

## 等效库仑荷分布计算方法及其应用

杨文娜 熊兆华

(北京工业大学理学部, 北京 100124)

**摘要** 满足平方反比率的库仑相互作用在场论中具有独特的意义, 高斯定理描述了三维空间矢量场源的属性。本文把其他类型势函数, 如汤川势、谐振子势等转换为等效库仑荷分布, 由此利用三维有源场满足的高斯定理来计算空间中的场强以及其他相关物理量。本文也专门设计了一个均匀分布汤川荷的硬球散射例题来展示这种方法的优越性。虽然这种方法在具体计算工作量上没有显著改进, 但是得到的等效库仑荷分布在处理有体积粒子的时候会有更加清晰的物理图像。转换方法以及具体例题对拓展场论等相关课程教学有一定借鉴意义。

**关键词** 库仑势; 汤川势; 高斯定理

## EQUIVALENT COULOMB CHARGE DISTRIBUTION AND ITS APPLICATION

YANG Wenna XIONG Zhaohua

(Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

**Abstract** The Coulomb interaction satisfying the inverse square law has unique significance in the field theory, the Gauss's theorem and describes the source property of the three-dimensional vector field. In this paper, other types of potentials such as Yukawa potential and harmonic oscillator potential are transformed into equivalent Coulomb charge distribution in the space. Therefore, the Gauss's theorem can be applied to calculate the field strength and other related physical quantities. An example of hard sphere scattering with uniform distribution of Yukawa charges is designed to show the advantages of this method. Although no significant improvement on the calculation workload, the equivalent Coulomb charge distribution has a clearer physical picture when dealing with the sizable particles. The conversion method and the specific examples can be used for reference to expand the teaching of field theory and related courses.

**Key words** Coulomb potential; Yukawa potential; Gauss theorem

场论是物理学中表述物理现象和规律的重要理论。对于三维空间矢量场来说, 场论主要研究

其有源无源, 有旋无旋的性质, 即场的散度和旋度。描述电磁场理论的麦克斯韦方程组即可看作

收稿日期: 2022-04-01

作者简介: 熊兆华, 男, 副教授, 主要从事理论物理的研究和教学工作, 主要研究方向为高能物理, 超出标准模型新物理, xiongzhaohua@bjut.edu.cn.

引文格式: 杨文娜, 熊兆华. 等效库仑荷分布计算方法及其应用[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 15-21.

Cite this article: YANG W N, XIONG Z H. Equivalent Coulomb charge distribution and its application[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 15-21. (in Chinese)

是关于电磁场的散度,旋度组成的方程组。相比于力学的瞬时性与超距作用,场论则体现了物理过程的局域性。除了物理概念上的革新外,相比于力学,场论方法在研究某些过程时有明显的优越性。在电磁学的教学中,利用描述场散度的高斯定理,以及描述场旋度的斯托克斯定理,然后依据系统的对称性可以求解场的强度、势等重要物理量。这是一种非常重要的物理方法,因为实际物理场景的很多情况都可以看作是高度对称性系统,如球对称,柱对称,平面对称系统等。比如一个不规则形状的带电导体,如果距离这个导体足够远,就可以近似将其产生的电场看做是均匀带电球产生的电场;而靠近导体表面的电场,又可以近似看做是无限大均匀带电平面附近的电场。如果类似于力学的方法,采用库仑定律处理静电场会显得很麻烦。在物理学史中,一个著名的例子就是在《自然哲学之数学原理》<sup>[1]</sup>一书中,牛顿花费了很大的力气才证明均匀球壳对球壳内质点的引力为零,对壳外质点的引力可以看作是把球壳的质量都集中在球心位置处所产生的引力。如果采用场论的方法。依据球对称性和高斯定理,可以非常快捷地得到相同结论。

作为描述有源场的高斯定理对我们理解场论有着重要的意义。场的有源或者无源性质实际上是利用满足真空平方反比率的库仑电荷来讨论的。静电平衡的导体电学特征就是建立在有源场高斯定理的基础之上,点源的球对称性加上高斯定理就可以得到库仑平方反比率。通过测量静电平衡导体内部电荷是否为零就可以检验平方反比率,进而检验高斯定理。这样的检验远远比最初的库仑扭秤实验要精确。历史上,卡文迪许在库仑之前就利用测量静电平衡导体内部电荷是否为零确定静电力偏离平方反比率的指数偏差 $\delta$ 的上限在 $2 \times 10^{-2}$ 左右<sup>[2]</sup>。后来麦克斯韦重新做了卡文迪许的实验,进一步提高了精度,把偏差 $\delta$ 上限降低到 $5 \times 10^{-5}$ 的数量级。后面不断有物理学家重复测量静电平衡导体内部电荷来探究静电场的平方反比率的适用性。1971年威廉姆斯(Williams)将偏差 $\delta$ 上限缩小到 $(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ 的数量级。可以说静电场的平方反比率得到了严苛的检验。相应的库仑势,也就是与半径成反比的势函数,是描述静电场的准确函数。从理论的角度看,高斯定理、场强的平方反比率以及库仑势是三维空间有源场的基本性质,如果空间是二维

或者四维的,则点源的平方反比率以及库仑势都将发生改变。因此高斯定理以及库仑势在三维空间场论中有其独特意义。

抛开电磁理论,实际物理研究中,特别是在量子物理研究中,除库仑势之外还存在汤川势,谐振子势等其他类型势函数。研究这些非库仑势的性质时,如果直接利用势函数求解相关问题,某些情况会特别麻烦。这是因为非库仑势相关的场论不再满足高斯定理,点源与空间的场之间的关系就复杂很多。为了解决这个问题,本文讨论一种把其他类型荷分布及势函数转换为库仑荷分布及库仑势的方法:即依据场论知识,我们可以对非库仑势求梯度得到场分布。再对场求散度得到荷分布。用这种方法求得的荷分布是一种等效的库仑荷分布,利用等效库仑荷分布以及高斯定理求解问题会使相关问题得到意想不到的化简。我们将在论文第二部分以汤川势为例来说明如何使用该方法,在第三部分给出使用该方法解决问题的一个具体例子—均匀带汤川荷球的散射问题,最后给出本文的结论。

## 1 等效库仑荷分布方法及推广

质子带正电,相互之间存在排斥力。因此质子与中子之间必须有一个强大的吸引力才能使质子和中子形成稳定的原子核结构。日本科学家汤川秀树提出汤川势,等效力程的概念,解决了这个问题。汤川秀树指出质子与质子之间,质子与中子之间通过交换一种质量为 $m_\pi$ 的介子相互作用<sup>[3]</sup>。分析可知其势函数为

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{\alpha e^{-m_\pi r}}{r} \quad (1)$$

其中, $\alpha = \frac{Q^2}{4\pi}$ 。注意这里采用的是自然单位制,质量的倒数看做是长度量纲。 $Q$ 为两个粒子所带的相互作用荷,该荷可以定义成为汤川荷。由于 $Q$ 很大,势函数在 $r$ 较小时值很大。但是由于分子上是 $e$ 指数形式,随半径 $r$ 很快下降,所以在大于 $m_\pi$ 倒数之后,势函数很快降为零了。这样的势非常恰当地描述了核内强大的吸引力,但是力程非常短的现象。汤川秀树因此预言了参与强相互作用的 $\pi$ 介子,物理学家很快就发现了这种类型的粒子,这是物理学史上的一个重要突破。其

实库仑势可以看做是一种特殊形式汤川势。电磁相互作用是通过交换光子产生的,把光子看做有质量粒子,电荷之间的相互作用也会是公式(1)形式。当光子质量(公式(1)中  $m_\pi$ )趋于 0 时就得到了库仑势函数  $V_{\text{int}} = -Q^2/4\pi r$ 。此时的  $Q$  可以称为库仑荷。

简单分析就可以发现,如果物体之间的相互作用势是汤川相互作用势,那高斯定理就不再成立了,任意封闭面的场强积分不再等于封闭面内的汤川荷除以某个常数。这时一个均匀带汤川荷的球壳内场强不等于零,球外场强不能看做是把汤川荷集中于球心位置处所产生的场强。此时场强以及整个空间势函数的计算就是一个比较棘手的问题,原则上讲需要对场源剖分,然后进行比较复杂的积分才能得到相关的物理量。正如引言所述,高斯定理、平方反比率以及库仑势在三维空间场论有其特殊意义。对于一个汤川势相互作用的物体,其实可以把汤川荷看做是空间库仑荷分布造成的效果。只要我们把空间中每个体元的汤川荷转换为空间等效的库仑荷,然后对所有体元贡献进行积分,就得到了等效库仑荷在空间分布。这是一个非常有意思的方法,

下面我们首先看一个点源汤川荷  $Q_Y$ (下标  $Y$  标记)怎么得到库仑荷  $Q_C$ (下标  $C$  标记)。设坐标原点处点源汤川荷  $Q_Y$  在空间产生的势为

$$V(r) = \frac{Q_Y}{4\pi} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \quad (2)$$

$\lambda$  是我们重新定义的量程。依据场论知识,势函数的负梯度是场强。由于不是库仑势,在  $r \neq 0$  处势函数负梯度的散度并不为零。而这个散度就可以定义为等效库仑荷分布

$$\begin{aligned} \rho_C(r) &= \nabla \cdot [-\nabla V(r)] \\ &= \nabla \cdot \left[ -\nabla \left( \frac{Q_Y}{4\pi} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) \right] = \frac{Q_Y}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

也就是说,一个点源的汤川势可以等效地看做是在点源以外空间分布着如上式所示的库仑荷和点源的共同作用产生的效果。当然此时原点点源的汤川荷也转换为等量的库仑荷。也就是说原点点源汤川荷产生的场等于如下分布的库仑荷产生的场

$$\rho_C(r) = Q_Y \delta(r) - \frac{Q_Y}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \quad (4)$$

注意推导公式(3)在  $r \neq 0$  区域成立,原点的点源贡献必须用  $\delta$  函数来表示。

下面可以通过计算场强来证明等效库仑荷分布的等效性。对汤川势(2)求负梯度可以得到场强

$$E = -\nabla \left( \frac{Q_Y}{4\pi} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) = -\frac{Q_Y}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (5)$$

现在假定空间分布着如公式(4)分布的库仑荷密度  $\rho(r)$ ,那怎么计算空间中的场分布呢?如引言所述,系统具有球对称性,因此可以选定一个半径为  $r$  的高斯面,利用高斯定理就可以得到场强分布。球面的通量等于

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E &= \int_0^r \rho(r') d^3 r' \\ &= \int_0^r \left[ Q_Y \delta(r) - \frac{Q_Y}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right] d^3 r' \\ &= Q_Y \left( \frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} + e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

因此

$$E = \frac{Q_Y}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (7)$$

可见把等效库仑荷应用到高斯定理计算中得到的场强式(5)和用汤川势直接求负梯度得到的场强式(7)是相同的。由于场强是场的基本物理量,因此由场强决定的势等其他的量当然也相同了。读者也可以验证以无穷远处为势函数零点,利用上式场强计算即可得到汤川势函数式(2)。

有了点源转换为库仑荷分布的计算方法,我们很容易得到空间任意分布的汤川荷  $\rho_Y(r)$  在  $r$  处形成的等效库仑荷分布  $\rho_C(r)$ ,即

$$\rho_C(r) = \rho_Y \delta(r) - \int \rho_Y(r') \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\lambda}}}{4\pi\lambda^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (8)$$

利用式(8),原则上我们就可以算出汤川荷产生的等效库仑荷分布,即计算出了汤川势函数的“源”。如果把  $Q_Y$  作为场源,产生汤川势的场其实不满足高斯定理。而现在有了等效库仑荷分布,我们就可以利用库仑定律求场强,进而求势函数等等。这个方法其实还可以处理原子核物理中的汤川势问题,我们都知道在近核区域原子会产生库仑势,但是文献[4]中指出在离核较远的区域

电子就会产生一个屏蔽效应,在这个区域会产生汤川势。因此,上述方法也为求解原子核和核外电子有效汤川势的相关问题提供一个新思路。应该指出高斯定理对于库仑荷也是成立的。如果系统具有高度的对称性,则利用高斯定理就可以方便的求得此时的场强和势函数。我们将在下节举例子进行说明。

现在我们对等效库仑荷分布的转换方法进行小结:第一步:势函数求负梯度得到场强;第二步:对场强求散度得到补充的库仑电荷密度函数;第三步:原来的密度加上补充的密度即可得到整个空间的荷密度分布。从计算过程看这是一个非常简单的方法,实际上就是求一些特殊势函数的源而已。但是相比于原始势函数的源,等效库仑荷分布可以让我们比较直观的理解场强、势函数的分布情况。这是因为通常我们对宏观静电场理论的理解更为深刻。

其实引言讨论的平方反比率的验证也可以给我们一些启示:如果电荷之间不是平方反比相互作用,那空间中就会存在等效的库仑荷分布,那静电平衡时导体内部库仑荷分布(注意不是电荷)就不为零了。以上等效库仑荷分布计算过程虽然简单,但是很少有人专门讨论。这是因为经典物理处理的多是宏观经典物体,物质之间相互作用主要是电磁相互作用和引力相互作用,自然满足平方反比率。而微观物理系统主要是量子力学体系,这些经典的荷分布似乎没有多大用处。其实也不尽然,下一节我们将举一个以上方法在量子力学中应用的具体例子,即均匀带汤川荷球的散射问题。这里首先列出常用的三维线性势,三维谐振子势和 Hulthén 势在空间的等效库仑荷分布的具体结果:

- 三维线性势  $V(r)=kr$  在空间的等效库仑荷的密度分布为

$$\rho(r) = -\frac{2}{r} \quad (9)$$

也就是说,在空间中和半径成反比的等效库仑荷分布产生了线性势。此时空间中生成恒定场强大小的球对称场分布。

- 三维谐振子势  $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$  在空间的等效库仑荷的密度分布为

$$\rho(r) = -3\mu\omega^2 \quad (10)$$

三维谐振子在振动过程中受到  $F = -kr$  的线性力,受到线性力的系统在空间所产生的等效库仑荷分布是一个常量。一个著名的例子就是把地球看做是质量均匀分布的球,那在地球表面任意两点之间挖一个直线通道,理想情况下受引力作用的物体在这个通道内做简谐振动。此时从地球一端到另外一端大概 40 多分钟。

- Hulthén 势  $V(r) = m \frac{e^{-mr}}{1-e^{-mr}}$  在空间的等效库仑荷的密度分布为

$$\rho(r) = \delta(r) + m^2 \left[ \frac{(2-mr)e^{-mr} - (2+mr)e^{-2mr}}{r(1-e^{-mr})^3} \right] \quad (11)$$

在这里  $m$  是势函数力程参数。Hulthén 势比较复杂,在经典物理中很少出现,其在  $r$  较小时以  $e$  指数递减。因此很多情况下,可以用 Hulthén 势模拟汤川势来给出相关物理过程的近似解析解。

以上三种相互作用都是单位荷分布产生的等效库仑荷分布情况。注意前两个势的等效荷在原点处的源为零。如果源分布不在原点,可以用类似于公式(8)的形式得到整个空间等效库仑荷分布。

## 2 均匀带汤川荷球的散射

由于宏观经典物理处理的多是电磁和引力相互作用,这种势函数转换成等效库仑荷分布的方法其实并没有多少应用场景。但是物理学前沿研究中,在某些领域非电磁和引力相互作用势函数,用这种等效库仑荷分布计算方法会使一些问题简化很多,物理图像也会显得更为清晰。正是因为笔者从事的暗物质唯象研究中应用了这种方法,为此特地对具体的研究问题进行简化,设计了一个例子进行说明。希望该论文能够对基础课程教学有一定参考。前沿研究中暗物质弹性散射问题是一个非常重要的研究课题,这是因为暗物质在宇宙演化过程中扮演重要角色,暗物质粒子的弹性散射截面决定了宇宙中各种尺度天体,比如微波背景辐射、星系团、星系以及矮星系的结构<sup>[4]</sup>。最近的暗物质研究表明,暗物质粒子在低速下的弹性散射截面并不是物理学家最初设想的弱相互

作用量级的散射截面。特别是在小宇宙学尺度,如星系团、星系或者矮星系尺度,观测表明暗物质弹性截面与暗物质粒子速度依赖关系比较奇怪,截面应该随着粒子速度增加而降低。这是通常暗物质模型所谓的弱相互作用大质量粒子所不能解释的。为了解决这个问题,有学者提出了自相互作用暗物质粒子模型,还有学者提出了有体积暗物质的散射<sup>[5]</sup>等来给出合适的暗物质弹性散射截面。这里的有体积暗物质模型是一种非常好的想法,由于物理学家通常认为暗物质之间存在有限程相互作用,这种相互作用一般用汤川势来表达,并不是通常的电磁或者引力相互作用。注意在粒子物理研究中,基本粒子通常被看做是点粒子。有体积粒子的研究是一个比较困难的课题,此时需要额外相互作用把粒子束缚在一个有限的空间内。比如质子,就是强相互作用把夸克禁闭在一个小的体积。这种夸克禁闭现象是物理学中著名的非微扰计算难题。对于有体积暗物质汤川相互作用散射截面的计算就可以利用到上一节所讨论的库仑荷分布方法进行,能够得到暗物质散射的初步结果。下面我们就来说明该例题及其解法。

为了简化问题,我们假定如图1所示一个均匀球状汤川荷分布的暗物质粒子,半径为 $R$ 。假定其总汤川荷为 $Q$ ,则汤川荷密度为 $\rho_0 = 3Q/4\pi R^3$ 。要求的问题是:(1)求此时球内外的势函数;(2)另外一个单位汤川荷点粒子与该球发生弹性散射截面为多少?初看这道题,最直接的求解办法就是把均匀带汤川荷球按照以球心为中心的球壳剖分,分别对球内球外一点进行积分即可。但是,正如上文所述,此时每个剖分体元与场点之间是汤川相互作用,并不满足高斯定理,所以通常依据对称性再利用高斯定理求解势函数和场强的办法不再适用。而上一节所讲的等效库仑荷分布的方法就可以很好地处理这个问题。下面来看具体过程。以图1所示 $r$ 方向为 $Z$ 轴,做球坐标系,选择一

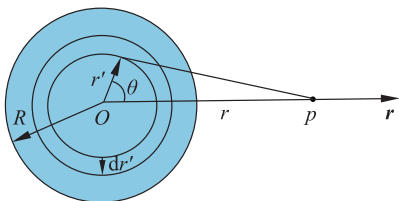


图1 半径为 $R$ ,带电量为 $Q$ 的硬球示意图

个半径为 $r'$ ,厚度为 $dr'$ 的球壳。我们可以利用式(8)得到在离球心 $r$ 处的等效库仑荷密度。由于在角度 $\theta$ 对应的圆环上每点与场点 $r$ 距离相等,利用三角关系求出距离,然后就角度 $\phi$ 积分即可得到该圆环对 $r$ 处贡献的库仑荷微元

$$\begin{aligned} d\rho(r) &= -\frac{1}{\lambda^2} \int \frac{e^{-\frac{r}{\lambda} \sqrt{(r-r'\cos\theta)^2 + r'^2 \sin^2\theta}}}{4\pi \sqrt{(r-r'\cos\theta)^2 + r'^2 \sin^2\theta}} \rho_0 r'^2 d\theta \sin\theta d\phi dr' \\ &= -\frac{1}{\lambda} \frac{(e^{-\frac{r-r'}{\lambda}} - e^{-\frac{r+r'}{\lambda}}) \rho_0 r' dr'}{2r} \end{aligned} \quad (12)$$

再对上式 $r'$ 从0积分到 $R$ 就可以得到球外一点( $r > R$ )的库仑荷密度为

$$\rho(r) = -\rho_0 \lambda \frac{e^{-\frac{R}{\lambda}}}{2r} \left[ \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} + \left( \frac{R}{\lambda} - 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \right], \quad \text{当 } r > R \quad (13)$$

可见,如果从场源的角度看,汤川荷在分布区域以外的位置仍然有源。 $r \leq R$ 区域的荷密度的计算与上式类似,注意还要加上原来汤川荷的密度,最终的结果为

$$\rho(r) = -\frac{\rho_0 \lambda}{2r} \left[ (e^{-\frac{r}{\lambda}} - e^{-\frac{r}{\lambda}}) \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \right], \quad \text{当 } r > R \quad (14)$$

从上式也可以看出,此时球内等效库仑荷分布不再均匀。

有了上面等效库仑荷分布,下面计算场强和势函数就可以使用高斯定理了。也就是说,对于球对称系统,求某点势函数分为原点到场点和场点到无穷远处两部分计算。原点到场点的势可以把其中所有库仑荷集中于坐标原点处计算原点对场点产生的势函数。而场点到无穷远处可以看做是一层一层的均匀带库仑荷球壳在其内部产生的库仑势求和。因此球外一点 $r$ 处的势函数为

$$V(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_0^r \rho(r') d^3 r' + \int_r^\infty \frac{\rho(r')}{4\pi r'} d^3 r' \quad (15)$$

式(15)第一部分就是计算原点到场点的总库仑荷集中于原点在 $r$ 处贡献的势函数,后面计算大于 $r$ 的微元球壳对球内贡献的势函数。读者应该注意,均匀带汤川荷的球壳在球内不是等势体,这正是转化为库仑荷再利用高斯定理方便的地方。诚然,这个问题计算的难度实际上在等效库仑荷分布公式(13)和公式(14)上,公式(12)中已经计算了汤川势函数的贡献。但是从场论的角度看,转

换为等效库仑荷分布有着更为清晰的物理意义。在实际教学中,也可以作为一种电磁学的扩展教授学生,相信会有很好的教学效果。在当前的情况下,整个空间势函数分布仍然分为球内球外两部分,具体结果为

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 e^{-\frac{r}{\lambda}}}{2r} \left[ \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} + \left( \frac{R}{\lambda} - 1 \right) e^{\frac{R}{\lambda}} \right] & \text{当 } r > R \\ -\frac{\rho_0 \lambda^3}{2r} \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \left[ -e^{-\frac{r}{\lambda}} + e^{\frac{r}{\lambda}} \right] + \rho_0 \lambda^2 & \text{当 } r \leq R \end{cases} \quad (16)$$

读者可以验证,该方法计算的势函数与直接利用汤川势计算结果完全相同。从上式可以看出,在球外,势函数仍然随  $e$  指数下降,当  $R$  趋于零时,势函数恢复到点粒子汤川势形式。具体验证过程需要对公式方括号中的  $R$  做泰勒展开,比较复杂,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^R r' \left[ -\frac{\rho_0 \lambda^3}{2r'} \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \left( -e^{-\frac{r'}{\lambda}} + e^{\frac{r'}{\lambda}} \right) + \lambda^2 \rho_0 \right] \sin(qr') dr' - \\ &\quad \frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_R^\infty r' \left[ -\frac{\rho_0 \lambda^3}{2r'} e^{-\frac{r'}{\lambda}} \left( \frac{R}{\lambda} + 1 \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} + \left( \frac{R}{\lambda} - 1 \right) e^{\frac{R}{\lambda}} \right] \sin(qr') dr' \\ &= \frac{3\mu}{2\pi \hbar^2 q^3 R^3} \frac{1}{\left( \frac{1}{\lambda^2} + q^2 \right)} [-\sin(qR) + qR \cos(qR)] \end{aligned} \quad (19)$$

为了计算方便我们在这里把硬球的汤川荷量取作 1, 以上振幅比较复杂, 熟悉场论的读者可以看出

$$\frac{3}{q^3 R^3} [-\sin(qR) + qR \cos(qR)] \quad (20)$$

实际上就是硬球模型相关荷在动量空间的分布。

除去这个分布剩余项其实就是由一个质量为  $\frac{1}{\lambda}$  的中介传递相互作用粒子形成的点粒子散射振幅。因此很容易验证当  $R \rightarrow 0$  时, 微分散射截面回到点粒子散射情况

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta} &\approx \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{1}{\left( \frac{1}{\lambda^2} + q^2 \right)} \frac{9}{q^6 R^6} \cdot \\ &\quad \left[ qR - \frac{q^3 R^3}{3!} - qR \left( 1 - \frac{q^2 R^2}{2!} \right) \right]^2 \\ &= \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{1}{\left( \frac{1}{\lambda^2} + q^2 \right)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

以上我们求解了均匀带川荷硬球散射的微分

这里就不展示了。需要再次说明的是在宏观经典物理中, 很少有这种势函数。

现在我们的任务是处理微观点粒子的散射截面问题, 即以动量  $k$  入射的点粒子被硬球所产生的势函数式(16)的散射。这是一个量子力学散射问题, 它可以采用波恩近似来求解散射振幅  $f(\theta)$ , 具体计算过程可以参阅教材<sup>[6]</sup>, 最终散射振幅形式为

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r' V(r') \sin qr' dr' \quad (17)$$

其中,  $\mu$  是系统约化质量,  $\hbar$  是普朗克常数,  $q$  是点粒子转移动量,  $q = 2k \sin\theta$ 。散射截面<sup>[6]</sup>

$$\frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta} = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty r' V(r') \sin qr' dr' \right|^2 \quad (18)$$

代入势函数(16), 计算可得硬球的散射振幅为

散射截面。在暗物质研究中, 学者主要关注此时的总散射截面, 上面讨论的宇宙学小尺度观测结果实际上是对总截面给出限制。因此, 下面我们计算半径为  $R$  的暗物质总散射截面

$$\sigma_T = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta} \sin\theta d\theta \quad (22)$$

此时总截面没有解析解, 因此我们数值计算了总散射截面。在具体的研究中主要关注弹性散射总截面  $\sigma_T$  随半径  $R$  的变化情况。当然这依赖于入射粒子动量  $k$  以及相互作用强度的大小。为此我们给出了不同的  $k$  值下  $\sigma_T 4\mu^2 \hbar^4 / \mu^2$  在  $R$  和  $\lambda$  空间的数值结果, 如图 2 所示。从图 2 中我们可以看到, 当入射动量  $k$  比较小时(图 2(a)), 总散射截面  $\sigma_T$  随半径变化不明显, 只有在  $R$  远远大于力程的时候, 才会显现效果。入射粒子动量小, 对应的德布罗意波长较长, 因此其尺寸效应不明显。但是当入射粒子动量足够大时(图 2(b)), 只要  $R > \lambda$  总截面就会随着  $R$  的改变而显著改变。正

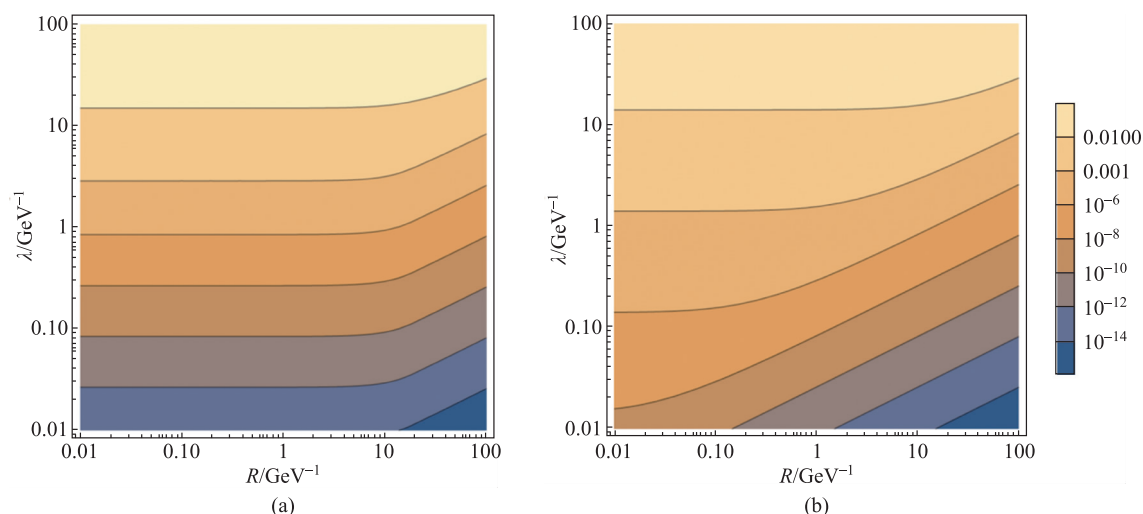


图2 左图和右图分别是  $k=0.1\text{GeV}$ ,  $k=100\text{GeV}$  时,  $\sigma_T 4\mu^2 \hbar^4 / \mu^2$  在  $R$  和  $\lambda$  空间的数值图像

是这种尺寸效应使得暗物质可以满足宇宙学小尺度的限制,具体情况可以参考文献[5]。

### 3 结语

满足平方反比率的库仑相互作用具有独特的意义,有源场满足的高斯定理描述了三维空间矢量场的属性。本文把其他类型势函数,如汤川势、谐振子势等转换为等效库仑荷分布,由此利用三维有源场满足的高斯定理来计算空间中的场强以及其他相关物理量。虽然这种方法在计算工作量上没有显著改进,但是得到的等效库仑荷分布在处理有体积粒子的时候会有更加清晰的物理图像。为此笔者专门设计了一个均匀分布汤川荷的硬球散射例题来展示这种方法的优越性。转换方法以及具体例题对拓展场论等相关课程的教学有一定借鉴意义。当然实际处理有体积粒子散射过

程确实比较复杂,作为量子力学散射部分的扩展内容在教学中是比较合适的。

### 参 考 文 献

- [1] 牛顿. 自然哲学之数学原理[M]. 北京:北京大学出版社,2018.
- [2] 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程:电磁学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [3] 金广浩. 基本粒子及其相互作用:概念和唯象论[M]. 世界图书出版公司,2010.
- [4] BUCHMULLER W, HOOGEVEEN F. Coherent production of light scalar particles in bragg scattering[J]. Phys. Lett. B, 237(1990) 278-283.
- [5] 杨炳麟. 暗物质及相关宇宙学[M]. 北京:科学出版社,2019.
- [6] CHU X, GARCIA-CELY C, MURAYAMA H. Phys. Rev. Lett., 124, No. 4, 041101 (2020).
- [7] 曾谨言. 量子力学[M]. 5版. 北京:科学出版社,2013.
- [8] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京:高等教育出版社,2009.
- [9] JACKON J D. 经典电动力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [10] 仲扣庄. 类比方法与光的本性的探索[J]. 大学物理,2003, 22(10):38-41.  
ZHONG K Z. Analogical method and inquiry on the nature of light[J]. College Physics, 2003, 22(10): 38-41. (in Chinese)
- [11] 秦克诚. 邮票上的物理学史—波粒二象性[J]. 大学物理, 2002,21(2): 46-49.  
QIN K C. The history of physics on postage stamps-wave-particle duality[J]. College Physics, 2002, 21(2): 46-49. (in Chinese)

(上接第14页)

- [5] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 E M. 场论[M]. 8版. 鲁欣,任朗,袁炳南,译. 北京:高等教育出版社,2012: 146-149.
- [6] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 E M. 力学[M]. 5版. 李俊峰,译. 北京:高等教育出版社,2007: 1-9, 133-151.
- [7] GOLDSTEIN H. Classical mechanics[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [8] FEYNMAN R P. 量子力学与路径积分[M]. 北京:高等教育出版社,2018: 19-23.
- [9] EINSTEIN A. On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light[J]. Annalen der Physik, 1905, 17(6): 132.