

空气中普通小球的非高速竖直上抛运动的研究

邵 云

(南京晓庄学院电子工程学院, 江苏 南京 211171)

摘 要 文章首先证明了对于通常材质、大小、初速度(非高速)的实心小球在空气中的竖直上抛运动,将空气阻力系数 C_D 取作 0.42 完全可行。文章将空气阻力看作速度的二次函数,采用传统的研究思路,逐步推导出普通小球在空气中做非高速竖直上抛运动的运动学方程,进而推得小球上升的时间和最大高度,以及小球下落的时间和落地速度。分析结果发现,小球的上升时间小于下落时间,更小于没有空气阻力时的上升或下落时间;在相同的初速度下,同质实心较大球的运动受空气阻力的影响要小一些;而当初速相同,密度与半径的乘积也相同时,材质、大小均不同的实心球却具有相同的上抛运动。文章还以 1cm 半径的实心小铁球为例,计算并作出各运动特征参量随初速度的变化曲线,以及在数个不同的初速度下小球的位移随时间的变化曲线。结果发现,初速度越大,小球的运动越偏离理想的无空气阻力情形。文末对一些可能的干扰或误差因素进行了简要的概述。

关键词 实心小球;非高速竖直上抛运动;空气阻力系数;雷诺数;运动学方程

STUDY ON NON HIGH SPEED VERTICAL UPWARD THROWING MOTION OF ORDINARY SMALL BALL IN AIR

SHAO Yun

(School of Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing, Jiangsu 211171)

Abstract Firstly, it is proved that it is completely feasible to take the air resistance coefficient C_D as 0.42 for the vertical upward throwing motion of a small solid ball with usual material, size and initial velocity (non high speed) in the air. The air resistance is regarded as the quadratic function of speed in this paper, and the traditional research idea is adopted to gradually deduce the kinematic equation of the non high speed vertical throwing motion of an ordinary small ball in the air, and then deduce the rising time and maximum height of the small ball, as well as the falling time and landing speed. The results show that the rising time of the small ball is less than the falling time, while the latter is less than the rising or falling time without air resistance. At the same initial velocity, the motion of a homogeneous solid bigger ball is less affected by air resistance. When the initial velocity is the same and the product of density and radius is the same, the solid balls with different materials and sizes have the same upward throwing motion. Taking a small solid iron ball with a radius of 1 cm as an example, the variation curves of various motion characteristic parameters with initial velocity and the variation curves of small ball displacement with time under several different initial velocities are calculated and made. The results show that the larger the initial velocity is, the more the motion of

收稿日期: 2022-03-18

基金项目: 江苏省教育科学“十三五”规划课题(D/2020/01/55)。

作者简介: 邵云,男,讲师,主要从事力学、热学教学和研究工作,shaoyun1973@163.com。

引文格式: 邵云. 空气中普通小球的非高速竖直上抛运动的研究[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 164-170.

Cite this article: SHAO Y. Study on non high speed vertical upward throwing motion of ordinary small ball in air[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 164-170. (in Chinese)

the ball deviates from the ideal situation without air resistance. At the end of the paper, some possible interference or error factors are briefly summarized.

Key words solid small ball; non high speed vertical upward throwing motion; air resistance coefficient; Reynolds number; kinematic equation

实心小球在空气中的非高速竖直上抛运动是一个非常古老的问题,然而直至今日,国内却少有文献对其进行详细而准确的描述。文献[1-3]等仅以习题的方式提及了一下小球落地时的速度,文献[4]则还给出小球从高处下落的运动学方程。其他有的文献将空气阻力视作速度的一次函数^[5-7],这是不恰当的^[1,8];另有一些文献将空气阻力视作速度的二次函数,但研究的却是斜抛运动,并且采用的都是数值计算的方法^[9-10]。另外,也鲜有文献针对雷诺数对空气阻力系数的影响做详细而客观的分析。本文将逐步论证、推导出小球在空气中做竖直上抛运动的运动学方程、上升的最大高度、上升和下落的时间,以及落地速度,并对结果进行比较、分析、作图等,以此给出小球较完整而准确的运动图像。

1 证明 $C_D=0.42$ 完全适用于通常材质、大小的实心小球的非高速竖直上抛运动

如图 1 所示,做竖直上抛运动的普通小球将同时受到重力和空气阻力的作用(忽略浮力),其中空气阻力 $f_{\text{阻}}$ 通常表达成

$$f_{\text{阻}} = -kvv \quad (1)$$

的矢量形式。根据流体力学知识,式(1)中的 k 为

$$k = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{空}} \pi r^2 \quad (2)$$

其中, C_D 是光滑球体的空气阻力系数,其数值依赖于无量纲的雷诺数

$$Re = \frac{2\rho_{\text{空}} vr}{\eta_{\text{空}}} \quad (3)$$

若球体的雷诺数 Re 不是太大($<2 \times 10^5$),则 C_D

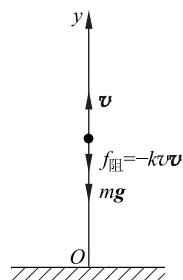


图 1 空气中做竖直上抛运动小球的受力分析图

与 Re 之间的关系近似为^[11]

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}), & Re \leq 10^3 \\ 0.42, & 10^3 < Re < 2 \times 10^5 \end{cases} \quad (4)$$

图像如图 2 所示。以上式中 $\rho_{\text{空}}$ 、 $\eta_{\text{空}}$ 、 r 分别表示空气的密度、空气的粘滞系数、球体的半径。由此可见,仅当雷诺数 Re 较大时, C_D 方可看作常数, k 方可看作常量, $f_{\text{阻}}$ 则方可看作速率 v 的二次函数。

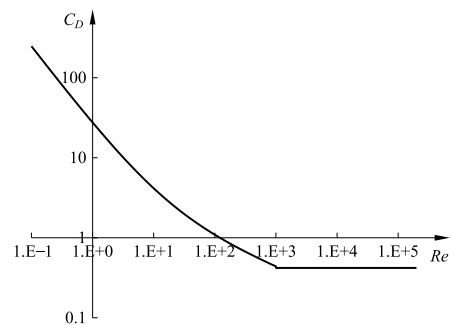


图 2 光滑球体的空气阻力系数 C_D 与雷诺数 $Re (<2 \times 10^5)$ 之间的关系

联立式(1)~式(4),可得速度较小($Re \leq 10^3$)的小球在空气中上升时所受到的空气阻力为

$$f_{\text{阻}} = -6\pi\eta_{\text{空}} rv \left[1 + 0.15 \left(\frac{2\rho_{\text{空}} vr}{\eta_{\text{空}}} \right)^{0.687} \right] \quad (5)$$

于是,根据牛顿第二定律并参考图 1,小球上升运动的动力学分量方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta_{\text{空}} rv \left[1 + 0.15 \left(\frac{2\rho_{\text{空}} vr}{\eta_{\text{空}}} \right)^{0.687} \right] - mg \quad (6)$$

设小球的密度为 ρ ,则小球的质量为

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)可得

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9\eta_{\text{空}} v}{2\rho r^2} \left[1 + 0.15 \left(\frac{2\rho_{\text{空}} vr}{\eta_{\text{空}}} \right)^{0.687} \right] - g \quad (8)$$

设空气为标准状态(0°C , 1atm ,下同),其密度 $\rho_{\text{空}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$,粘滞系数 $\eta_{\text{空}} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ^[12],并设 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。将这些数据代入式(8),计算

可得在国际单位制下(下同)有

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{7.65 \times 10^{-5}}{\rho r^2} (v + 544r^{0.687} v^{1.687}) - 9.8 \quad (9)$$

将 $\rho_{\text{空}}$ 、 $\eta_{\text{空}}$ 的数据代入式(3),并令 $Re \leq 10^3$, 即得空气阻力式(5)及以上诸式成立的前提条件

$$vr \leq 6.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (10)$$

显然,对于空气中半径如足球般大的球体的运动,式(10)一般是不满足的;同时又可见,对于 1m/s 左右的速度,小球的半径 r 应控制在 1cm 左右或以下,方能满足条件式(10)。

倘若对于速度较小的小球,空气阻力系数 C_D 强行采用式(4)中的第 2 个表达式即 0.42,则小球上升的动力学分量方程式(6)修改为

$$m \frac{dv}{dt} = -0.21 \rho_{\text{空}} \pi r^2 v^2 - mg \quad (11)$$

再将式(7)及 $\rho_{\text{空}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 、 $\eta_{\text{空}} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 代入式(11),整理即得

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{0.203v^2}{\rho r} - 9.8 \quad (12)$$

显然,式(12)与上文较严格的动力学方程式(9)之间会存在一定的误差。经整理,该误差可写成

$$\Delta a = \frac{1}{\rho r^3} \{ 7.65 \times 10^{-5} [(rv) + 544(rv)^{1.687}] - 0.203(rv)^2 \} \quad (13)$$

在小球的密度 ρ 及半径 r 均给定时, Δa 可看作速度 v 的单值函数。在此情形下,将 Δa 对速度 v 求导并令导数为零,即得误差 Δa 取极大值时速度 v 值所应满足的方程

$$0.406(rv) - 0.0702(rv)^{0.687} - 7.65 \times 10^{-5} = 0 \quad (14)$$

求解方程式(14)得

$$rv = 4.245 \times 10^{-3} \quad (15)$$

相应的雷诺数为

$$Re = 644.2 \quad (16)$$

此即由 $C_D = 0.42$ 近似所带来的加速度的误差取极大值(也即最大值)时的雷诺数。对于不同的小球,该雷诺数即式(16)是统一的! 将式(15)代回到式(13),即得速度较小的实心小球取 $C_D = 0.42$ 近似所带来的加速度的最大误差值

$$(\Delta a)_{\text{max}} = \frac{8.113 \times 10^{-7}}{\rho r^3} \quad (17)$$

式(17)可用来判断 $C_D = 0.42$ 的近似程度。这里有必要解释一下,当速度 $v \rightarrow 0$ 也即 $Re \rightarrow 0$ 时,尽管两种 C_D 值相差巨大(见图 2),但是从式(13)却

可见误差 $\Delta a \rightarrow 0$; 而当 $Re = 10^3$ 时, $C_D \approx 0.42$ 已然成立(见图 2),因此此时的误差 Δa 固然也很小。于是便知,在满足 $0 < Re < 10^3$ 的低速区间, Δa 必有一个极大值,事实上也是最大值,见式(13)。

考虑到重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$,倘若要将加速度的绝对误差限制在 0.05 m/s^2 以下,也即将相对误差大致限制在 0.5% 以下,则从式(17)可见, ρ 、 r 应满足

$$\rho r^3 \geq 1.623 \times 10^{-5} \quad (18)$$

据此便可以算出对通常材质的实心小球使用 $C_D = 0.42$ 近似的前提条件:如小铁球, $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,半径 r 应满足 $r > 1.27 \text{ mm}$;小石球, $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $r > 1.82 \text{ mm}$;小冰球, $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, $r > 2.60 \text{ mm}$;小软木球, $\rho = 250 \text{ kg/m}^3$, $r > 4.02 \text{ mm}$;泡沫塑料球, $\rho = 50 \text{ kg/m}^3$, $r > 6.87 \text{ mm}$;等等。倘若这些材质小球的半径均取其下限值,则将这些下限值代入式(15),即得它们加速度的误差达到统一设定的最大值 $(\Delta a)_{\text{max}} = 0.05 \text{ m/s}^2$ 时的速度 $v_{(\Delta a)_{\text{max}}}$ 分别为 3.34 m/s 、 2.33 m/s 、 1.63 m/s 、 1.06 m/s 、 0.62 m/s ,雷诺数固然同为 $Re_{(\Delta a)_{\text{max}}} = 644.2$ 。此外,将 ρ 、 r 及所得 v 值代入式(9),即得此时共同的加速度值 $a_{(\Delta a)_{\text{max}}} = -10.08 \text{ m/s}^2$ ——从式(13)中可以看出这一特点。表 1 中列出以上相关数据,同时也列出各球在低速上限($Re = 10^3$)时的速度 $v_{Re=10^3}$ [见式(10)],和加速度 $a_{Re=10^3}$ [见式(9)],作为参照。其中所有数据均采用了国际单位。

从式(9)、(12)、(13)不难看出,小球下落时加速度的误差情况与上升时完全类似,只是加速度值及 Δa 的符号发生了变化,如表 1 中误差最大时的共同加速度 $a_{(\Delta a)_{\text{max}}}$ 将变成 -9.52 m/s^2 , $(\Delta a)_{\text{max}}$ 则变成 -0.05 m/s^2 。至此,我们可以做出如下判断:只要实心小球的密度和半径满足式(18)即 $\rho r^3 \geq 1.623 \times 10^{-5}$,在其竖直上抛运动(包括上升、下落过程)的低速区间采用 $C_D = 0.42$ 近似来计算空气阻力完全是适当的,其所带来的误差应在 0.5% 及以下,且 ρ 、 r 越大,误差越小。此外,易见小球的初速度 $v_0 (> v_{Re=10^3})$ 越大,对于整个竖直上抛运动而言,统一采用 $C_D = 0.42$ 所带来的相对误差会越小。因此,对于通常材质、大小(r 大于表 1 中 r_{min})的实心小球的竖直上抛运动,除非初速度非常大(即 $Re > 2 \times 10^5$),将空气阻力系数 C_D 当作常数 0.42 完全是可行的,它给小球的实际运动所带来的误差微乎其微,几可忽略!

表 1 半径取下限值的几种材质小球在其竖直上抛过程中的若干参量值

	ρ	$r_{\min}$	$v_{Re=10^3}$	$a_{Re=10^3}$	$v_{(\Delta a)_{\max}}$	$a_{(\Delta a)_{\max}}$	$(\Delta a)_{\max}$	$Re_{(\Delta a)_{\max}}$
泡沫塑料球	50	0.00687	0.96	-10.37	0.62	-10.08	0.05	644.2
软木球	250	0.00402	1.64	-10.37	1.06	-10.08	0.05	644.2
冰球	920	0.00260	2.54	-10.37	1.63	-10.08	0.05	644.2
石球	2700	0.00182	3.63	-10.37	2.33	-10.08	0.05	644.2
钢球	7900	0.00127	5.20	-10.37	3.34	-10.08	0.05	644.2

2 通常材质、大小、初速度(非高速)的实心小球的竖直上抛过程

对于通常材质、大小($r > r_{\min}$, 下同)、初速度的实心小球在空气中的竖直上抛过程, 小球的动力学分量方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2 - mg \quad (19)$$

这里的 $k = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{空}} \pi r^2$ 已视为常量。式(19)经分离变量后得

$$\frac{k}{m} dt = - \frac{dv}{v^2 + \frac{mg}{k}} \quad (20)$$

设小球从图 1 中原点(设为地面)处开始竖直上抛, 初速度为 v_0 , 则对式(20)两边积分得

$$\frac{k}{m} \int_0^t dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2 + \frac{mg}{k}} \quad (21)$$

经计算整理后, 可得小球上升时的速度 v 随时间 t 的变化函数为

$$v = v_0 \frac{1 - \sqrt{\frac{mg}{kv_0^2}} \tan \sqrt{\frac{kg}{m}} t}{1 + \sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}} \tan \sqrt{\frac{kg}{m}} t} \quad (22)$$

可见, 当 $v=0$ 即

$$t = \tau_{\text{上升}} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \arctan \sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}} \quad (23)$$

时刻, 小球上升到最高点。

对速度方程式(22)继续积分, 便得上升小球的运动学方程

$$\begin{aligned} y &= \int_0^t \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}} \tan \sqrt{\frac{kg}{m}} t}{1 + v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \tan \sqrt{\frac{kg}{m}} t} dt \\ &= \int_0^t \frac{v_0 \cos \sqrt{\frac{kg}{m}} t - \sqrt{\frac{mg}{k}} \sin \sqrt{\frac{kg}{m}} t}{\cos \sqrt{\frac{kg}{m}} t + v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \sin \sqrt{\frac{kg}{m}} t} dt \\ &= \frac{m}{k} \ln \left(\cos \sqrt{\frac{kg}{m}} t + v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \sin \sqrt{\frac{kg}{m}} t \right) \end{aligned} \quad (24)$$

将小球上升的时间式(23)代入式(24), 即得小球上升的最大高度

$$y_{\max} = \frac{m}{2k} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{mg} \right) \quad (25)$$

鉴于 $\arctan \sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}} < \sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}$, $\ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{mg} \right) < \frac{kv_0^2}{mg}$ 在 $k > 0$ 时始终成立, 于是从式(23)、(25)分别可得

$$\tau_{\text{上升}} < \frac{v_0}{g}, \quad y_{\max} < \frac{v_0^2}{2g}$$

同时易见, 当小球上抛的初速度 v_0 很小也即 $\frac{kv_0^2}{mg} \rightarrow 0$ 时, 有 $\tau_{\text{上升}} \rightarrow \frac{v_0}{g}$, $y_{\max} \rightarrow \frac{v_0^2}{2g}$, 小球的竖直上抛运动将渐趋理想的无空气阻力的竖直上抛运动。

3 通常材质、大小的实心小球的自由下落过程

参见图 1, 同样以向上为正方向, 则小球在空气中自由下落的动力学分量方程为

$$m \frac{dv}{dt} = kv^2 - mg \quad (26)$$

其中, 速度分量 $v < 0$, k 同上一节。现以 $t = \tau_{\text{上升}}$ 为计时起点, 对式(26)进行积分得

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{kv^2}{mg}} = -g \int_{\tau_{\text{上升}}}^t dt = -g(t - \tau_{\text{上升}}) \quad (27)$$

经计算整理可得

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \left(\frac{2}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}(t - \tau_{\text{上升}})}} - 1 \right) \\ &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \sqrt{\frac{kg}{m}} (t - \tau_{\text{上升}}) \end{aligned} \quad (28)$$

继续对速度方程式(28)进行积分, 便得小球下落时的运动学方程为

$$\begin{aligned} y - y_{\max} &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int_{\tau_{\text{上升}}}^t \tanh \sqrt{\frac{kg}{m}} (t - \tau_{\text{上升}}) dt \\ &= -\frac{m}{k} \ln \left[\cosh \sqrt{\frac{kg}{m}} (t - \tau_{\text{上升}}) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

将 $y=0$, $y_{\max}$ 即式(25)一并代入式(29), 即可解得小球自最高点落回地面所需要的时间

$$\tau_{\text{下落}} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \left(\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{mg}} + \sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}} \right) \quad (30)$$

再将式(30)代入式(28),则得小球落地时的速度为

$$v_{\text{落地}} = -\frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{mg}}} \quad (31)$$

从式(31)可见,落地速率 $|v_{\text{落地}}| < v_0$,这是显而易见的;当 $v_0 \rightarrow 0$ 时有 $v_{\text{落地}} \rightarrow -v_0$,也很容易理解(原理同上一节末);而当 $v_0 \gg \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (极限速度, k 为常量,轻质小球)时有 $v_{\text{落地}} \rightarrow -\sqrt{\frac{mg}{k}}$,也在预料之中。此外,若仅以 v_0 为变量,将式(23)、

(30)分别对关联变量 $\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}$ 求导,则得

$$\frac{d\tau_{\text{上升}}}{d\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \frac{1}{1 + \frac{kv_0^2}{mg}}$$

$$\frac{d\tau_{\text{下落}}}{d\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{mg}}}$$

于是可见

$$\frac{d\tau_{\text{上升}}}{d\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}} < \frac{d\tau_{\text{下落}}}{d\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg}}} < \sqrt{\frac{m}{kg}}$$

再结合 $v_0 \rightarrow 0$ 时有 $\tau_{\text{上升}} = \tau_{\text{下落}} \rightarrow 0$,便证得在 k 为常量的情况下,无论以多大的初速度 v_0 上抛,总有

$$\tau_{\text{上升}} < \tau_{\text{下落}} < \frac{v_0}{g}$$

成立,即空气中小球的上升时间总小于下落时间,而下落时间又总小于没有空气阻力时的上升或下落时间 v_0/g 。

4 进一步的分析

将标准状态下的空气密度 $\rho_{\text{空}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $C_D \approx 0.42$,以及 $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, $k = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{空}} \pi r^2$ 一起代入式(22)~(25),则得在国际单位制下,有

$$\frac{m}{k} \approx 4.92 \rho r \quad (32)$$

$$v = v_0 \frac{1 - \frac{\sqrt{48.2\rho r}}{v_0} \tan \sqrt{\frac{1.99}{\rho r}} t}{1 + \frac{v_0}{\sqrt{48.2\rho r}} \tan \sqrt{\frac{1.99}{\rho r}} t} \quad (33)$$

$$\tau_{\text{上升}} = \sqrt{0.502\rho r} \arctan \frac{v_0}{\sqrt{48.2\rho r}} \quad (34)$$

$$y = 4.92\rho r \ln \left(\cos \frac{t}{\sqrt{0.502\rho r}} + \frac{v_0}{\sqrt{48.2\rho r}} \sin \frac{t}{\sqrt{0.502\rho r}} \right) \quad (35)$$

$$y_{\text{max}} = 2.46\rho r \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{48.2\rho r} \right) \quad (36)$$

从式(33)~(36)可见,小球的上升运动同时依赖于初速度 v_0 、密度 ρ 和半径 r ;但是当 v_0 和 ρr 值均相同时,不同小球的上升运动恰恰完全相同!这就意味着初速度相同的大木球和小铁球可能具有同样的上升运动。此外,从数学上可以证明,在 ρ 和 v_0 均给定的情况下,式(34)中的 $\tau_{\text{上升}}$ 和式(36)中的 y_{max} 均与半径 r 正相关。这就意味着材质与初速度均相同的两实心大、小球,大球上升的高度要比小球高,上升的时间也比小球长。这一点从物理的角度并不难理解:空气的阻力是和横截面积 πr^2 成正比的,它对小球运动的影响理应更大。

对于下落过程,通过考察式(28)~(31)同样可以发现,当 ρr 值相同时,不同小球的下落运动方程完全相同;而当 v_0 和 ρr 值均相同时,不同小球的下落时间 $\tau_{\text{下落}}$ 和落地速度 $v_{\text{落地}}$ 也相同。结合上升过程,我们便可得如下结论:当 v_0 和 ρr 值均相同时,不同小球在空气中的整个竖直上抛运动完全相同。此外,同样可以证明,在 ρ 和 v_0 均给定的情况下, $\tau_{\text{下落}}$ 和 $|v_{\text{落地}}|$ 也与半径 r 正相关。结合上升过程,我们又可得如下结论:在 ρ 和 v_0 均给定的情况下,大球的上升高度更高,运动时间更长,落地速率也更大。换言之,若在空气中以相同的初速度上抛同质的实心球,小球会先落地。这与大、小球自空气中同一高度处自由下落的落地时间情况恰好相反!

5 小铁球在空气中做非高速竖直上抛运动的特征参量及运动方程曲线

现以小铁球为例。设小铁球的密度 $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,半径 $r = 0.01 \text{ m}$,则根据上文,可得小铁球在空气中做非高速竖直上抛运动的部分特征

参量和运动方程如下

$$\tau_{\text{上升}} = 6.30 \arctan \frac{v_0}{61.7} \quad (37)$$

$$\tau_{\text{下落}} = 6.30 \ln \left(\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{3808}} + \sqrt{\frac{v_0^2}{3808}} \right) \quad (38)$$

$$y_{\text{max}} = 194.3 \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{3808} \right) \quad (39)$$

$$v_{\text{落地}} = - \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{3808}}} \quad (40)$$

$$y_{\text{上}} = 388.7 \ln \left(\cos \frac{t}{6.30} + \frac{v_0}{61.7} \sin \frac{t}{6.30} \right) \quad (41)$$

$$y_{\text{下}} = y_{\text{max}} - 388.7 \ln [\cosh 0.1588(t - \tau_{\text{上升}})] \quad (42)$$

其中, $y_{\text{上}}$ 、 $y_{\text{下}}$ 分别表示小铁球上升、下落时的位置坐标, 或说位移。

根据式(37)~式(40)可作出诸特征参量随初速度 v_0 的变化曲线, 如图3~图5所示。图3中已作出小铁球上下运动的总时间 $\tau_{\text{总}}$ 、理想的无阻力竖直上抛运动总时间 $(\tau_{\text{总}})_{\text{无阻}}$ 随 v_0 的变化曲线作为参照。图4、图5中同样也作出了理想的无阻力情形作为对比。

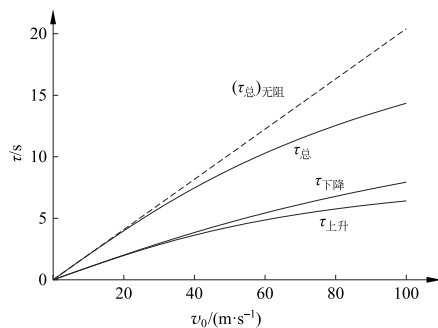


图3 小铁球的上升、下降时间及总时间随初速度的变化

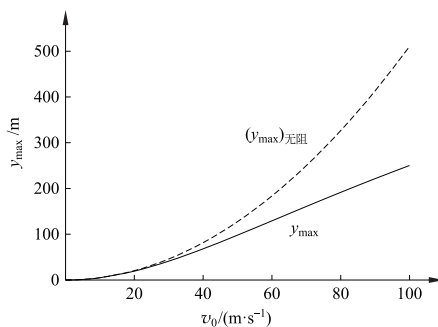


图4 小铁球上升的最大高度随初速度的变化

根据式(41)、式(42)并令 $v_0 = 20 \text{ m/s}, 40 \text{ m/s}, 60 \text{ m/s}, 80 \text{ m/s}, 100 \text{ m/s}$, 便可作出在这些初速度

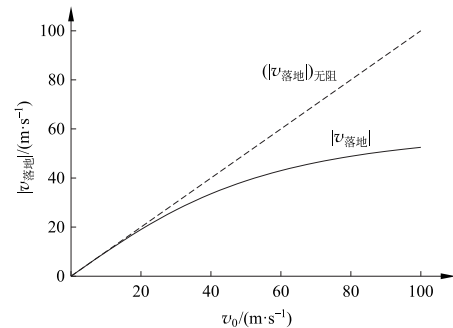


图5 小铁球的落地速率随初速度的变化

下, 小铁球在整个运动过程中的位移 y 随时间 t 的变化曲线(簇), 如图6所示。其中需要用到上文的 $\tau_{\text{上升}}$ 、 $\tau_{\text{下落}}$ 、 y_{max} 的具体数值, 参见式(37)~式(39)。

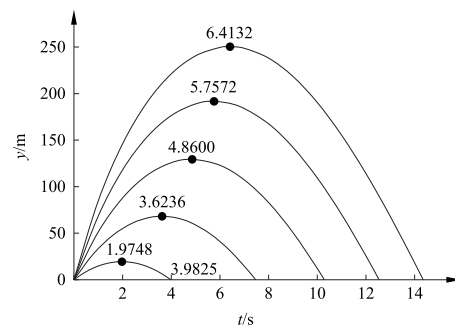


图6 20, 40, 60, 80, 100 m/s 初速上抛小铁球的运动方程曲线(簇)

从图3~图6中可见, 随着上抛初速度 v_0 的逐渐增大, 小铁球在空气中真实的竖直上抛运动越来越远离理想的无阻力模型, 并且落地速度 $v_{\text{落地}}$ (也即图6中曲线右端斜率) 也将渐趋于一个常量——极限速度 $-\sqrt{\frac{mg}{k}}$, 其值为 -61.7 m/s 。

当然, 要想 $v_{\text{落地}}$ 更加接近于 $-\sqrt{\frac{mg}{k}}$, 则需要更大的初速度 v_0 , 那将可能超过本文雷诺数所允许的非高速的初速度上限

$$v_{0\text{上限}} = \frac{\eta_{\text{空}} Re}{2\rho_{\text{空}} r} \bigg|_{Re=2 \times 10^5} = \frac{1.7 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^5}{2 \times 1.29 \times 0.01} \approx 132 \text{ (m/s)}$$

6 结语

本文首先证明了满足 $\rho r^3 \geq 1.623 \times 10^{-5} \text{ kg}$ 的通常材质、大小的实心小球, 只要初速度不太大——非高速, 即 $Re < 2 \times 10^5$, 则在其竖直上抛运动的过程中采用 $C_D = 0.42$ 近似来计算空气阻

力完全是适当的,所带来的误差应在 0.5% 以下,且 ρ 、 r 越大,误差越小。对于初速度 $v_0 (> v_{Re=10^3})$ 较大的竖直上抛运动,则更是如此。

通过逐步的推理,本文获得了通常材质、大小、初速度(非高速)的实心小球,在空气中竖直上抛的上升、下落阶段的速度方程式(22)、式(28),以及运动方程式(24)、式(29);进而推得小球上升的时间式(23)和最大高度式(25),以及小球下落的时间式(30)和落地速度式(31)。如此,小球完整的竖直上抛运动图像便得以呈现。对以上结果分析发现,当 v_0 和 ρr 值均相同时,不同小球在空气中的整个竖直上抛运动完全相同;而当 ρ 和 v_0 均给定时,大球的上升高度更高,运动时间更长,落地速率也更大。

作为举例,本文还作出了 1cm 半径的小铁球的诸运动特征参量随初速度 v_0 的变化曲线图 3~图 5,以及它在几个不同的初速度下小球的运动方程曲线图 6。理论分析和图示均表明,当小球的初速度越小也即空气阻力相对越小时,小球的竖直上抛运动越接近于理想的无空气阻力情形,反之则差距越大;其中小球的上升时间 $\tau_{\text{上升}}$ 总小于下落时间 $\tau_{\text{下落}}$,更小于无阻力情形下的上升或下落时间 v_0/g 。

需要说明的是,经演算,小球的 $\tau_{\text{上升}}$ 、 $\tau_{\text{下落}}$ 、 y_{max} 、 $v_{\text{落地}}$ 事实上均可以由其他微分关系式积分得到,本文的求法并非唯一。此外,从本质上讲,本文所研究的仍然是近似光滑实心小球的一种理想化的竖直上抛运动,它仍然属于模型化的研究,其中已经忽略了地球自转所产生的科里奥利力的影响,重力随高度变化的影响,上抛是否严格竖直向上,小球是否旋转,小球的表面是否光滑,水平风力的影响等实际上可能存在的干扰或误差因素。经过初步的分析后笔者发现,科里奥利力对于通常竖直上抛运动的影响很小;重力随高度变化的影响则更小;上抛稍微偏离竖直方向(5° 以内)所带来的误差大致在 0.5% 以内,其实不大^[9];小球是否旋转以及小球的表面是否光滑,则对于竖直上抛运动的影响较大,其中一般而言,因旋转所带来的侧向马格努斯力要明显地小于空气阻力^[13],而在一定程度的范围内,小球表面的粗糙程度越高,空气阻力及马格努斯力便会越小;不难分析,一般的水平风力不仅会导致竖直方向上的空气阻力明显地增加,还会在水平方向上产生一个可观的“吹力”作用,因此它对于小球竖直上抛运动的影响还是很大的,只有当水平风力很小且球重、球

速较大时,水平风的影响才能忽略不计。

参 考 文 献

- [1] 朱照宣. 理论力学(上)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1982: 258, 348.
- [2] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 79.
- [3] 张汉壮, 王文全. 力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2015: 62.
- [4] 肖士珣. 理论力学简明教程[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1983: 41-43.
- [5] 陈泽君, 程敏熙. 基于 tracker 和 python 的物理建模方法——以研究抛体运动的阻力变化为例[J]. 大学物理实验, 2015, 28(3): 84-87.
CHEN Z J, CHENG M X. The physical modeling method basing tracker and python software——Researching the changing of resistance in projectile motion[J]. Physical Experiment of College, 2015, 28(3): 84-87. (in Chinese)
- [6] 刘正安. 有阻力竖直上抛的运动时间分析[J]. 物理教师, 2012, 33(12): 23-24.
LIU Z A. Analysis of time of vertical upward throwing motion with resistance[J]. Physics Teacher, 2012, 33(12): 23-24. (in Chinese)
- [7] 郝成红. 考虑空气阻力的抛体射程[J]. 大学物理, 2008, 27(12): 21-22.
HAO C H. The range of projectile with air friction[J]. College Physics, 2008, 27(12): 21-22. (in Chinese)
- [8] 王平, 韩振兴, 朱墨炯, 等, 译. 流体力学大全[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1991: 229.
- [9] 易小爱, 凌晓菲, 张振美, 等. 空气阻力与速度平方成正比的抛体运动研究[J]. 大学物理实验, 2020, 33(3): 57-60.
YI X A, LING X F, ZHANG Z M, et al. Research on projectile motion with air resistance proportional to the square of velocity[J]. Physical Experiment of College, 2020, 33(3): 57-60. (in Chinese)
- [10] 郭雪鹏. 考虑空气阻力与速度平方成正比的斜抛运动[J]. 物理通报, 2017(6): 63-66.
GUO X P. The oblique projectile motion considering the air resistance being proportional to the velocity square[J]. Physics Bulletin, 2017(6): 63-66. (in Chinese)
- [11] 邵云. 单摆周期的系统误差分析[J]. 大学物理, 2022, 41(1): 32-38.
SHAO Y. Systematic error analysis of period of simple pendulum[J]. College Physics, 2022, 41(1): 32-38. (in Chinese)
- [12] 漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程·力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 402.
- [13] 严艺, 张夏. 乒乓球运动中弧圈球的定量探究及其应用[J]. 力学与实践, 2011, 33(2): 75-79.
YAN Y, ZHANG X. The quantitative study of the loop arc of table tennis ball and its application[J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(2): 75-79. (in Chinese)