

撒克逊碗的下沉临界条件与沉没时间

李佳泓¹ 林蕴芊¹ 赵芸赫² 黄敏³ 马宇翰⁴

(¹ 北京师范大学物理学系, 北京 100875; ² 首都师范大学附属中学, 北京 100048;

³ 四川省成都市新都一中铭章学院, 四川 成都 610500;

⁴ 中国工程物理研究院研究生院, 北京 100193)

摘要 “撒克逊碗”是一种底部有孔的计时装置。本文以圆柱形撒克逊碗为例,建立了其在水中下沉的物理模型。首先,本文确定了撒克逊碗顺利下沉的临界条件,包括水能涌入碗的条件和碗初释放时出现倒灌现象的条件。然后,本文研究了水涌入碗后系统的动力学过程,推导出碗的下沉时间与碗的几何特征间的定量关系。进一步,本文设计了实验以检验理论模型的正确性。与实验得到的碗下沉时间相比,相应的理论值普遍偏小。将碗下沉过程中受到的黏滞阻力和压差阻力、孔口处淹没射流及水头损失、碗完全浸没前受表面张力的影响考虑在内后,理论和实验的一致性明显增加。最后,本文还引入了壁面函数用于分析形状各异的撒克逊碗的下沉时间。

关键词 撒克逊碗; 临界条件; 孔口射流; 表面张力; 壁面函数

RESEARCH ON THE SINKING TIME AND CRITICAL CONDITIONS OF SAXON BOWL

LI Jiahong¹ LIN Yunqian¹ ZHAO Yunhe² HUANG Min³ MA Yuhang⁴

(¹ Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875; ² Capital Normal University High School, Beijing 100048;

³ Mingzhang College, Xindu No. 1 Middle School, Chengdu, Sichuan 610500;

⁴ Graduate School of Chinese Academy of Engineering Physics, Beijing 100193)

Abstract Saxon bowl is a timing device with a hole in the bottom. In this paper, a physical model of cylindrical Saxon bowl sinking in water is established. First, this paper determined the critical conditions for the successful sinking of the Saxon bowl, including the conditions under which water can flood into the bowl and the conditions under which the bowl is initially released. Then, this paper studied the dynamics of the system after the water pouring into the bowl and deduced the quantitative relationship between the sinking time of the bowl and the geometric characteristics of the bowl. Furthermore, experiments are designed to test the correctness of the theoretical model. Compared with the experimental sinking time of the bowl, the corresponding theoretical value is generally smaller. After taking into account the viscous resistance and differential pressure resistance in the process of bowl sinking, the loss of submerged jet and head at the orifice, and the influence of surface tension before the bowl is completely immersed, the consistency between theory and experiment is increased obviously. Fi-

收稿日期: 2022-03-14

作者简介: 赵芸赫,女,中教二级教师,主要研究方向为物理课程与教学论、IYPT 问题解决;黄敏,女,中学高级教师,研究方向为物理竞赛教学及课程设计。李佳泓和林蕴芊对本文同等贡献。

通讯作者: 马宇翰,男,博士,主要研究方向为有限系统热力学、黑洞信息问题, yhma@gscaep.ac.cn。

引文格式: 李佳泓,林蕴芊,赵芸赫,等. 撒克逊碗的下沉临界条件与沉没时间[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 107-114.

Cite this article: LI J H, LIN Y Q, ZHAO Y H, et al. Research on the sinking time and critical conditions of Saxon bowl[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 107-114. (in Chinese)

nally, a wall function is introduced to analyze the sinking time of various shapes of Saxon bowls.

Key words saxon bowl; critical condition; jet flow; surface tension; wall function

从古至今,时间的测量和记录是人类文明中的重要一环。随着对不同工具的开发使用,和对自然规律认识的加深,人们基于不同的物理原理发展了不同类型的计时器。在当今社会,计时已成为各种电子产品,智能设备的基本功能。在公元五世纪,撒克逊人、古代波斯人设计了一种计时装置,他们将一个底部有洞的碗放在水中,通过观察碗的下沉进行计时。这种被称为“撒克逊碗”的装置,其实是“水钟”(clepsydra)的一种。这是一类用水流进行时间测量的工具,是古代世界重要的实用计时设备。水流进或流出不同盛放容器时,可以根据容器内水面高度等参数的变化确定时间。在计时机制上水钟大致可分为两种:漏刻型和入刻型^[1]。本文所研究的“撒克逊碗”就是一种典型的“入刻型”计时器。

此前,撒克逊碗的计时特征已吸引了相当的研究兴趣。例如,钟书河山等通过较为简单的物理模型,分析了撒克逊碗下沉时间与碗质量、缺口面积、液体密度的关系^[2]。王幸等对撒克逊碗在下沉中的简谐振动进行了修正,得到了对运动过程的简单物理解释^[3]。此外,也有学者基于软件仿真从数值上研究了这一问题^[4]。值得一提的是,撒克逊碗要实现计时功能,首先需要能在水中顺利下沉。从受力平衡的角度来说,其下沉需要碗的几何特征满足特定条件。据笔者所知,这一对撒克逊碗而言重要的“临界条件”还未被系统研究过。

本文从撒克逊碗的下沉出发,建立其在水中下沉的物理模型,讨论了其顺利下沉的“临界条件”。然后,研究了水涌入碗后系统的动力学过程,推导出碗的下沉时间与碗的几何特征间的定量关系,并在实验中进行了验证。研究发现由该理论模型计算得到的下沉时间普遍小于实验值,因此进一步修正理论模型,将黏滞阻力、孔口淹没射流、水头损失、表面张力等因素考虑在内,结果表明理论和实验的一致性明显增加,从而使该模型可以更好地预测撒克逊碗的下沉时间。最后,由于撒克逊碗在实际应用中具有多种形状,所以本文引入了壁面函数,以研究形状各异的撒克逊碗的下沉时间。

1 理论模型的建立

1.1 撒克逊碗模型

通过实验观察到碗的运动规律:碗开始下沉时出现振动现象,具有阻尼振动和定向运动的双重特征。此后阻尼振动趋于消失,碗开始近匀速下沉。下面本文基于刚体动力学和流体力学分析碗在水中的运动情况。

简便起见,本研究以圆柱形碗作为分析模型,如图1所示。其中碗外液面到碗底的距离 $h(t)$ 和碗内液面高度 $x(t)$ 是本文研究的两个主要含时变量,通过这两个观测量来分析碗的运动过程,测量碗的总下沉时间。

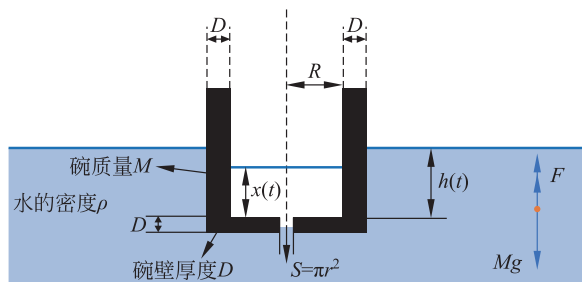


图1 撒克逊碗简化模型示意图

1.2 关于下沉临界条件的讨论

在本节中,我们首先对撒克逊能够成功的下沉的条件进行分析。

1.2.1 水涌入碗的临界条件

当碗轻放在水面时,会发现碗底与液面有一段高度差 h 。这段高度差导致的压力 $F_h = P_h S$ 使得水从小孔涌入碗中,这里 $S = \pi r^2$ 和 $P_h = \rho gh$ 分别是半径为 r 的小孔的面积和液面压差。 ρ 为水的密度, g 为当地重力加速度。一个孔很小的碗置于水面并不会下沉,而是在孔口形成一个液面凸起,如图2所示。由于表面张力 F_L 的存在,只有当 $F_h \geq F_L$ 时,水才能涌入孔中。

因此,水涌入碗底的临界条件即为

$$F_L = P_L S = \rho gh S \quad (1)$$

其中,杨-拉普拉斯公式给出表面张力压为

$$P_L = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

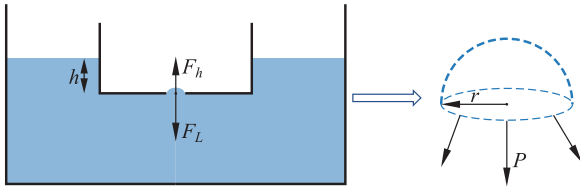


图2 孔很小时液面凸起的示意图

其中, γ 为水的表面张力系数, R_1, R_2 为曲率半径。将这个凸面近似为球面, 则有 $R_1 = R_2 = r$, $P = 2\gamma/r$, 联立式(1)、式(2)即可得到能使撒克逊碗下沉的小孔临界半径为

$$r = \frac{2\gamma}{\rho gh} \quad (3)$$

对于水而言, 表面张力系数 $\gamma \approx 0.073 \text{ N/m}$, 代入一组实验中的数值 ($h = 1.5 \text{ cm}$, $r = 0.1 \text{ cm}$) 到下沉的小孔临界半径约为 0.093 cm , 与实际情况吻合。

1.2.2 碗初释放时出现倒灌的临界条件

如图3所示, 实验中发现撒克逊碗在释放后可能出现倒灌现象。起初, 碗在释放后做振幅逐渐减小至消失的振动, 最后碗稳定下沉。将碗的振动近似成阻尼振动, 由于阻尼振动的振幅为 $Ae^{-\beta t}$, 即随着时间的增加, 振幅减小。因此若振动振幅最大时碗不出现倒灌现象, 整个过程便不会出现该现象。

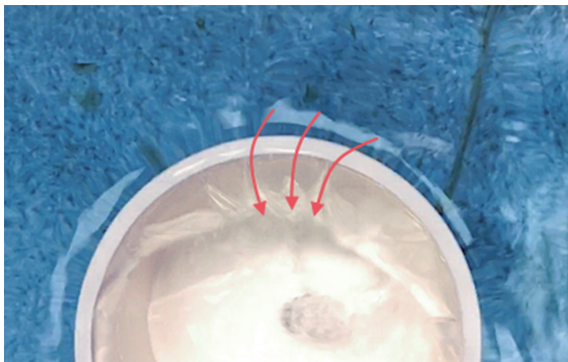


图3 碗初释放时出现倒灌的实验图

由于从碗释放到水倒灌入碗中的时间极短, 可近似认为 $Ae^{-\beta t} \sim A$ (振幅保持不变), 此时也可将黏滞阻力 f 的影响忽略, 从小孔处进入碗中的水也可忽略。因此对碗进行受力分析, 根据受力平衡条件可得

$$Mg = F_0 = \rho\pi(R+D)^2 h(t_0)g \quad (4)$$

其中, M 为碗的质量, t_0 为碗处于平衡位置的时刻, F_0 为碗在平衡位置处受到的浮力, R 为碗口

内径, D 为碗壁的厚度, $h(t_0)$ 为 t_0 时刻碗外液面到碗底的距离, 则有

$$h(t_0) = M / [\rho\pi(R+D)^2] \quad (5)$$

以平衡位置为原点 O , 建立竖直向下的 y 轴, 如图4所示。根据牛顿第二定律, 得 $Mg - \rho g\pi(R+D)^2 [y + h(t_0)] = M\ddot{y}$ 。将 $h(t_0)$ 的表达式代入, 得

$$\ddot{y} + \frac{\rho g\pi(R+D)^2}{M} y = 0 \quad (6)$$

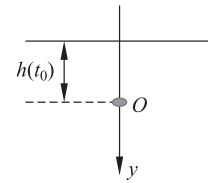


图4 碗初释放时做简谐振动的分析示意图

显然, 式(6)是简谐振动类型的运动方程。代入初值条件: $t=0$ 时, $y = -h(t_0)$, $y' = 0$ 。解得

$$y = \frac{M}{\rho\pi(R+D)^2} \cos \left[(R+D) \sqrt{\frac{\rho g\pi}{M}} t + \pi \right] \quad (7)$$

因此, 若要防止碗出现倒灌现象, 碗的高度 H 需满足 $H \geq \frac{2M}{\rho\pi(R+D)^2}$ 。即撒克逊碗出现倒灌现象的临界条件为

$$H = \frac{2M}{\rho\pi(R+D)^2} \quad (8)$$

我们通过改变碗的质量 M 来寻找碗出现倒灌现象的临界条件, 代入两组实验中的数据 ($M_1 = 0.433 \text{ kg}$, $M_2 = 0.453 \text{ kg}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $R = 0.05 \text{ m}$, $D = 0.003 \text{ m}$, $H = 0.08 \text{ m}$), 发现实验中质量 $M_1 = 0.433 \text{ kg}$ 的碗恰好不出现倒灌现象, 而质量 $M_2 = 0.453 \text{ kg}$ 的碗出现倒灌现象。理论估算的碗的高度为 0.098 m , 较实际实验值偏大, 这是因为碗完全浸没前受到的表面张力会阻止碗出现倒灌现象。我们会在第三节中具体讨论表面张力的影响。

1.3 碗的动力学方程分析

在分析出使撒克逊碗顺利下沉的临界条件后, 本小节研究其下沉的动力学方程。为了简化理论分析, 现做出如下理想化条件假设: (1) 对于碗的形状, 首先考虑横截面积不随高度变化的碗 (圆柱体碗); (2) 对于碗底的孔, 考虑其为圆形孔

且先考虑孔在碗底中央,不考虑碗在下沉时由于水在碗中分布不均发生倾斜的情况;(3)对于周围的水:将其视为理想流体,并且假设液面足够大,即碗外液面高度变化不计。

由以上假设,当撒克逊碗在密度为 ρ 的水中下沉时,可在理论模型中选取一段流管,由伯努利原理得

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P_0 + \rho g x(t) = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + P_0 + \rho g h(t) \quad (9)$$

其中, P_0 为当地大气压, $x(t)$ 是碗内液面的高度。由于孔的流量守恒,水进入碗的流速 v 远大于水进入碗前的流速 v_0 ,则有: $v^2 - v_0^2 \approx v^2$ 。从而得到

$$v = \sqrt{2g[h(t) - x(t)]} \quad (10)$$

以碗为参考系,根据孔两端的流量守恒有

$$[\dot{h}(t) + \dot{x}(t)] - \dot{x}(t) \pi R^2 = (v - \dot{x}(t)) \pi r^2 \quad (11)$$

联立式(10)与式(11),得

$$\dot{x}(t) \frac{R^2}{r^2} = \sqrt{2g[h(t) - x(t)]} \quad (12)$$

另外,碗及碗中的水这个整体在竖直方向上受到重力 $G = [M + \rho\pi R^2 x(t)]g$,以及与运动方向相反的浮力 $F = \rho g \pi R^2 h(t)$ 。考虑撒克逊碗在竖直方向上的运动,可以列出如下动力学方程

$$[M + \rho\pi R^2 x(t)]\ddot{h}(t) = [M + \rho\pi R^2 x(t)]g - \rho g \pi R^2 h(t) \quad (13)$$

联立式(12)与式(13),有

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \left[\frac{[\ddot{x}(t)]^2 + \dot{x}(t)x^{(3)}(t)}{g} \right] - g + \frac{\rho g \pi R^2}{M + \rho\pi R^2 x(t)} \left\{ x(t) + \frac{1}{2g} \left(\frac{R}{r}\right)^4 [\dot{x}(t)]^2 \right\} = 0 \quad (14)$$

其中, $x^{(3)}(t)$ 代表 $x(t)$ 关于时间的三阶导。上式是一个三阶常微分方程,在 MATLAB 中通过 ode 函数数值求解得到碗的速度-时间图像,如图 5 所示,其中计算所取参数为 $M = 0.500\text{kg}$, $R = 0.03\text{m}$, $r = 0.005\text{m}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $g = 9.8\text{m/s}^2$ 。可以看到碗下沉一段时间后速度达到稳定状态,此时有 $\ddot{x}(t) = 0$, $x(t)^{(3)} = 0$ 。

因此,式(14)可写为

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2Mg}{\rho\pi}} \left(\frac{r^2}{R^3}\right) \quad (15)$$

此时碗已达到稳定下沉,并且内外液面差保持稳

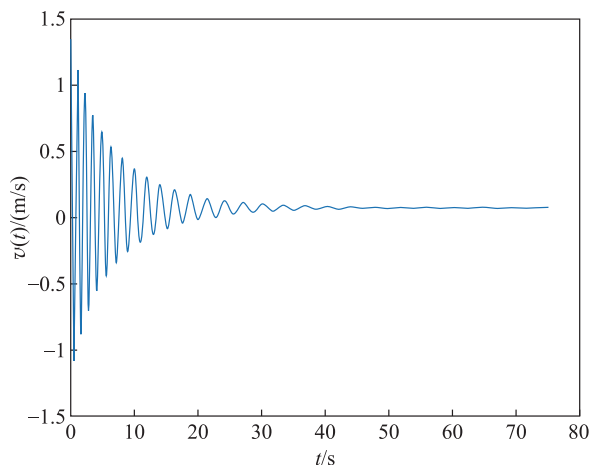


图5 利用 MATLAB 软件绘制碗的下沉速度 v -时间 t 图

定,故可认为全过程碗下沉的平均速度 $\bar{v}(t) \approx \dot{x}(t)$ 。

若碗的高度为 H ,则稳定下沉时间为

$$T = \sqrt{\frac{\rho\pi}{2Mg}} \left(\frac{R^3}{r^2}\right) H \quad (16)$$

由式(16)看出下沉时间与 R^3 , r^{-2} , H , $M^{-\frac{1}{2}}$ 成正比。

2 实验探究

2.1 实验设计

本研究搭建的实验装置如图 6 所示。其中,为减小边界效应的影响,实验中采用了较大的方形水缸,将撒克逊碗从水面中央释放;并且使用电磁铁释放贴有铁片的撒克逊碗,保证撒克逊碗没有初速度地被平稳释放。同时,为了得到精确的下沉时间,在距离水缸正面中心约 1m 处架设手机拍摄设备,拍摄帧率为 30~120fps 不等。

具体实验步骤如下:1)按照装置图摆放实验器材,调整拍摄设备高度,保证能全部记录碗的运动。在释放前保证水面稳定,碗底恰好接触水面;2)打开摄像装置;3)通过电磁铁释放撒克逊碗;4)碗接触水缸底部后关闭摄像;5)将视频导入分析软件 Tracker 逐帧分析,确定下沉时间。

2.2 验证理论预测

为了验证在第 1 节中得到的撒克逊碗下沉时间与 R^3 , r^{-2} , H , $M^{-\frac{1}{2}}$ 成正比的预测。实验中通过控制变量并多次测量的方法得到的下沉时间与

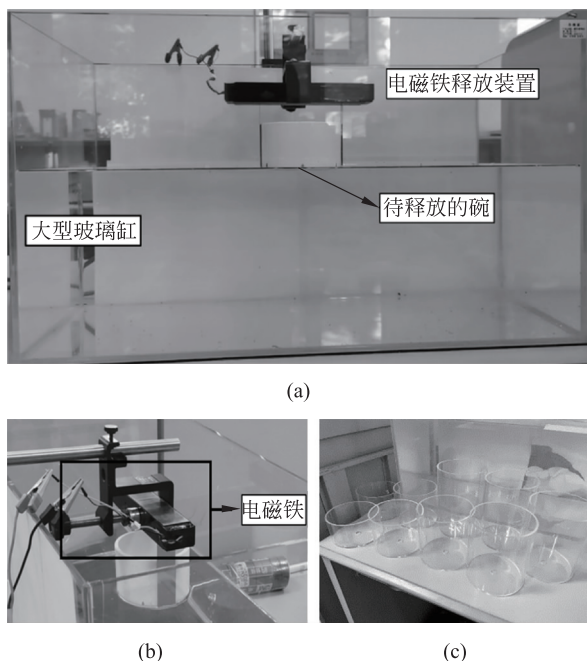


图6 实验装置及器材

(a) 实验装置实物图；(b) 释放装置放大图；(c) 各种参数的撒克逊碗

各参数的关系如图7所示。可以看出,撒克逊碗的下沉时间 T 与 R^3 , r^{-2} , H , $M^{-\frac{1}{2}}$ 均成正比。同

时,相关性系数 R^2 均能达到 0.99 以上,这说明理论建立中得到的下沉时间 T 与各参数之间的定量结论是正确的。

为了进一步验证理论对于下沉时间预测的准确性,实验中随机选择 8 个碗,8 个碗相应的几何特征如表 1 所示,测量这 8 个碗下沉时间六次后,将实验结果与理论值进行对比,如表 2 所示。表中的不确定度指合成不确定度 $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$,其中 A 类标准不确定度 $u_A = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 / [n(n-1)]}$, n 为实验测量次数, q_i 为第 i 次测量的测量值, $\bar{q}$ 为 n 次测量值的平均值; B 类不确定度 $u_B = \Delta_{\text{仪}} / \sqrt{3}$, $\Delta_{\text{仪}}$ 为仪器的最大允许误差。以 120fps 的手机摄录为例, $\Delta_{\text{仪}} = 1/120\text{s}$, $u_B \approx 0.005\text{s}$ 。

可以发现,通过该模型计算出的理论下沉时间均小于实验值。考虑到理论建立时忽略了一系列阻碍水涌入碗中的因素,如黏滞阻力、孔口淹没射流、水头损失、表面张力等,从而导致了理论值偏小。为了对下沉时间进行更加准确的估计,接下来将在第 3 节进行理论修正。

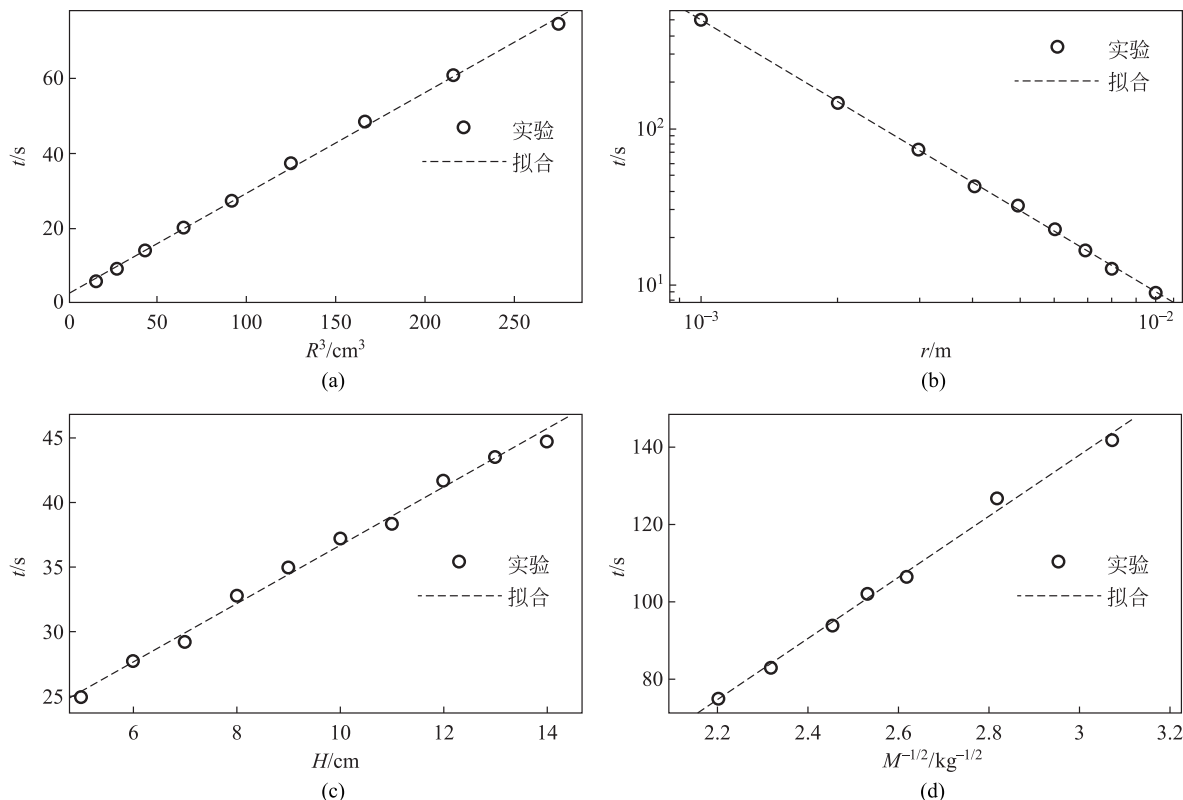


图7 下沉时间与各参数的关系

(a) T 与 R^3 的关系；(b) $\ln T$ 与 $\ln r$ 的关系；(c) T 与 H 的关系；(d) T 与 $M^{-1/2}$ 的关系

表1 实验装置规格

编号	M/g	R/mm	r/mm	D/mm	H/mm
1	25.3	20.0	4.0	3.2	33.0
2	36.8	25.0	5.0	3.4	35.0
3	59.9	32.0	6.0	3.7	40.0
4	94.9	38.0	7.0	4.2	47.0
5	140.9	45.0	9.0	4.5	55.0
6	140.8	45.0	10.0	4.5	55.0
7	222.9	55.0	8.0	4.9	65.0
8	223.1	55.0	4.0	4.9	65.0

表2 理论值与实验值对比

编号	理论值 /s	实验值 /s	相对偏差 /%	标准差 /s	不确定度 /s
1	1.55	1.95	26	0.054	0.022
2	1.63	2.04	25	0.039	0.016
3	2.01	2.51	25	0.038	0.016
4	2.41	3.62	50	0.041	0.017
5	2.32	2.61	13	0.034	0.014
6	1.90	2.16	14	0.027	0.011
7	4.87	6.99	42	0.029	0.012
8	19.27	25.47	32	0.26	0.11

3 理论模型的修正

3.1 系统受到的阻力的修正

根据朗道的《流体动力学》^[6],分析此时圆柱形碗和碗中的水在运动的过程中受到的阻力由两部分组成:黏滞阻力 f_v 和压差阻力 f_p 。根据奥森公式,圆柱形物体在粘性流体中平动时受到的黏滞阻力

$$f_v = 4\pi\eta v / \ln\left(\frac{3.70\tau}{Rv}\right)$$

其中 η 为液体的动力黏度,通过查表可得在 20℃ 时,水的动力黏度为 $1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ^[6]。 τ 为液体的运动黏度,其与动力黏度的关系为

$$\tau = \eta / \rho$$

其中, τ 的单位为 m^2/s , ρ 为水的密度。压差阻力正比于液体的流速 v ,即

$$f_p = kv$$

其中,系数 k 为阻力系数,由于 k 的具体数值与碗的相关参数有关,其具体数值根据实验和理论的拟合效果来选取。此时碗受到的总阻力为

$$f = f_v + f_p = \frac{4\pi\eta v}{\ln\left(\frac{3.70\tau}{Rv}\right)} + kv \quad (17)$$

3.2 薄壁孔口淹没射流产生的水头损失的修正

实际液体是具有黏滞性的,液流克服流动阻力需要消耗一部分机械能,产生水头损失。此时伯努利原理不再适用。

根据液流的边界条件,水头损失分为两种形式:(1)沿程水头损失 h_f :沿程水头损失主要产生于液体恒定均匀流动过程;(2)局部水头损失 h_i :当液体的流程突然改变时,将引起液流断面流速分布的急剧变化和调整,此时产生的水头损失称为局部水头损失。由于小孔的长度与半径都很小,属于薄壁孔口淹没射流,小孔处的液体形态发生突然改变,此处撒克逊碗和碗中的水整个系统的水头损失以局部水头损失为主。

应用薄壁孔口淹没射流(考虑局部水头损失)满足的能量方程^[7]

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2g} + x(t) + \frac{(\zeta_0 + \zeta')v^2}{2g} = h(t) \quad (18)$$

其中, v 为收缩断面处流体的流速, ζ_0 为孔口自由出流的局部水头损失系数, ζ' 为淹没出流的局部水头损失系数($\zeta' \approx 1.0$ ^[7])。考虑到水的不可压缩性和流量关系

$$Q = \epsilon v \sigma = \dot{x}(t) \pi R^2 \quad (19)$$

式(18)可以化为

$$\left[\frac{1}{2g} + \frac{(\zeta_0 + \zeta')(\pi R^2)^2}{2g\epsilon^2\sigma^2} \right] \dot{x}^2(t) = h(t) - x(t) \quad (20)$$

这里, ϵ 为孔口收缩系数, σ 为表面张力系数。利用 MATLAB 求解理论修正后得到的动力学方程,能够更加准确地测量出碗外液面达到碗口高度的时间,有利于后续测量碗下沉的时间。

3.3 碗完全浸没前受表面张力影响的修正

受碗口外边沿水的表面张力影响,碗在完全浸没前将减缓下沉速度甚至停滞一段时间,对碗进行受力分析。

碗受表面张力影响的示意图如图 8 所示,由于受表面张力影响的区域很小,此处 L 近似取为一个定值。碗处于停滞阶段时,碗内的水面不断上升,系统质量增大,当 θ 为某一值,且碗的表面张力、浮力不足以支撑碗的重力时,碗浸没于水中,完全下沉。表面张力 $F' = 2\sigma\pi(R+D)$,其中 σ 为表面张力系数。对碗在末状态时的受力进行修正: $Mg - F_0 - f - F'\cos\theta = M\ddot{h}(t)$,将 $\cos\theta$ 的表达式代入得

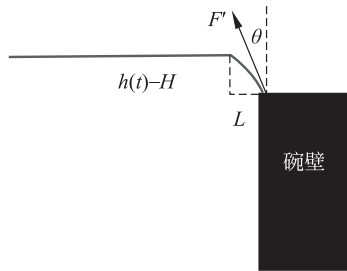


图8 碗受表面张力影响的示意图

$$Mg - F_0 - f - 2\sigma\pi(R + D) \frac{h(t) - H}{\sqrt{[h(t) - H]^2 + L^2}} = M\ddot{h}(t) \quad (21)$$

同样利用 MATLAB 常微分方程求解器 ode 求解修正后的二阶微分方程组。得到碗受表面张力的影响的数值解,结果如图 9 所示,其中所用碗的参数为 $M=0.169\text{kg}$, $R=0.055\text{m}$, $r=0.008\text{m}$, $H=0.06\text{m}$, $D=0.004\text{m}$, $L=0.001\text{m}$ 。此外,取 20°C 下水的动力密度 $\eta=1\times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$,运动黏度 $\tau=1\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$,阻力系数 $k=0.62\text{kg/s}$,水与空气的表面张力系数 $\sigma=72.75\times 10^{-3}\text{N/m}$, $\zeta_0=0.06$, $\zeta'=1.0$, $\epsilon=0.64^{[7]}$ 。

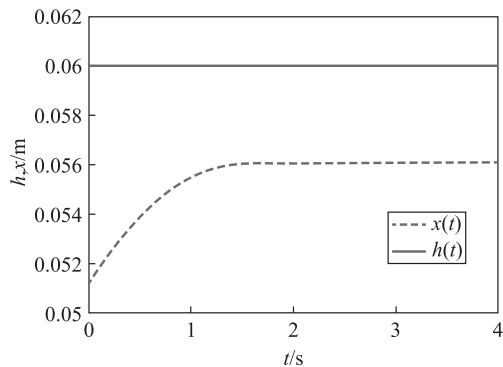


图9 考虑碗受表面张力影响的下沉曲线的数值结果

通过图 9 可以看出,当碗外液面到碗底的距离 $h(t)$ 达到碗的高度 $H(0.06\text{m})$ 时,碗内液面高度 $x(t)$ 还未达到碗的内深度 $(H-D)$,而是经过 $1\sim 2\text{s}$ 的时间,碗才能完全浸没下沉,说明对表面张力在最后浸没前的理论修正是有必要的。

综合考虑以上理论修正的结果,并将理论预测的碗下沉总时间与实验测量值(每个编号的碗重复测量 6 次)进行对应,得到表 3 中的结果。

表3 下沉时间的理论实验对比

编号	理论值/s	实验值/s	相对偏差/%	标准差/s	不确定度/s
1	1.84	1.95	6.0	0.054	0.022
2	2.21	2.04	7.7	0.039	0.016
3	2.42	2.51	3.7	0.038	0.016
4	3.75	3.62	3.5	0.041	0.017
5	2.81	2.61	7.1	0.034	0.014
6	2.01	2.16	7.5	0.027	0.011
7	7.32	6.99	4.5	0.029	0.012
8	24.86	25.47	2.4	0.260	0.110

将理论修正后预测的下沉时间与实验数据进行对比,发现相对偏差大大减小。

3.4 不同几何形状碗的下沉时间

因为碗有很多不同的形状,如果一一研究会耗费大量的时间与精力,所以考虑引入一个函数来描述不同形状的碗内液面半径 R 与碗内液面的高度 x 的依赖关系,以下称这个依赖关系为碗的“壁面函数”。结合本文的物理模型,即可得到适用于形状各异的碗的动力学方程。对于基本圆柱体撒克逊碗,其截面半径与高度无关,也就是说 R 是常数。如果知道碗的壁面函数,即 $R(x)$,则可以将理论模型推广到任何具有旋转对称表面的碗。

若考虑碗的壁面函数,则根据水的不可压缩性和流量关系得到的式(19)应改写为

$$Q = \epsilon v \sigma = \dot{x}(t) \pi R^2(x) \quad (22)$$

对于不同的碗有不同的壁面函数:常见的碗的形状有圆柱形、半球形、圆台形等。对于圆柱形碗,壁面函数 $R(x) = R_0 = \text{const}$ 。而对于如图 10 所示的半球形碗,易得其壁面函数

$$R(x) = \sqrt{R_0^2 - (R_0 - x)^2} = \sqrt{2R_0x - x^2} \quad (23)$$

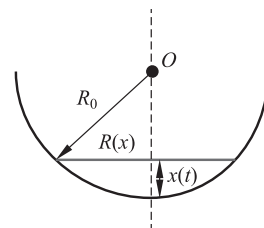


图10 半球形碗壁面函数示意图

将半球形碗的壁面函数 $R(x)$ 代入描述碗的

动力学方程组,计算其下沉时间,并与实验获得的数据(每个编号的碗重复测量 6 次)进行对比。实验中使用的 3 个半球形撒克逊碗由 3D 打印制成(见图 11)。3 个半球形碗相应的几何特征如表 4 所示,将实验结果与理论计算值进行对比,如表 5 所示,其中不确定度计算方式与表 2 相同。

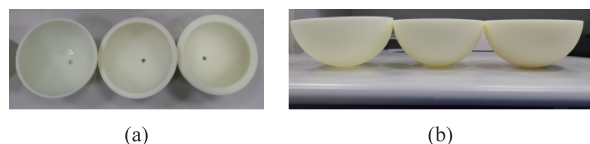


图 11 3D 打印半球形碗照片
(a) 半球形碗的俯视照片; (b) 半球形碗的主视照片

表 4 实验装置规格

编号	M/g	R/mm	r/mm	D/mm	H/mm
1	25.3	80.0	5.0	5.0	80.0
2	52.8	80.0	5.0	7.5	80.0
3	102.9	80.0	5.0	10.0	80.0

表 5 下沉时间的理论实验对比

编号	理论值/s	实验值/s	相对偏差/%	标准差/s	不确定度/s
1	42.42	48.36	14	0.561	0.24
2	24.16	26.22	8.5	0.240	0.16
3	12.82	14.64	14	0.163	0.13

可以发现,由于边界层流对不同形状碗的运动的影响等因素未考虑进壁面函数,理论计算的下沉时间与实验结果之间的相对偏差较大。这也是本文后续研究的方向。

4 结语

本文以最简单的圆柱形撒克逊碗为例,首先明确了撒克逊碗顺利下沉的临界条件,包括水能涌入碗的条件和碗初释放时出现倒灌现象的条件。接着分析了碗下沉的动力学过程,得到了下沉时间 T 与碗的口径 R ,小孔半径 r ,碗的高度 H ,碗的质量 M 之间的定量关系。

进一步,本文设计实验验证了理论所预言的撒克逊碗的下沉时间 T 与 $R^3, r^{-2}, H, M^{-\frac{1}{2}}$ 均成正比。实验也观察到碗的下沉是一个振幅、频率

减小的振荡运动。此外,注意到理论值普遍小于相应的实验结果的事实,将碗下沉过程中受到的黏滞阻力和压差阻力、薄壁孔口处淹没射流及这个过程产生的水头损失、碗完全浸没前受表面张力的影响这几个方面纳入考虑并修正理论后,计算得到撒克逊碗下沉时间 T 与实验测得的数据符合较好。

从应用的角度来说,本文得到的撒克逊碗“顺利下沉”的临界条件,能避免在实际制造中产出无法计时的器件;动力学分析中得到的下沉时间与碗的几何特征间的定量关系以及修正项的引入,对设计计时精度更高的撒克逊碗有指导意义;最后,本文引入的容器壁面函数为统一研究各种形状的撒克逊碗的下沉时间提供了有效思路,这使得优化萨克逊碗形状得到性能更佳的计时装置成为可能。

参 考 文 献

- [1] GOODENOW J, ORR R, ROSS D. Mathematical models of water clocks[J]. Rochester Institute of Technology, New York, USA, 2015.
- [2] 钟书河山,易荣彬,李金蛟,等. 撒克逊碗下沉时间的研究[J]. 物理实验, 2021, 41(2): 37-42.
ZHONG S H S, YI R B, LI J W, et al. Research on the sinking time of Saxon bowl[J]. Physics Experimentation, 2021, 41(2): 37-42. (in Chinese)
- [3] 王幸,黎秋航,侯吉旋,等. 探究撒克逊碗的下沉: 对简谐振动的修正[J]. 大学物理, 2021, 40(11): 80-85.
WANG X, LI Q H, HOU J X, et al. Exploration of the sinking of Saxon bowl: correction of simple harmonic vibration[J]. College Physics, 2021, 40(11): 80-85. (in Chinese)
- [4] 李辰然,冯翠娣,朱泉水. 撒克逊碗计时分析与研究[J]. 安徽电子信息职业技术学院学报, 2021, 20(3): 19-23
LI C R, FENG C D, ZHU Q S. Analysis and Study of Saxon Bowl Timing[J]. Journal of Anhui Vocational College of Electronics & Information Technology, 2021, 20(3): 19-23. (in Chinese)
- [5] 漆安慎,杜婵英. 普通物理学教程 力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1997: 279-282
- [6] 朗道 E. M. 栗弗席兹. 理论物理学教程 第六卷 流体力学[M]. 5 版. 李植,等,译. 北京:高等教育出版社, 2012: 70-71.
- [7] 龙天渝,童思陈. 流体力学[M]. 2 版. 重庆:重庆大学出版社, 2018: 89-91.