8	907.47	6	881.98
10	910.99	8	892.06
12	913.64	10	901.44
14	917.24	12	908.46
16	919.95	14	913.38
18	921.10	16	915.96
20	923.04		
22	924.25		

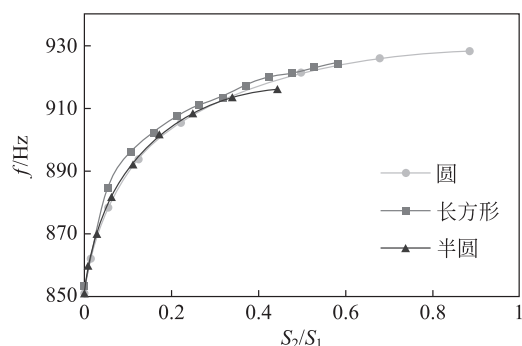


图7 不同开孔形状对谐振频率影响的比较

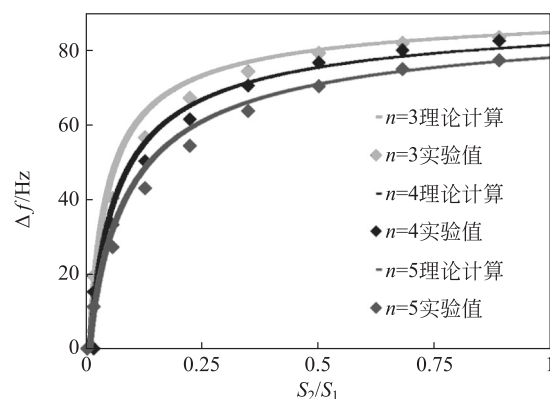


图8 圆孔对不同模式谐振频率影响的比较

3.3 振动模式的影响

前面的实验表明谐振频率移动主要取决于开孔的面积。为了探究不同谐振模式对开孔面积的敏感程度,我们测量了圆孔在 $n=3$ 和 $n=4$ 时的数据,结果见表4。综合表2和表4的数据,图8给出了不同模式的谐振频率移动量(相对闭管)与相对开孔面积的比较。可以看出:不同模式的谐振频率变化趋势相同,而且模式数 n 越小,先快后慢的现象越明显,这与采用一维波近似的理论分析所得结论相符。事实上,如果 $L_2 \propto \sqrt{S_2}$,当 S_2 很小时,根据式(4)有

$$\Delta f \propto \frac{c}{(2n-1)S_1} \sqrt{S_2}$$

除了以上实验,我们还测量了偏心圆孔与偏心方孔对谐振频率的影响。结果发现改变开孔位置造成的频移不大(一般小于3Hz),谐振频率移动还是主要依赖于开孔面积,而且增长主要发生小开孔阶段。

表4 圆孔对谐振频率的影响($n=3,4$)

半径/mm	谐振频率/Hz	
	$n=4$	$n=3$
0	661.94	473.09
2	677.16	492.49
4	695.17	513.33
6	712.03	529.52
8	723.30	540.16
10	732.32	547.14
12	738.49	552.08
14	741.66	554.75
16	744.22	556.38

4 结语

本文研究了谐振管封闭端存在小开孔对谐振频率的影响。理论和实验都表明:谐振频率移动主要依赖于开孔的面积,与开孔的形状与位置的关系都不大。更重要的是,谐振频率随开孔面积增大而增大趋势呈现显著的先快后慢规律。谐振频率对小开孔的敏感性也许有一定应用价值,比如用作一种空腔密闭性非接触式检测手段。

致谢: 本论文得到北京师范大学2022年度教学改革项目“普通物理实验课程融入思政元素的教学设计理念与方法探究”的支持,本文实验得到北京师范大学物理实验教学中心王爱记老师和陈学智老师的帮助,在此一并感谢。

参考文献

- [1] 杜功焕,朱哲民,龚秀芬. 声学基础[M]. 南京:南京大学出版社,2012.
- [2] PASCO Scientific. Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO scientific Model WA-9612[Z]. 1988.
- [3] GONG W P, WANG Y S, BAI Z Q, et al. Investigation on experiments of acoustic resonance in tubes[J]. College Physics, 2018, (11): 21-23.
- [4] RONG P X, SONG J H, KANG X Y. Acoustic resonator experiments based on LabVIEW[J]. College Physics, 2020, (4): 56-59.