

# 人造飞船逃逸地球三种方法的理论分析与数值模拟

金惠吉<sup>1</sup> 陈超<sup>1</sup> 杨祺<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 昆明市第八中学, 云南 昆明 650032; <sup>2</sup> 云南师范大学物理与电子信息学院, 云南 昆明 650500)

**摘 要** 本文从三种逃逸地球的方法——“单次点火逃逸、两次点火逃逸(Oberth 效应)、三次点火逃逸(Edelbaum 效应)”出发, 研究讨论了三种逃逸方式在喷气变轨时消耗燃料的多少以及飞船运行时间的计算方法, 并根据理论进行了 VPython 数值模拟, 模拟出的飞船三种逃逸方式和理论上的情况一致, 最后又根据理论进行了 GeoGebra 作图定量分析比较了三种逃逸方式在燃料消耗以及运行时间上的大小关系。

**关键词** 飞船变轨; Oberth 效应; Edelbaum 效应; 第二宇宙速度; VPython; GeoGebra; 数值模拟

## THEORETICAL ANALYSIS AND NUMERICAL SIMULATION OF THREE METHODS OF ESCAPE FROM EARTH BY ARTIFICIAL SPACECRAFT

JIN Huiji<sup>1</sup> CHEN Chao<sup>1</sup> YANG Qi<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Kunming No. 8 Middle School, KunMing, Yunnan 650032;

<sup>2</sup> College of Physics and Electronic Information, Yunnan Normal University, KunMing, Yunnan 650500)

**Abstract** In this paper, the calculation methods of the fuel energy consumed by the three escape methods during the orbit change and the flight time of the spacecraft are discussed based on three escape methods: single ignition escape, double ignition escape (Oberth effect) and triple ignition escape (Edelbaum effect). VPython numerical simulation was carried out according to the theory, and the simulated three escape modes of the spacecraft were consistent with the theoretical situation. Finally, GeoGebra mapping was carried out according to the theory to quantitatively analyze and compare the relationship between the three escape modes in energy consumption and running time.

**Key words** orbital transfer; Oberth effect; Edelbaum effect; escape velocity; VPython; GeoGebra; numerical simulation

一般地, 要让人造飞船从圆轨道逃逸地球, 通过一次的点火加速即可。然而, 在 1928 年, Her-

mann Oberth 提出了一种两次点火逃逸的方法, 该方案可以更加节省燃料<sup>[1]</sup>, 后来该方案又得到

收稿日期: 2021-11-26

基金项目: 本文系云南省哲学社会科学规划教育学项目“基于 GeoGebra 的高中物理可视化教学资源开发及教学融合研究”阶段性研究性成果(项目编号: AD20003)。

作者简介: 金惠吉, 男, 研究兴趣为物理教育技术、数值模拟、数学建模等, 曾获 2020 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛国家一等奖。

通讯作者: 陈超, 男, 主要从事中学物理教学与研究, redchiefok@qq.com。

引文格式: 金惠吉, 陈超, 杨祺. 人造飞船逃逸地球三种方法的理论分析与数值模拟[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 43-49.

Cite this article: JIN H J, CHEN C, YANG Q. Theoretical analysis and numerical simulation of three methods of escape from earth by artificial spacecraft[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 43-49. (in Chinese)

了更加详细的分析<sup>[2-3]</sup>,且在1959年又由Theodore Edelbaum进一步提出了一种三次点火逃逸的方案<sup>[4]</sup>。本文将对三种逃逸方案进行理论上的分析,并通过VPython对三种逃逸方案进行数值模拟,根据理论所模拟出的运行情况与理论分析一致,从而验证理论的正确性。接着又通过理论分析结合GeoGebra软件绘图比较在给定到达无穷远的速度大小的情况下三种逃逸策略最终所消耗的燃料情况,最后又比较了三种逃逸策略在到达给定的离地球的距离 $r$ 时三者所用时间的关系,得出了四个关于耗燃料量以及航行时间的结论:(1)当到达无穷远时的速度 $v_w$ 接近于0时,单次逃逸最省燃料,三次点火逃逸次之;(2)当到达无穷远时的速度 $v_w$ 较大时,三次点火逃逸最省燃料,两次点火逃逸次之;(3)当 $v_w$ 较小且飞船到天体中心距离 $r$ 较小时,单次逃逸所需时间最短,两次点火逃逸用时次之,但当 $r$ 较大时,两次点火逃逸用时短;(4)当 $v_w$ 较大且在 $r$ 一定时单次点火逃逸用时短,两次点火逃逸次之。

## 1 理论分析

### 1.1 飞船在椭圆轨道运行公式的导出

因飞船在椭圆轨道上运动过程机械能守恒,以无穷远处为零势能点,有

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (1)$$

设飞船到达无穷远处时速度大小达到最终速度 $v_w$ ,在距离 $r$ 处则为 $v_r$ ,有

$$E = \frac{1}{2}mv_w^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_r = \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_w^2} \quad (2)$$

如图1所示,由角动量守恒,有

$$r_A v_A = r_B v_B \quad (3)$$

联立式(1)和式(3)得

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_A}{r_B}}} \quad (4)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_B}{r_A}}} \quad (5)$$

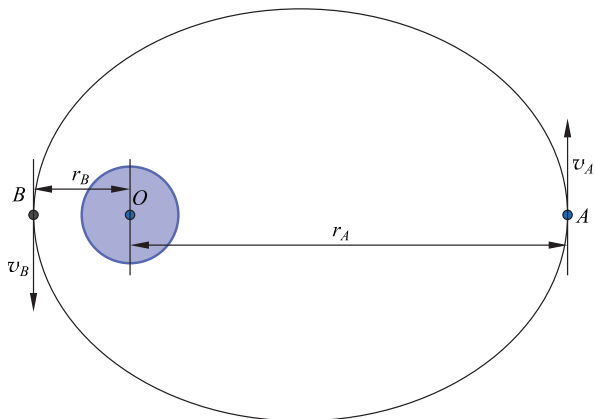


图1 飞船在椭圆轨道上的运动示意图

若要计算从近地点到远地点所用的时间,可根据开普勒第三定律得

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 \left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)^3}{GM}} \quad (6)$$

### 1.2 飞船喷气变轨时消耗燃料与速度变化关系的导出

依据动量守恒,并假设火箭发动机连续地排出燃料,Konstantin Tsiolkovsky提出了火箭方程,把火箭速度变化量与火箭的初始质量和剩余质量联系了起来<sup>[5]</sup>

$$\Delta v = v_{\text{相对}} \ln \frac{m_{\text{前}}}{m_{\text{剩}}} \quad (7)$$

其中, $v_{\text{相对}}$ 为气体相对火箭的速度大小。由该式可以看出, $\Delta v$ 越大,则消耗燃料也越多。

### 1.3 火箭在以双曲轨道逃逸时从椭圆轨道近地点 $r_j$ 到 $r$ 位置处所需时间 $t(r)$ 关系的导出

由能量守恒 $E = \frac{1}{2}mv_w^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{GMm}{r}$ ,又由角动量守恒 $h = rv_\theta$ ,有 $v_r^2 = v_w^2 + \frac{2GM}{r} - \frac{h^2}{r^2}$ 。又因为在椭圆轨道近地点处或圆轨道任一点处有 $v_r = 0$ ,故有 $h^2 = r_j^2 v_w^2 + 2GM r_j$ ,其中, $r_j$ 为椭圆轨道近地点或圆轨道上一点到中心天体球心的距离。再代回上式中有 $v_r = \frac{dr}{dt} =$

$\sqrt{v_w^2 + \frac{2GM}{r} - \frac{r_j^2 v_w^2 + 2GM r_j}{r^2}}$ ,取倒数后两边积分得

$$t(r) = \frac{GM}{v_w^3} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{rv_w^2}{GM}\right)^2 - \left(1 + \frac{r_j v_w^2}{GM}\right)^2} - \operatorname{ch}^{-1} \left( \frac{1 + \frac{rv_w^2}{GM}}{1 + \frac{r_j v_w^2}{GM}} \right) \right] \quad (8)$$

#### 1.4 单次点火逃逸理论分析

如图2所示,单次逃逸即在圆轨道 $a$ 上 $B$ 处,单次点火后直接进入双曲轨道 $b$ 逃逸出地球,由式(2)

有点火加速后达到的速度  $v'_B = \sqrt{\frac{2GM}{r_0} + v_w^2}$ , 又

$v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ , 故有单次点火逃逸的点火前后速度变化量

$$\Delta v_1 = v'_B - v_B = v_B \left( \sqrt{2 + \frac{v_w^2}{v_B^2}} - 1 \right) \quad (9)$$

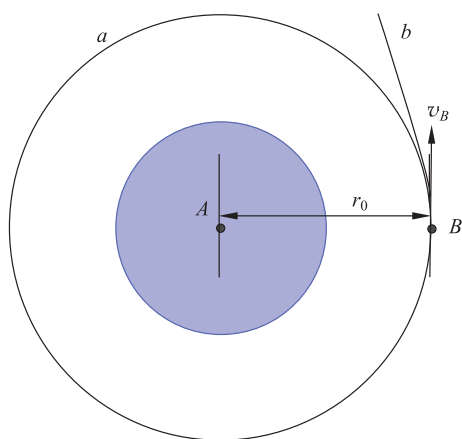


图2 飞船单次点火逃逸示意图

#### 1.5 Oberth 效应——两次点火逃逸理论分析

Oberth 效应是指当航天器的初始速度越大时,增加相同的  $\Delta v$  后航天器的比动能增加得越大。该效应可用于轨道捕获,例如在朱诺探测器进入木星轨道时,就用到了该技术<sup>[6]</sup>。近年来国内外都有学者对此效应进行了分析与讨论<sup>[7,8]</sup>。

如图3所示,Oberth 方法是让飞船在圆轨道 $c$ 上某点 $C$ 时先向运动方向喷气减速使其降至离地球更近的椭圆轨道 $d$ 上,接着在近地点 $D$ 处再进行一次向运动反方向的喷气加速进入双曲轨道 $e$ 从而完成逃逸过程。

在第一次喷气减速点 $C$ 前后,减速前速度

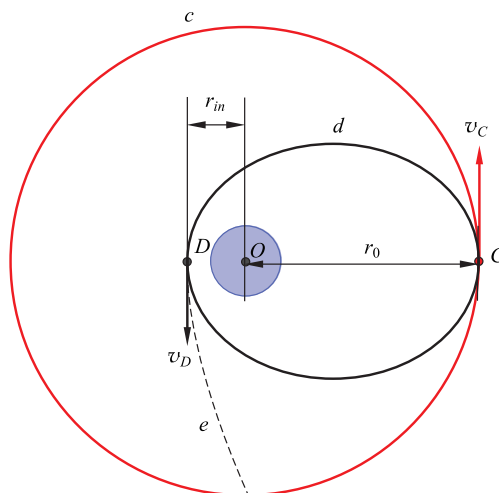


图3 飞船两次点火逃逸示意图

$v_C = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ , 又由式(4)可得减速后速度  $v'_C = \sqrt{\frac{GM}{r_0} \frac{2}{1 + \frac{r_0}{r_{in}}}}$ , 故两次点火逃逸方式的第一次点

火前后速度变化量  $\Delta v_2 = v'_C - v_C = -v_C \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_0}{r_{in}}}}\right)$ 。而在第二次喷气加速点 $D$ 前后,

由式(5)可得加速前速度  $v_D = \sqrt{\frac{GM}{r_{in}} \frac{2}{1 + \frac{r_{in}}{r_0}}}$ , 又

由式(2)可得加速后速度  $v'_D = \sqrt{\frac{2GM}{r_{in}} + v_w^2}$ , 故有两次点火逃逸方式的第二次点火前后速度变化量

$$\Delta v_3 = v'_D - v_D = \sqrt{\frac{GM}{r_{in}} \left( \sqrt{2 + \frac{r_{in} v_w^2}{GM}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{in}}{r_0}}} \right)}.$$

总的速度变化大小为

$$\begin{aligned} \Delta v_4 &= |\Delta v_2| + \Delta v_3 \\ &= v_C \left( 1 + \sqrt{\frac{v_w^2}{v_0^2} + \frac{2r_0}{r_{in}}} - \sqrt{2 + \frac{2r_0}{r_{in}}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

#### 1.6 Edelbaum 效应——三次点火逃逸理论分析

如图4所示,三次点火逃逸的方案为先让飞船喷气加速使其升至离地球更远的椭圆轨道上,接着在远地点再喷气减速降至离地球较近的椭圆轨道上,最后在运动至近地点时进行第三次加速逃逸。

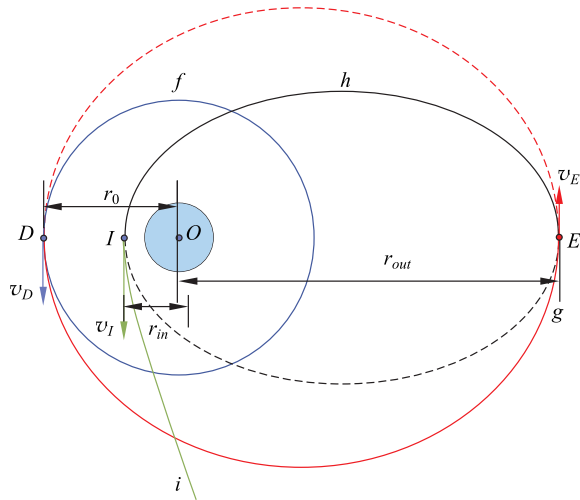


图4 飞船三次点火逃逸示意图

在第一次喷气加速点  $D$  前后,对圆轨道  $f$  上有点火加速前速度  $v_D = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ ,对椭圆轨道  $g$ ,由式(5)可得加速后速度

$$v'_D = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_0}{r_{out}}}} \quad (11)$$

故三次点火逃逸方式的第一次点火前后速度变化

$$\Delta v_5 = v_D \left( \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_0}{r_{out}}}} - 1 \right).$$

在第二次喷气减速

$$\text{点 } E \text{ 前后,由式(4)对椭圆轨道 } g \text{ 可得喷气前 } v_E = \sqrt{\frac{GM}{r_{out}}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{out}}{r_0}}}$$

由式(4)对椭圆轨道  $h$  可得

$$v_E = \sqrt{\frac{GM}{r_{out}}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{out}}{r_{in}}}} \quad (12)$$

故三次点火逃逸方式的第二次点火前后速度变化

$$\Delta v_6 = v'_E - v_E = -\frac{GM}{r_{out}} \left( \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{out}}{r_0}}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{out}}{r_{in}}}} \right).$$

在第三次喷气加速点  $I$  前后,由式(5)对椭圆轨道

$$h \text{ 可得喷气前速度 } v_I = \sqrt{\frac{GM}{r_{in}}} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{in}}{r_{out}}}}, \text{ 又由式}$$

(2)可得喷气后速度

$$v'_I = \sqrt{\frac{GM}{r_{in}}} \cdot \sqrt{2 + \frac{r_{in} v_w^2}{GM}} \quad (13)$$

故有三次点火逃逸方式的第三次点火前后速度变化量

$$\Delta v_7 = v'_I - v_I = \sqrt{\frac{GM}{r_{in}}} \left( \sqrt{2 + \frac{r_{in} v_w^2}{GM}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_{in}}{r_{out}}}} \right)$$

因此三次点火逃逸方式总的速度变化大小为:(由于速度变化的大小对应着燃料消耗的多少,因此减速导致的  $\Delta v_6$  取绝对值)

$$\begin{aligned} \Delta v_8 &= \Delta v_5 + |\Delta v_6| + \Delta v_7 \\ &= v_D \left( \sqrt{\frac{v_w^2}{v_0^2} + \frac{2r_0}{r_{in}}} + \sqrt{2 + \frac{r_0}{r_{out}}} - \sqrt{\frac{2r_0}{r_{in}} + \frac{2r_0}{r_{out}}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

## 2 VPython 数值模拟

为了检验理论的正确性,可以用 VPython 进行数值模拟仿真实现三种逃逸策略。图 5 所示是用 VPython 进行数值模拟仿真出的三条天体运行轨迹。下面着重说明 Edelbaum 效应的仿真模拟方法。

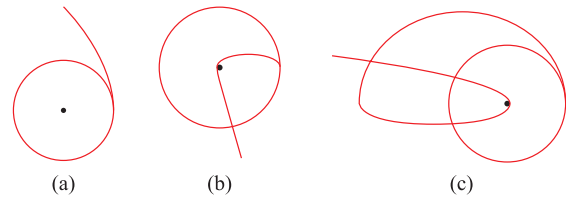


图5 VPython 数值模拟出的三种逃逸策略轨迹

(a) 为单次点火逃逸轨迹;(b) 为两次点火逃逸轨迹;

(c) 为三次点火逃逸轨迹

首先,录入如图 6 所示代码 1~3 行,导入 VPython 库并设置背景。

```
1 from vpython import *
2 scene = canvas(width = 1000,height = 800,
3               center = vector(5,0,0),color = color.white)
4 # 设置背景
```

图6 模拟 Edelbaum 效应代码的 1~4 行截图

接着是模拟 Edelbaum 效应代码的参数设置部分,如图 7 所示,其中第 15 行由式(11)得到,第 16、19 行由式(6)得到,第 17 行由式(12)得到,第 20 行由式(13)得到。为了方便的同时又不影响

```

5  t = 0 # 初始时刻
6  dt = 0.001 # 时间微元
7  r_0 = 10 # 飞船初始所在的圆形轨道半径
8  r_out = 2.5*r_0 # 第一次点火加速后所达的大椭圆轨道的远拱距
9  r_in = 0.05*r_0 # 第二次点火减速后所达的小椭圆轨道的近拱距
10 M = 1 # 中心天体质量
11 m = 1 # 飞船质量
12 G = 1 # 万有引力常量
13 v0 = sqrt(G*M/r_0) # 在飞船初始所在的圆形轨道上运行所需速度大小
14 v_w = 0.3*v0 # 到达无穷远时的速度大小
15 v_p1 = sqrt((G*M)/r_0)*sqrt(2/(1+(r_0/r_out))) # 第一次喷气后的速度
16 T_1 = (1/2)*sqrt(((r_0+r_out)/2)**3*4*pi**2)/(G*M) # 转过半个椭圆轨道所用时间
17 v2 = sqrt((G*M)/r_out)*sqrt(2/(1+(r_out/r_in))) # 第二次喷气后的速度
18 T_0 = sqrt((4*pi**2*r_0**3)/(G*M)) # 在飞船初始所在的圆形轨道上运行周期
19 T_2 = (1/2)*sqrt(((r_out+r_in)/2)**3*4*pi**2)/(G*M) # 再转过第二个椭圆轨道一半所用时间
20 v3 = sqrt(G*M/r_in)*sqrt(2+(r_in*v_w**2)/G*M) # 第三次喷气后的速度

```

图7 模拟 Edelbaum 效应代码的 5~20 行截图

检验理论的正确性,此处非关键参数如万有引力常量和天体质量等都设为 1。

然后如图 8 所示 21~24 行代码绘制了中心天体、飞船以及初始状态下的飞船速度矢量和飞船加速度矢量。

最后,如图 9 所示 25~43 行代码通过 while 语句让其在运动过程中采用欧拉法进行对速度矢量和位置矢量的实时更新。运动中结合前面计算过的时间,通过三个 if 指令让飞船在到达相应的位置处进行点火变速,运行后最终可以观察到图 5

最右边的轨迹。该模拟结果的运动情况和前面理论分析一致,由此可验证理论的正确性。

### 3 GeoGebra 作图分析三种逃逸方式在燃料消耗上的大小关系

接下来,再通过 GeoGebra 作图比较三种逃逸方式在效率上的差别。由式(7)可知, $\Delta v$  越大,则消耗燃料也越多。因此比较三种逃逸方式  $\Delta v$  的大小即可比较三种逃逸方式在燃料消耗上的区

```

21 celestial1 = sphere(pos = vector(0,0,0), radius = 0.5, texture = textures.earth) # 中心天体
22 celestial2 = sphere(pos = vector(r_0,0,0), radius = 0.5, color = color.red, make_trail = 1) # 飞船
23 celestial2_v = arrow(pos = celestial2.pos, axis = vector(0,v0,0)) # 飞船速度矢量
24 celestial2_a = arrow(pos = celestial2.pos, axis = vector(-G*M/(r_0*r_0),0,0)) # 飞船加速度矢量

```

图8 模拟 Edelbaum 效应代码的 21~24 行截图

```

25 while True:
26     rate(1/dt * 10)
27     t += dt
28     if T_0-dt <= t <= T_0:
29         celestial2_v.axis.y = v_p1
30     if T_0+T_1-dt <= t <= T_0+T_1:
31         celestial2_v.axis.y = -v2
32     if T_0+T_1+T_2-dt <= t <= T_0+T_1+T_2:
33         celestial2_v.axis.y = v3
34     celestial2_a.pos.x = celestial2.pos.x
35     celestial2_a.pos.y = celestial2.pos.y
36     celestial2_a.axis.x = -((G*M*celestial2.pos.x)/((celestial2.pos.x**2+celestial2.pos.y**2)**(3/2)))
37     celestial2_a.axis.y = -(G*M*celestial2.pos.y)/((celestial2.pos.x**2+celestial2.pos.y**2)**(3/2)))
38     celestial2_v.pos.x = celestial2.pos.x
39     celestial2_v.pos.y = celestial2.pos.y
40     celestial2_v.axis.x += (celestial2_a.axis.x)*dt
41     celestial2_v.axis.y += (celestial2_a.axis.y)*dt
42     celestial2.pos.x += (celestial2_v.axis.x)*dt
43     celestial2.pos.y += (celestial2_v.axis.y)*dt

```

图9 模拟 Edelbaum 效应代码的 25~43 行截图

别。设  $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ , 则式(9)、式(10)、式(14)都可以表达成  $\frac{\Delta v}{v_0}$  与  $\frac{v_w^2}{v_0^2}$  的函数。通过 GeoGebra 作图得到如图 10 所示的图像。其中  $f$ 、 $g$ 、 $m$  分别是单次点火逃逸、两次点火逃逸、三次点火逃逸的  $\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{v_w}{v_0}$  图像。由图像可以看出, 当到达无穷远时的速度  $v_w$  接近于 0 时, 单次点火逃逸最省燃料, 三次点火逃逸次之。而当到达无穷远时的速度  $v_w$  较大时, 三次点火逃逸最省燃料, 而两次点火逃逸次之。

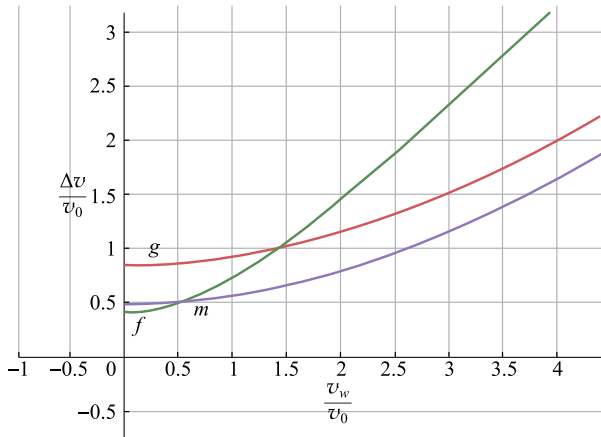


图 10 三种点火逃逸方式的  $\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{v_w}{v_0}$  图像(其中  $f$ 、 $g$ 、 $m$  分别是单次点火逃逸、两次点火逃逸、三次点火逃逸的  $\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{v_w}{v_0}$  图像)

#### 4 GeoGebra 作图分析三种逃逸方式在所用时间上的大小关系

由于三种逃逸方式仅涉及双曲轨迹上的时间计算以及椭圆半周期的时间计算, 因此可由式(6)、式(8)得到三种逃逸方式从  $r_0$  开始运行到  $r$  位置处所需的时间 ( $r > r_0$ )。设  $T_0$  为在半径为  $r_0$  的圆形轨道上运行的周期。

对单次点火逃逸, 由式(8)可得

$$t_1 = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{v_0^3}{v_w^3} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{v_w^2}{v_0^2}\right)^2} - \operatorname{ch}^{-1} \left[ \frac{1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}}{1 + \frac{v_w^2}{v_0^2}} \right] \right] \quad (15)$$

对两次点火逃逸, 由式(6)、式(8)可得

$$t_2 = \frac{T_0}{2} \sqrt{\left(\frac{r_0 + r_{in}}{2r_0}\right)^3} + \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{v_0^3}{v_w^3} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{r_{in} v_w^2}{r_0 v_0^2}\right)^2} - \operatorname{ch}^{-1} \left[ \frac{1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}}{1 + \frac{r_{in} v_w^2}{r_0 v_0^2}} \right] \right] \quad (16)$$

对三次点火逃逸, 由式(6)、式(8)可得

$$t_3 = \frac{T_0}{2} \sqrt{\left(\frac{r_0 + r_{out}}{2r_0}\right)^3} + \frac{T_0}{2} \sqrt{\left(\frac{r_{out} + r_{in}}{2r_0}\right)^3} + \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{v_0^3}{v_w^3} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{r_{in} v_w^2}{r_0 v_0^2}\right)^2} - \operatorname{ch}^{-1} \left[ \frac{1 + \frac{rv_w^2}{r_0 v_0^2}}{1 + \frac{r_{in} v_w^2}{r_0 v_0^2}} \right] \right] \quad (17)$$

观察式(15)、式(16)、式(17)可见三式都可以表达成  $\frac{t}{T_0}$  与  $\frac{r}{r_0}$  的函数。设  $r_{in} = 0.05r_0$ ,  $r_{out} = 2.5r_0$ ,

$$r_0 = 7.5, G = 1, M = 1, T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM}} = 129.05,$$

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0} = 0.37, v_w = 0.3v_0 \text{ 通过 GeoGebra 作图}$$

得到如图 11 所示的图像。其中  $n$ 、 $o$ 、 $p$  分别是单次

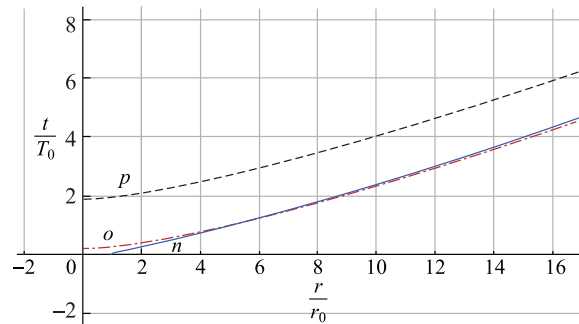


图 11  $v_w$  较小时 ( $v_w = 0.3v_0$ ), 三种点火逃逸方式  $\frac{t}{T_0} - \frac{r}{r_0}$  的图像(其中  $n$ 、 $o$ 、 $p$  分别是单次点火逃逸、两次点火逃逸、三次点火逃逸的  $\frac{t}{T_0} - \frac{r}{r_0}$  图像)

点火逃逸、两次点火逃逸、三次点火逃逸的  $\frac{t}{T_0} - \frac{r}{r_0}$

图像。

由图像可以看出,当  $v_w$  较小且  $r$  较小时,单次逃逸所需时间最短,其次是两次点火逃逸用时短,但当  $r$  较大时,两次点火逃逸用时短。

再令  $v_w = 5v_0$ , 得到当  $v_w$  较大时的图像如图 12 所示。由图像可以看出,此时在  $r$  一定时,单次点火逃逸用时短,两次点火逃逸次之,三次点火逃逸用时最长。

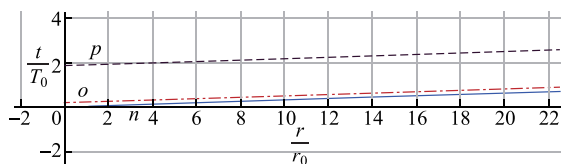


图 12  $v_w$  较大时( $v_w = 5v_0$ ), 三种点火逃逸方式  $\frac{t}{T_0} - \frac{r}{r_0}$  的图像(其中 n、o、p 分别是单次点火逃逸、两次点火逃逸、三次点火逃逸的  $\frac{t}{T_0} - \frac{r}{r_0}$  图像)

## 5 结语

通过本文上述的讨论可以发现三种点火逃逸方式在各种情况下各有优劣,若当到达无穷远时的速度  $v_w$  接近于 0 时,单次点火逃逸最省燃料,而当到达无穷远时的速度  $v_w$  较大时,三次点火逃逸最省燃料。当  $v_w$  较小且  $r$  较小时,单次逃逸所需时间最短,而在  $r$  较大时,两次点火逃逸用时短。当  $v_w$  较大时,单次点火逃逸用时短,三次点火逃逸用时最长。因此人造飞船逃逸地球时,可针对需求来选择逃逸方式以达到最优解。

## 参 考 文 献

- [1] OBERTH H. Ways to spaceflight[M]. National Aeronautics and Space Administration, 1972.
- [2] BLANCO P R, MUNGAN C E. High-speed escape from a circular orbit [J]. American Journal of Physics, 2021, 89(1): 72-79.
- [3] ADAMS R, RICHARDSON G. Using the Two-Burn Escape Maneuver for Fast Transfers in the Solar System and Beyond[C]//Aiaa/asme/sae/asee Joint Propulsion Conference & Exhibit. 2013.
- [4] EDELBAUM T. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver[J]. American Rocket Society J. 29, 864-865.
- [5] PHILIP R. BLANCO, Carl E. Mungan. High-speed escape from a circular orbit[J]. American Journal of Physics, 89, 72.
- [6] CROCKETT C. Juno Now in Orbit around Jupiter[J]. Science news, 2016, 190(2): 14-14.
- [7] BLANCO P, MUNGAN C. Rocket propulsion, classical relativity, and the Oberth effect[J]. The Physics Teacher, 57, 439-441.
- [8] 李永乐. 飞船喷气变轨时需要消耗多少能量[J]. 物理通报, 2017(8): 43-45.  
LI Y L. How much energy is consumed during airship varies its orbit by jetting gas[J]. Physics Bulletin, 2017(8): 43-45. (in Chinese)
- [9] 高翔. 圆锥曲线轨道上行星运动时间计算[J]. 大学物理, 2009, 28(2): 47-48, 56.  
GAO X. Calculation of time of a planet in conic curved orbits[J]. College Physics, 2009, 28(2): 47-48, 56. (in Chinese)
- [10] 周国全. 平方反比有心力作用下的二体系统的一套初等教案[J]. 物理与工程, 2018, 28(5): 39-43+49.  
ZHOU G Q. A set of preliminary teaching plan for two-body systems under inverse square central force[J]. Physics and Engineering, 2018, 28(5): 39-43+49. (in Chinese)