

关于量子力学中引入波粒二象性的教学尝试

张成园 许广智 李一杰 石 薇 李永庆

(辽宁大学物理学院, 辽宁 沈阳 110036)

摘 要 量子力学是近代物理学的基础理论之一,也是伴随着假设争论建立起来的理论。然而在教学过程中,若直接给出波粒二象性这一基本假设,学生理解起来会显得尤为困难。因此基于教学实际和前人的研究,本文从经典的电磁理论出发,根据波动光学和几何光学的描述方法,以及程涵方程的形式,假设光对应一种实物粒子。进而由普朗克的量子化条件,讨论了光的波动性和粒子性之间的联系,推导出了普朗克-爱因斯坦关系以及德布罗意关系,体现了光和实物粒子的波粒二象性。

关键词 波动光学;几何光学;实物粒子;波粒二象性

TEACHING ATTEMPT TO INTRODUCE WAVE-PARTICLE DUALITY IN QUANTUM MECHANICS

ZHANG Chengyuan XU Guangzhi LI Yijie SHI Wei LI Yongqing

(Department of Physics, Liaoning University, Shenyang, Liaoning 110036)

Abstract Quantum mechanics is one of basics theories of modern physics, and it is also a theory established with some debates of assumptions. However, in the teaching process, if the assumption of wave-particle duality is directly given, it will be particularly difficult for students to understand. Therefore, based on the teaching practice and previous research, we assume that light corresponds to a kind of real particle starting from the classical electromagnetic theory, according to the description methods of wave optics and geometric optics, and the form of functional equations. Subsequently, employing Planck's quantum conditions, we discuss the connection between the wave nature and particle nature of light. And then the Planck-Einstein relation and the de Broglie relationship are derived, which reflect the wave-particle duality of light and real particle.

Key words wave optics; geometrical optics; real particle; wave-particle duality

波粒二象性现象是量子力学中的重点内容,它成功解决了人们长久以来对光物质的疑惑,统一了光的波动性和粒子性问题,其意义十分重大。

自 20 世纪开始,人们就开始对光进行了研究,爱因斯坦通过对光电效应的完美解释,提出了光具有波粒二象性。1979 年,Wheeler 教授为检验其

收稿日期: 2022-06-29

基金项目: 辽宁省博士科研启动基金(2020-BS-083),2021 年度辽宁大学本科教学改革研究项目(项目名称:斯特恩-盖拉赫虚拟仿真实验平台建设与实施)。

作者简介: 张成园,女,讲师,主要从事量子力学教学工作,研究方向为全息规范引力对偶,zcy_215@sina.cn。

通讯作者: 李永庆,男,教授,主要从事量子力学教学工作,研究方向为原子分子势能面,yqli@lnu.edu.cn。

引文格式: 张成园,许广智,李一杰,等. 关于量子力学中引入波粒二象性的教学尝试[J]. 物理与工程,2023,33(1):10-14,21.

Cite this article: ZHANG C Y, XU G Z, LI Y J, et al. Teaching attempt to introduce wave-particle duality in quantum mechanics[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 10-14, 21. (in Chinese)

正确性,提出了“延迟选择的思想实验”。同时,德布罗意给出实物粒子也具有波粒二象性的假说^[1],即电子具备波的干涉现象。基于普朗克的量子论^[1-4],给出了普朗克-爱因斯坦关系,以及德布罗意关系。但由于受经典物理学理论的影响,学生的认知、知识体系和物理方法均具有一定的局限性,教师在直接引入两种关系来体现波粒二象性时有一定难度,学生也会存在诸多困惑。因此,如何从经典物理学出发,自然地导出体现波粒二象性的数学公式是本文即将讨论的主要内容。

1 光的波粒二象性

1.1 波动光学的描述

在真空中,电磁波满足无源的 Maxwell 方程组^[5]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1)$$

对于平面波,其解可以写为如下的形式

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)} \quad (2)$$

其中, f 可以是电场强度 $\mathbf{E}$ 或磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的某个分量。本文中,将 f 称作电磁场量。

而对于一般的电磁波,电磁场量的相位不再是式(2)中简单的形式,其振幅也不再是常数,我们一般将其写为

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (3)$$

在研究一般平面波时,通常仅考虑很小的空间区域和很短的时间间隔内的情况,在该区域内,电磁场量的振幅 $f_0(\mathbf{r}, t)$ 以及光的传播方向几乎不变,可以看为常数。在这种情况下,一般的电磁波即化为平面波。

1.2 几何光学的描述方法

从波动光学到几何光学实际是取 $\lambda \rightarrow 0$ (λ 是光的波长,下文也是如此)这一极限下电磁波解的必然结果。下面将仍从电磁波方程出发,来引入几何光学所满足的基本方程。

从式(3)出发,在几何光学中,电磁场量的相位 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 被称为程函。在选定的很小的区域内,因为 $\lambda \rightarrow 0$,电磁波各个参量的波动性消失,其传播

方向可以直接由光线来替代。光线上每一点的切线即表示光在这一点传播方向。因此,几何光学实际上研究光线的分布,而光则沿光线传播。

选定一个很小的空间区域以及很短的时间间隔,将程函 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 做 Taylor 展开

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \varphi + t \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (4)$$

由前所述,在很小的区域内,电磁波可以看作平面波。将式(4)与式(2)的相位作对比,可以得到

$$\mathbf{k} = \nabla \varphi \quad (5)$$

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (6)$$

而电磁波的波矢与频率又满足

$$\omega = ck \quad (7)$$

将式(5)、式(6)代入式(7)中,得到

$$(\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi \right)^2 = 0 \quad (8)$$

式(8)称为程函方程,是几何光学所满足的基本方程。

1.3 光与粒子的类比

从程函方程的形式可以看出,描述光线的方程与描述粒子运动的方程有很高的对称性。对于一个实物粒子,其运动可由 Hamilton-Jacobi 方程决定

$$\mathbf{p} = \nabla S \quad (9)$$

$$H = -\frac{\partial}{\partial t} S \quad (10)$$

其中, S 是粒子的作用量, H 是粒子的 Hamiltonian 量, $\mathbf{p}$ 是粒子的动量。对比式(9)、式(10)和式(5)、式(6)可知,在几何光学中的程函、波矢、频率分别与一个实物粒子的作用量、动量、哈密顿量(即能量)相互对应起来。即光线的传播和粒子的运动所满足的方程具有相同的形式。因此假设:存在某个实物粒子,它可以和一个特定的光线对应起来。对应规则为

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &\leftrightarrow S(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{k} &\leftrightarrow \mathbf{p} \\ \omega &\leftrightarrow H\end{aligned}\quad (11)$$

一个实物粒子,其状态随时间的演变遵从 Hamilton 正则方程

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H \quad (13)$$

按照对应法则式(11),能得到光线所满足的关系为

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c \hat{\mathbf{k}} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \nabla \omega = 0 \quad (15)$$

式(14)中 $\hat{\mathbf{k}}$ 表示沿着 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量。从式(14)中看出真空中光的速率为 c , 式(15)中表明 $\mathbf{k} = \text{const}$, 从式(14)、式(15)得到的直接结论——真空中光沿直线传播。

另一方面,光线满足的一个基本关系可以预测这个假想粒子的一个性质。光线的波矢与频率满足式(7),按照对应法则式(11),给出这个假想粒子的能量与动量的关系为

$$H = c p \quad (16)$$

根据狭义相对论的能量表达式

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (17)$$

由式(16)、式(17)可得 $m_0 = 0$ 。即这个假想粒子的静质量为 0。这个结论后来被证实,即光子的静质量确实为 0。

1.4 Fermat 原理

在经典力学中,实物粒子的运动轨迹由 Hamilton 原理确定^[6]

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt = 0 \quad (18)$$

其中, $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ 为粒子的拉格朗日量。Hamilton 原理指出:粒子在两点间的真实路径实际是所有路径中作用量取极值的路径。因为没法直接构造出几何光学的 Lagrangian(其结果为 0),因此需要加入一些限制条件,来构造属于几何光学的“Hamilton 原理”。

在能量守恒的前提下(Hamiltonian 不显含时间 t),根据 Maupertuis 原理,Hamilton 原理表述为^[7]

$$H = E = \text{const} \quad (19)$$

$$S(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}) - Et \quad (20)$$

$$S_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} \quad (21)$$

其中, S_0 称为缩短作用量, S_0 满足

$$\delta S_0 = 0 \quad (22)$$

以此为基础,通过对应法则式(11),在几何光学中,有

$$\omega = \text{const} \quad (23)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(\mathbf{r}) - \omega t \quad (24)$$

$$\varphi_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \quad (25)$$

$$\delta \varphi_0 = 0 \quad (26)$$

从类比而来的式(23)~式(26),光线在两点间所走的实际路径应该为所有路径中缩短程函 φ_0 达到极小值的路径。式(25)中,记 $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$, $ds = \hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r}$ 。 ds 表示光的路程,从而式(24)可以写为

$$\varphi_0 = \int_{\Gamma} k ds \quad (27)$$

对于一般的情况,波矢与频率满足

$$\omega = k v \quad (28)$$

其中, v 满足

$$v = c/n \quad (29)$$

n 为介质的折射率,这样式(27)化为

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{c} \int_{\Gamma} n ds \quad (30)$$

记: $dl = n ds$, dl 正是我们熟悉的光程的定义,式(30)就变为

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{c} \int_{\Gamma} dl \quad (31)$$

再由式(26),可将式(31)化为

$$\delta \int_{\Gamma} dl = 0 \quad (32)$$

式(32)正是 Fermat 原理的数学表达式。

综上所述,通过给光线类比一个假想粒子,二者之间相互映衬,又一次得到了令人满意的答案。在这里得出一个结论:光线与某种静质量为 0 的粒子是等价的。

1.5 Planck-Einstein 关系

Fermat 原理给出光线所满足的条件:两点间光沿着光程极小的路径传播。在这里就有一个令人困惑的地方:难道光线在传播之前,它遍历了所有的路径? 否则它如何得知究竟哪一条路径的光程是最短的。

对于这个问题的理解,我们需要借助于波动光学。电磁波在空间中的光强分布可写为

$$I(\mathbf{r}, t) \propto |f(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (33)$$

从波动光学的观点来看:全空间中只看到光程极小的路径是因为空间中所有路径的电磁场量叠加以后,得到的光强分布在光程极小路径处很大^[8],而其他区域几乎趋于 0,下面具体研究一下这个过程。

能量守恒的情况下,光强的分布不随时间变化,因此电磁场量可以写为

$$f(\mathbf{r}) = f_0 e^{i\varphi_0(\mathbf{r})} \quad (34)$$

其中, $\varphi_0(\mathbf{r})$ 定义见式(25)。为了计算方便, 只取一维的情况, 式(25)变为

$$\varphi[x(t)] = \int_{\Gamma} k dx \quad (35)$$

因为仅取一维情况, 对于某一条路径 Γ , 我们用其位置随时间的变化表示它。设路径初始位于 A 点, 此时为 t_1 时刻; 终点为 B 点, 此时为 t_2 时刻。因此整个光场的电磁场量分布可以写为

$$F(x) = \sum_{A \rightarrow B} f_0 e^{i\varphi(x)} \quad (36)$$

上式中的求和号表示 A 与 B 这两点间所有的路径。

从式(36)看出, 总的电磁场量贡献仅依赖于每一条路径的相位。考查其中一条路径相位的量级, 为计算简单, 我们用平面波

$$\varphi_{\text{free}} = kx = 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (37)$$

几何光学要求 $\lambda \rightarrow 0$, 因此实际上众多路径的相位是一个十分巨大的量。假设将一个路径移动一个很小的量 δx , 那么相位的变化为 $\delta\varphi = \delta x/\lambda$ 。通常路径的微小变化使得相位的变化非常巨大(原因还是 $\lambda \rightarrow 0$), 因此电磁场量将在最大与最小之间剧烈振荡, 以至于该条路径与周围的路径的电磁场量贡献相互抵消, 因此无须再考虑这些路径, 它们相当于互相干涉达到了干涉相消的效果。但存在一条特殊的路径, 这条路径对应的 $\varphi(x)$ 取得极小值, 即路径改变(δx 的量级)不会引起相位的改变。因此在 δx 范围内的所有的路径的相位是相同的, 它们对于电磁场量的贡献无抵消效果, 这些路径相当于达到了干涉相长的效果。

综上所述, 相位达到极值的路径与其周围很小范围内的路径之间相互干涉达到相长的效果, 而其他路径之间互相干涉相消, 表现为我们仅仅看到了光传播的那一条极值路径。现在可以回答之前的问题, 光线在传播时, 它确实以波动的形式遍历了所有的路径, 而被观察到的现象, 实际上是波之间干涉之后的结果。

以上对于光线传播的解释, 需要用到波动学的方法。而光线与某种假想粒子是等价的, 那么光线的传播与这种假想粒子也是等价的。这意味着, 假想粒子的运动轨迹的成因, 与波动有着非常紧密的联系。

我们再回到方程式(5)、式(6)与 Hamilton-Jacobi 方程式(9)、式(10), 这次通过量纲的方式分析这几个物理量之间量纲的差别, 见表 1。

表 1 波动性参量和粒子性参量对比

波动性		粒子性	
基本量	量纲	基本量	量纲
$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$	1	$S = S(\mathbf{r}, t)$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$
$\mathbf{k} = \nabla\varphi$	L^{-1}	$\mathbf{p} = \nabla S$	$M \cdot L \cdot T^{-1}$
$\omega = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi$	T^{-1}	$H = -\frac{\partial}{\partial t}S$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

从表 1 里可以看到, 描述波动性参量的相位 φ 、波矢 $\mathbf{k}$ 、频率 ω 与描述粒子性参量的作用量 S 、动量 $\mathbf{p}$ 、Hamilton 量 H 恰好相差一个作用量的量纲。为了保证之前类比的有效性, 这个相差的作用量量纲的比例系数必须为常数, 我们不妨设

$$S = C\varphi \quad (38)$$

$$\mathbf{p} = C\mathbf{k} \quad (39)$$

$$H = C\omega \quad (40)$$

其中, C 是一个具有作用量量纲的常数。

1900 年 Planck 提出能量量子假说时, 曾给出一个电磁波吸收和辐射能量时能量与频率的关系^[2]

$$\varepsilon = h\nu \quad (41)$$

其中, h 称为 Planck 常数, 其值为: $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。对比式(36)与式(35), 就可以得到

$$C = \frac{h}{2\pi} = \hbar \quad (42)$$

其中, $\hbar$ 称为约化 Planck 常数。这样可以把式(33)~式(35)写为

$$S = \hbar\varphi \quad (43)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (44)$$

$$H = \hbar\omega \quad (45)$$

式(44)与式(45)称为 Planck-Einstein 关系式。

从式(43)~式(45)中看到这样的事实: 光与这个假象粒子通过一个常数——约化 Planck 常数相互联系起来, 而这个假想粒子正是 1905 年 Einstein 提出的光量子(简称光子)^[9,10]。而式(44)、式(45)即是光的波粒二象性的体现。

此时对于约化 Planck 常数的量纲我们还需做一点讨论。基于量纲的知识, 我们知道长度、时间和质量的基本量纲分别用 L 、 T 和 M 来表示, 这样自然就可以给出速度的量纲为 $L \cdot T^{-1}$ 。而从爱因斯坦的质能方程 $E = mc^2$ 可得能量的量纲为

$$[E] = [m] [c^2] = M \cdot (L/T)^2 = M \frac{L^2}{T^2} \quad (46)$$

即 H 具有能量的量纲, 根据式(45)便自然的给出

约化普朗克常数的量纲为

$$[\hbar] = [H/\omega] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \quad (47)$$

毫无疑问,这与量纲分析表1中的结果保持一致。

2 实物粒子的波粒二象性

通过类比方法,在第1节中最终从数学上找到了光的波动性和粒子性之间的联系。在讨论粒子波粒二象性时,先对式(43)做一个处理。将式(43)代入式(3)中,可以得到

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0 e^{i \frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}} \quad (48)$$

式(48)描述的是电磁场量的分布(波动性量),但电磁场量的相位用粒子所特有的作用量来描述。关于体现实物粒子波粒二象性假设的公式可从式(48)出发得到。

2.1 实物粒子的波动性假设

实物粒子的运动由 Hamilton-Jacobi 方程确定,见式(9)与式(10)。而实物粒子的运动轨迹由 Hamilton 原理确定,见式(18)。

对于实物粒子的 Hamilton 原理,实际可以有与 Fermat 原理相同的疑问:难道实物粒子遍历了所有的路径? 否则它如何选出作用量极小的路径呢? 由 1.4 节的讨论,可看出 Fermat 原理与 Hamilton 原理可以算是同根同源,是同一个定理在不同方面的表述。那么 Hamilton 原理背后的原因应该与 Fermat 原理是相同的。上述的疑问应该与 1.4 节中的疑问是等价的,对于实物粒子的 Hamilton 原理解释,我们必须也要采用“实物粒子的波动性”。在此假设:每一个实物粒子都与某一种波相联系,这种波称为物质波。我们给出物质波的波函数表述,由式(48)类比,直接写出物质波的波函数

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i \frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}} \quad (49)$$

其中,波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 类似于电磁波中的电磁场量。只要给出了式(49)的形式,以 1.3 节中相同的思考方式,可以得到结论:实物粒子对应一种物质波,实物粒子的运动轨迹实际上是这种物质波之间相互叠加干涉的结果。在极值路径附近,物质波干涉相长;其他路径物质波干涉相消,表现出来我们只能看到粒子沿着极值路径运动,即粒子轨迹符合 Hamilton 原理,这就是实物粒子的波粒二象性假设。

2.2 de Broglie 关系

既然 2.1 节已经给出了实物粒子的波粒二象

性假设,这里就要给出实物粒子波动性参量与粒子性参量之间的表达式。

实物粒子的波函数满足式(49),记 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的相位为 $\theta(\mathbf{r}, t)$,则 $\theta(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t)/\hbar$ 。这样式(49)可写为

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (50)$$

从式(50)中得出这个波的波矢与频率的分布需要用到式(5)与式(6),将式(50)代入其中,即可得到

$$\mathbf{k} = \nabla \theta = \frac{1}{\hbar} \nabla S \quad (51)$$

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial t} \theta = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} S \quad (52)$$

其中的 S 是实物粒子的作用量,满足 Hamilton-Jacobi 方程。将式(9)、式(10)代入式(51)、式(52)中,就得到实物粒子的粒子性与波动性之间的联系

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \quad (53)$$

$$\omega = \frac{1}{\hbar} H \quad (54)$$

而式(53)、式(54)正是 de Broglie 关系式^[11]。即动量为 $\mathbf{p}$, 能量为 H 的实物粒子与其联系的物质波的波参数之间满足式(53)、式(54),这就是实物粒子波粒二象性的体现。

3 结语

光和实物粒子的波粒二象性在近代物理的发展中具有重要地位,教学中为有效连接经典物理学和量子力学,本文从波动光学和几何光学出发,对比几何光学满足的程函方程和经典粒子的哈密顿雅克比方程,给出光和假想粒子之间相互映衬的关系。通过费马原理验证了光具有波粒二象性假设的有效性,进一步得到了体现光和实物粒子具有波粒二象性的 Plank-Einstein 关系和 de Broglie 关系式,使学生加深对波粒二象性的理解。

参 考 文 献

- [1] 曾谨言. 量子力学[M]. 3版. 北京: 科学出版社, 2014.
- [2] PLANCK M. On an Improvement of Wien's equation for the spectrum[J]. Verh. D. Phys. Ges., 1900(2): 202.
- [3] 周世勋. 量子力学的诞生(1)[J]. 大学物理, 1982, 1(1): 7-10. ZHOU S X. The birth of quantum mechanics(1)[J]. College Physics, 1982, 1(1): 7-10. (in Chinese)
- [4] 赵凯华. 波粒二象性[J]. 物理教学, 2016, 38(9): 2-6. ZHAO K H. The wave-particle duality[J]. Physics Teaching, 2016, 38(9): 2-6. (in Chinese)

(下转第 21 页)

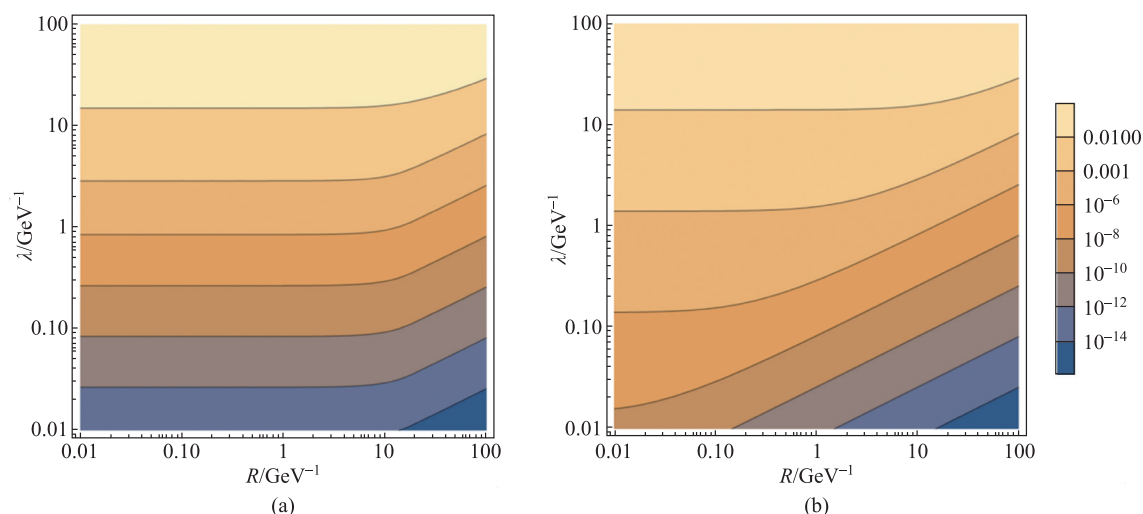


图2 左图和右图分别是 $k=0.1\text{GeV}$, $k=100\text{GeV}$ 时, $\sigma_T 4\mu^2 \hbar^4 / \mu^2$ 在 R 和 λ 空间的数值图像

是这种尺寸效应使得暗物质可以满足宇宙学小尺度的限制,具体情况可以参考文献[5]。

3 结语

满足平方反比率的库仑相互作用具有独特的意义,有源场满足的高斯定理描述了三维空间矢量场的属性。本文把其他类型势函数,如汤川势、谐振子势等转换为等效库仑荷分布,由此利用三维有源场满足的高斯定理来计算空间中的场强以及其他相关物理量。虽然这种方法在计算工作量上没有显著改进,但是得到的等效库仑荷分布在处理有体积粒子的时候会有更加清晰的物理图像。为此笔者专门设计了一个均匀分布汤川荷的硬球散射例题来展示这种方法的优越性。转换方法以及具体例题对拓展场论等相关课程的教学有一定借鉴意义。当然实际处理有体积粒子散射过

程确实比较复杂,作为量子力学散射部分的扩展内容在教学中是比较合适的。

参 考 文 献

- [1] 牛顿. 自然哲学之数学原理[M]. 北京:北京大学出版社,2018.
- [2] 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程:电磁学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [3] 金广浩. 基本粒子及其相互作用:概念和唯象论[M]. 世界图书出版公司,2010.
- [4] BUCHMULLER W, HOOGEVEEN F. Coherent production of light scalar particles in bragg scattering[J]. Phys. Lett. B, 237(1990) 278-283.
- [5] 杨炳麟. 暗物质及相关宇宙学[M]. 北京:科学出版社,2019.
- [6] CHU X, GARCIA-CELY C, MURAYAMA H. Phys. Rev. Lett., 124, No. 4, 041101 (2020).
- [7] 曾谨言. 量子力学[M]. 5版. 北京:科学出版社,2013.
- [8] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京:高等教育出版社,2009.
- [9] JACKON J D. 经典电动力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [10] 仲扣庄. 类比方法与光的本性的探索[J]. 大学物理,2003, 22(10):38-41.
ZHONG K Z. Analogical method and inquiry on the nature of light[J]. College Physics, 2003, 22(10): 38-41. (in Chinese)
- [11] 秦克诚. 邮票上的物理学史—波粒二象性[J]. 大学物理, 2002,21(2): 46-49.
QIN K C. The history of physics on postage stamps-wave-particle duality[J]. College Physics, 2002, 21(2): 46-49. (in Chinese)

(上接第14页)

- [5] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 E M. 场论[M]. 8版. 鲁欣,任朗,袁炳南,译. 北京:高等教育出版社,2012: 146-149.
- [6] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 E M. 力学[M]. 5版. 李俊峰,译. 北京:高等教育出版社,2007: 1-9, 133-151.
- [7] GOLDSTEIN H. Classical mechanics[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [8] FEYNMAN R P. 量子力学与路径积分[M]. 北京:高等教育出版社,2018: 19-23.
- [9] EINSTEIN A. On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light[J]. Annalen der Physik, 1905, 17(6): 132.