

图像法解一维弹性碰撞次数问题

胡 剑

(深圳中学, 广东 深圳 518024)

摘 要 水平面直线上若干个物块的弹性碰撞次数问题常见于各类物理竞赛。本文通过例证说明, 运用基于动量守恒定律和能量守恒定律的图像法求解相关的一维弹性碰撞次数问题, 不但可行而且有利于简化分析过程, 具有直观清晰的特点。

关键词 碰撞; 动量守恒定律; 能量守恒定律; 图像法

SOLVING THE PROBLEM OF NUMBERS OF ONE-DIMENSIONAL ELASTIC COLLISIONS BY GRAPHIC METHOD

HU Jian

(Shenzhen Middle School, Shenzhen, Guangdong 518024)

Abstract The problem of the number of elastic collisions of several blocks on the horizontal plane is common in various physical competitions. In this paper, it is illustrated by examples that using the graphic method based on the law of conservation of momentum and the law of conservation of energy to solve the related one-dimensional elastic collision number problem is not only feasible but also beneficial to simplify the analysis process, and has the advantage of intuition and clarity.

Key words collision; conservation law of momentum; conservation law of energy; graphic method

水平面直线上若干个物块的弹性碰撞次数问题是一类有趣的物理问题, 常见于各类物理竞赛。这类问题只涉及动量守恒定律和能量守恒定律, 但具体分析时需要清晰的物理图像和繁琐的计算, 尤其当所涉及物体超过 2 个时, 计算量将大大增加。

不同于传统的公式计算, 有作者另辟蹊径采用图像法对一个特殊的一维弹性碰撞次数问题进行了研究, 具有直观简便的特点。在讨论两球与墙壁三者之间的碰撞总次数时, “将遵守守恒定律的碰撞过程用速度相图直观地描述出来”“整个讨

论过程物理意义明确, 几何关系简单”^[1,2]。

受上述两篇文献的启发, 本文探索运用图像法求解更一般的一维弹性碰撞次数问题。

1 相同质量物块的一维弹性碰撞

题 1 N 个质量相同的小物块放置在光滑水平面上, 限制在平面一条直线上运动, 给定初始时刻的位置和速度。物块间碰撞为完全弹性的, 不计一切能量损失。求: 全过程物块间相互碰撞的总次数。

收稿日期: 2022-05-23

作者简介: 胡剑, 男, 中学一级教师, 主要从事高中物理教学和物理竞赛教学, 研究方向为天体物理, jhu@shenzhong.net。

引文格式: 胡剑. 图像法解一维弹性碰撞次数问题[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 180-182.

Cite this article: HU J. Solving the problem of numbers of one-dimensional elastic collisions by graphic method[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 180-182. (in Chinese)

分析:如果用常规的分析方法,由于初始位置和速度都是任意的,除了列出每次碰撞前后的动量和能量守恒定律,简直无从下手。甚至哪两个物块先发生碰撞都难以确定。然而,用图像法我们可以很容易的解决这个问题。

不妨设 $N=3$,如图1所示,在 $x-t$ 图上画出3个物块的运动轨迹,碰撞前后物块的轨迹在图中都是直线,直线的斜率为速度的倒数。根据一维弹性碰撞问题熟知的结论,相同质量的两个物块在弹性碰撞前后交换速度,即 $v'_i=v_j$, $v'_j=v_i$ 。这在图中表示为两条直线相交,只是交换编号。例如,物块2和物块3先碰撞(图中A点),随后物块2和物块1碰撞(图中B点),最后物块2和物块3再次碰撞(图中C点),一共发生三次碰撞。物块间的总碰撞次数也就是这些直线的交点数。按此思路,对于任意 N 个物块给定初始位置和速度条件的弹性碰撞次数问题,都可以用图示法求解。平面上 N 条直线最多有 $N(N-1)/2$ 个交点,因此原题物块间最多可以有 $N(N-1)/2$ 次碰撞。

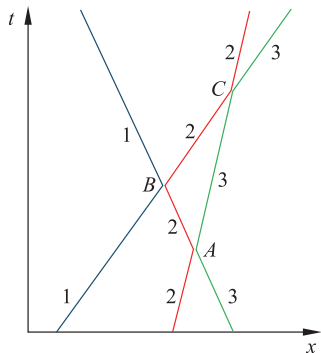


图1 三个相同质量物块的一维弹性碰撞运动轨迹

2 不同质量物块的一维弹性碰撞

题2 三个质量分别为 m_1, m_2, m_3 的小物块放置在光滑水平面上,限制在平面一条直线上运动,给定初始时刻的位置和速度。物块间碰撞为完全弹性的,不计一切能量损失。求:全过程物块间相互碰撞的总次数。

分析:此题相当于将文献[1]和[2]所研究问题中的左侧墙体换成了物块。与上题不同,物块的质量不同,因此碰撞前后不是简单的交换速度,用上题的思路无法方便的解决此题,我们需要新

的方法。借鉴 Galperin 的做法^[3],设立空间直角坐标系,令 $X_i = \sqrt{m_i} x_i$, ($i=1,2,3$),其中 x_i 为物块的位置。任意时刻三个物块的位置对应此坐标系中的一个点 $P[X_1, X_2, X_3]$,三个物块的一维运动对应该点在空间中的运动。

不妨设初始时刻 $x_1 < x_2 < x_3$,由于物块间只能碰撞,不能相互穿越,在之后的运动中将保持 $x_1 < x_2 < x_3$ 。因此,在 P 点在 X_1-X_2 平面上的投影始终位于直线 $X_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} X_1$ 的左上方, P 点在 X_2-X_3 平面上的投影始终位于直线 $X_3 = \sqrt{\frac{m_3}{m_2}} X_2$ 的左上方。过直线 $X_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} X_1$ 和坐标轴 X_3 确定平面 S_1 ,过直线 $X_3 = \sqrt{\frac{m_3}{m_2}} X_2$ 和坐标轴 X_1 确定平面 S_2 。平面 S_1 和 S_2 的交线 Q 为 $X_1 : X_2 : X_3 = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} : \sqrt{m_3}$,这对应物块的位置 $x_1 = x_2 = x_3$ 。 P 点的运动不能穿越 S_1 和 S_2 平面,因此 P 点只能在 S_1 和 S_2 之间的区域运动。

我们还可以过直线 $X_3 = \sqrt{\frac{m_3}{m_1}} X_1$ 和坐标轴 X_2 确定平面 S_3 ,平面 S_1, S_2 和 S_3 拥有共同的交线 Q ,它们将整个空间分割为6个区间。 x_1, x_2 和 x_3 的相对大小决定了 P 点只能在这6个区间中的某一个区间内运动。

文献[3]中已证明,质量为 m_1 和 m_2 的物块间的完全弹性碰撞可以描述为 X_1-X_2 平面上

$[X_1, X_2]$ 点的轨迹对直线 $X_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} X_1$ 的镜面反射。本题中共有三个物块,但每次碰撞只涉及两个物块,同样可以用 P 点在平面 S_i 上的镜面反射来描述。因此我们可以把物块碰撞次数问题转换为求光线在两块平面镜之间的反射次数问题。

如图2所示,物块2和物块3先发生碰撞,对应 P 点轨迹在平面 S_2 上 A 点处的反射;然后物块2和物块1发生碰撞,对应 P 点轨迹在平面 S_1 上 B 点处的反射;最后物块2和物块3再次发生碰撞,对应 P 点轨迹在平面 S_2 上 C 点处的反射。 P 点的运动轨迹 ABC 可以从直线 $AB'C'$ 得到,其中 S'_1 是 S_1 在 S_2 中的镜像平面, S'_2 是 S_2 在 S'_1 中的镜像平面。根据镜面反射原理, $QB = QB'$,

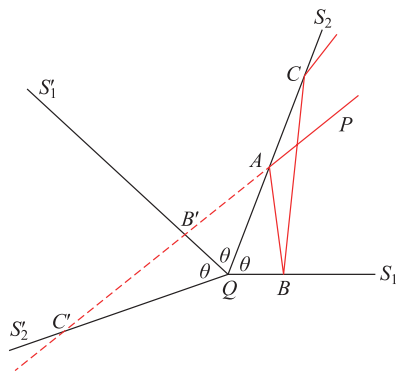


图2 三个不同质量物块的一维弹性碰撞运动轨迹

$QC=QC'$ 。如有必要,还可以依次定义 S_1'' , S_2'' 等镜像平面。

设平面 S_1 和 S_2 之间(P 所在的那个区间)的夹角为 θ , θ 由 m_1 、 m_2 和 m_3 的比例决定。 S_1 平面的法线方向为 $\left[-\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}, \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}, 0\right]$, S_2 平面的法线方向为 $\left[0, \sqrt{\frac{m_3}{m_2+m_3}}, -\sqrt{\frac{m_2}{m_2+m_3}}\right]$,

因此 $\cos\theta = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}}$ 。

如图2所示,不妨设 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 则 P 的轨迹与 S_1 和 S_2 平面最多有3个交点。一般的,若 $\frac{\pi}{n} \leq \theta < \frac{\pi}{n-1}$, 则 P 的轨迹与 S_1 和 S_2 平面最多有 n 个交点。实际的交点数还取决于 P 点轨迹的初始方向。

若 $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$, $\frac{m_3}{m_1} \rightarrow 0$, 则物块1相当于一堵墙,也就是文献[1]和文献[2]中讨论的问题。此时

$\cos\theta = \sqrt{\frac{m_3}{m_2+m_3}}$, 即 $\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2}{m_3}}$, 与文献[1]和文献[2]中得到的结果相同。

附注:图2显示的是垂直于交线 Q 的平面,其中 P 点的轨迹是实际轨迹在该平面上的投影,不影响此处对交点数(碰撞次数)的讨论。

3 教学启示

计算方法和图像方法是两种各有所长的解题方式,同一个问题用不同的方法处理往往有异曲同工之妙。采用图像法求解某些过程复杂的物理问题(如本文所列举的物体碰撞次数问题),可以简化分析过程,具有直观清晰的特点。计算和图像两种方法的结合,往往能够起到事半功倍之效。教师在教学中有意识地这样对学生进行渗透着多种思维方式的训练,有利于学生物理素质和创新能力的培养。

参 考 文 献

- [1] 陈怡. 碰撞出来的圆周率[J]. 物理与工程, 2020, 30(1): 68-72.
CHEN Y. The value of circumference ratio could be derived from ball collisions[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(1): 68-72. (in Chinese)
- [2] 程军, 孙辉. 关于物块碰撞次数的探讨[J]. 大学物理, 2020, 39(8): 11-13.
CHENG J, SUN H. Discussion on the collision times between blocks[J]. College Physics, 2020, 39(8): 11-13. (in Chinese)
- [3] GALPERIN G. Playing pool with π [J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 8(4): 375-394.

(上接第179页)

- XU R C, HU Y K, XIAN C. Algorithm comparison of micro-displacement measurement by laser triangulation[J]. Journal of Shanghai Electric Technology, 2021, 14(4): 75-78. (in Chinese)
- [15] 范海健, 谢伟楠, 曹冬冬, 等. 激光三角法在手机SIM卡槽触点共面度测量中的应用研究[J]. 科技创新与应用, 2021, 18: 172-174.
FAN H J, XIE W N, CAO D D, et al. Application of laser triangulation in the measurement of the coplanarity of SIM card slot contacts in mobile phones[J]. Technology Innovation and Application, 2021, 18: 172-174. (in Chinese)
- [16] MAEKAWA A, NODA M, SHINTANI M. Experimental

study on a noncontact method using laser displacement sensors to measure vibration stress in piping systems[J]. Measurement, 2016, 79: 101-111.

- [17] DONADELLO S, MOTTA M, DEMIR A G, et al. Monitoring of laser metal deposition height by means of coaxial laser triangulation[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2019, 112: 136-144.
- [18] WU C X, CHEN B J, YE C S. Detecting defects on corrugated plate surfaces using a differential laser triangulation method[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2020, 129: 106064.