

碗中小球问题探讨

赵德刚 卢星宇 宋泽良

(华中科技大学物理学院, 湖北 武汉 430074)

摘要 在大学物理的教学过程中, 笔者遇到一道关于小球在光滑半球形碗内运动的问题, 该问题的常规解法是利用角动量分量守恒和机械能守恒进行求解。这种解法由于无法给出小球运动的细节, 对于初次接触角动量概念的本科生而言难以直观而深刻地理解。本文将小球的运动在水平面内和竖直方向进行分解, 系统分析了小球的受力情况、速度的变化、能量的转化等问题, 并通过数值求解拉格朗日方程给出了小球的运动轨迹。我们的方法详尽地阐述了小球的运动过程, 展示了一个更加直观和清晰的物理图像。

关键词 角动量守恒, 机械能守恒, 拉格朗日方程

DISCUSSION ON THE BALL IN THE BOWL

ZHAO Degang LU Xingyu SONG Zeliang

(School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074)

Abstract In the teaching of College Physics, authors encounter a problem about a small ball moving in a smooth hemispherical bowl. The conventional solution is to use the conservation of one component of angular momentum as well as the conservation of mechanical energy. However, this method can't demonstrate the details about movement of the small ball. For the freshmen who study the angular momentum for the first time, they can't understand this method intuitively and deeply. In this paper, the motion of small ball is decomposed in the horizontal plane and the vertical direction, and the force on the small ball, the change of velocity, the transformation of energy and other problems are systematically analyzed. In addition, the motion trajectory of the small ball is given by numerically solving the Lagrange equations. In this method, the small ball's moving process is demonstrated in detail, which offers a more intuitive and clearer physical vision.

Key words conservation of angular momentum; conservation of mechanical energy; Lagrange equations

在很多大学物理的教材中^[1,2], 会看到这样一道习题: 如图 1 所示, 将一质量为 m 的小球 (可视 为质点) 沿半径为 r 的光滑半球形碗内表面水平 投射, 碗保持静止。设 v_0 是小球恰好能到达碗口 所需要的初速率, 试求 v_0 作为 θ_0 的函数, θ_0 是用 角度表示的小球的初始位置。

在一般的大学物理教科书中, 该题的常规解

法是利用小球的机械能守恒以及角动量在 z 方向 上的分量守恒进行求解: 首先, 小球只受到重力 mg 和支撑力 N 的作用, 支撑力不做功, 机械能守 恒。其次, 任意时刻的重力和支撑力都在过 z 轴 的平面内 [图 1(b)], 其相对于 O 点的力矩 $\mathbf{r} \times (mg + \mathbf{N})$ 始终与 z 轴垂直, 无 z 方向上的分量, 由角动量定理可知小球在 z 方向上的角动量分量

收稿日期: 2022-04-02

基金项目: 国家自然科学基金(11874168)。

作者简介: 赵德刚, 男, 副教授, 主要从事物理教学科研工作, 研究方向为声学人工材料, dgzhao@hust.edu.cn。

引文格式: 赵德刚, 卢星宇, 宋泽良. 碗中 小球问题探讨[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 132-134, 141.

Cite this article: ZHAO D G, LU X Y, SONG Z L. Discussion on the ball in the bowl[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 132-134, 141. (in Chinese)

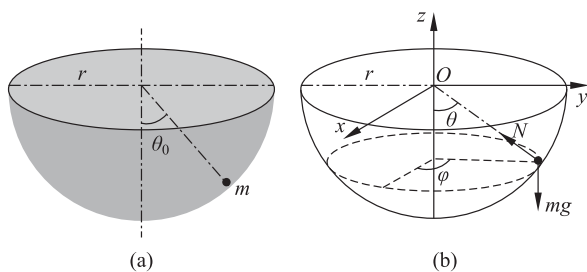


图1 碗中 小球运动模型

(a) 示意图; (b) 受力分析

守恒。设小球到达碗口时的速率为 v , 速度方向位于水平面内 (恰好到达碗口, 竖直方向分量为 0), 以碗口作为重力势能的零势面, 于是可以列出以下两个守恒方程。

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgr\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

角动量的 z 分量守恒

$$r\sin\theta_0 \cdot mv_0 = r \cdot mv \quad (2)$$

联立式(1)和式(2)消去 v , 解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}} \quad (3)$$

利用守恒定律求解该题的优点是不需要关注小球运动的具体细节, 只需要考察初末两个状态即可。笔者在课堂教学的时候, 很多学生都对该习题提出了许多疑问, 一方面是对角动量分量守恒不理解, 另一方面是对小球的运动细节不清楚。为了清晰地还原小球运动的物理图像, 笔者将学生们的问題进行了汇总, 并依次进行系统地分析。

问题一: 小球为什么会向上运动?

我们将小球的运动沿水平面内 (x - y 平面) 和竖直方向 (z 方向) 分解, 分别进行研究。首先考察竖直方向上的运动。小球在初始时刻以速率 v_0 水平抛出, 此时刻小球在水平面内作圆周运动, 支撑力在水平面内的分量提供向心力: $N_{//} = N\sin\theta_0 = \frac{mv_0^2}{r\sin\theta_0}$ 。当速率 v_0 足够大时, N 就足够大, 支撑力在竖直方向上的分量 $N_{\perp} = N\cos\theta_0$ 就可大于重力 mg , 小球便会在竖直方向上作向上的加速运动。而随着小球的向上运动, 小球的速率会逐渐变小 (重力做负功), 同时支撑力与 z 轴的夹角逐渐变大, 于是支撑力在竖直方向上的分量会逐渐

变小, 当其小于重力时, 小球在竖直方向上开始减速, 到最终状态时, 竖直方向上的速率减为 0 (恰好到达碗口)。所以在竖直方向上, 小球是一个变加速度的运动过程, 先加速后减速, 初态和末态的速度在 z 方向上的分量均为 0。

问题二: 小球在末态的时候速度为什么不是 0?

这道题目在未讲解之前, 大部分同学都会认为恰好到达碗口的意思是小球的水平速率和竖直速率均为 0 (这是一个可以存在的状态, 小球恰好与碗壁分离, 支撑力为 0), 于是依据机械能守恒列出方程

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgr\cos\theta_0 = 0 \quad (4)$$

解出答案

$$v_0 = \sqrt{2gr\cos\theta_0} \quad (5)$$

这显然是一个错误的答案! 很多同学不明白为什么这种解法不对, 也不明白为什么小球恰好到达碗口时, 仍然具有水平方向上的速度。守恒定律不关注运动细节, 这也是使用角动量分量守恒的方法所无法给出的信息。

下面我们分析一下小球在水平投影面上的运动状态。如图 2 所示, 小球在运动过程中, 在水平面内所受的力大小为 $N_{//} = N\sin\theta$, 方向始终指向 z 轴, 在水平面上做了投影以后, $N_{//}$ 会始终指向 z 轴在水平面内的投影, 也就是 O 点。它就构成了一个典型的有心力系统, 显然小球在水平面内的投影运动满足对力心的角动量守恒, 而且在始末状态小球的速度方向都是在水平面内, 对力心的位矢 (其大小是小球到 z 轴的垂直距离) 与速度的方向垂直 (这里要注意的是在其他状态, 位矢与速度是不垂直的), 很容易就可以针对始末状态写出角动量守恒的表达式, 即为式(2)。根据质点在有心力作用下的运动规律可知, 在碗口处, 小球的水平速度不可能为 0, 除非此时小球到力心的距离为无穷大或者初始角度 $\theta_0 = 0$, 这两种情况都没有意义。所以小球到达碗口速度恰好为 0 的状态是不

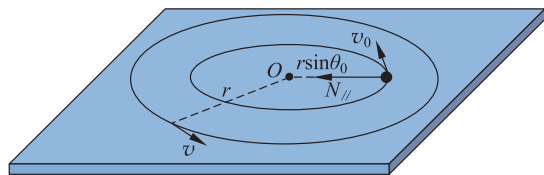


图2 小球运动在水平面内的投影

可能出现的。角动量在 z 方向上的分量守恒对很多初学者来说陌生且难以理解,但是从投影运动的角度来考虑,问题就变成了一个简单且易于理解的有心力系统,对学生把握问题的本质大有帮助。

问题三:整个过程只有竖直方向的重力在做功,为什么最终改变的是水平方向的速度?

一般的质点运动中,什么方向上的力做功,就会改变速度在这个方向上的分量大小,比如抛物线运动,重力在竖直方向上做功,质点在竖直方向上的速度分量会发生变化,而水平方向的速度分量保持不变。而对于本题而言,情况正好相反,整个过程只有竖直方向上的重力做负功,始末状态的速度在竖直方向上的分量为 0,没有变化,而水平方向上的速度分量变小。为什么会发生这种情况?我们仍然可以在竖直方向和水平面内分别研究做功情况。

竖直方向上,始末状态的速度均为 0,根据动能定理,此方向上合外力做功为 0,于是有

$$A_{mg} + A_{N_{\perp}} = 0 \quad (6)$$

即重力做的负功和支撑力在竖直方向上的分量做的正功数值相等,完全抵消。

而在水平面的投影内,小球从半径为 $r \sin \theta_0$ 运动到半径为 r 的过程中,具有径向向外的位移分量,而水平面内的有心力 $N_{\parallel}$ 方向是径向向内的,所以支撑力的水平分量 $N_{\parallel}$ 做负功,而由于总的支撑力不做功,所以

$$A_{N_{\parallel}} + A_{N_{\perp}} = 0 \quad (7)$$

联立式(6)和(7)可以得到

$$A_{mg} = A_{N_{\parallel}} \quad (8)$$

式(8)说明重力做的功与支撑力水平分量做的功相等,可以理解为过程中重力做功的效果完全转化为支撑力水平分量做功的效果,而支撑力水平分量做的功改变的是小球在水平面内的速度分量,所以从整个过程来看,就体现为竖直方向上的重力做功,转变为水平方向上速率的变化。这个结论也很好体现了功这个物理量的标量性:做功不具备方向性,某一方向上的力所做的功,完全可以转化为与之正交方向上动能(即速率)的变化。

问题四:小球到达碗口后会以什么样的方式继续运动?小球的运动轨迹是什么样的?

该问题中整个体系是一个保守系统,满足时间反演对称,小球到达碗口后应该会继续运动返

回到初始水平面,然后继续在初始水平面和碗口之间作周期性的往返运动。为了更直观地反映小球的运动模式,我们对小球的运动方程进行求解。小球的运动局限在半球形碗的内表面,是一个几何约束体系,且是一个保守的力学系统,采用分析力学的方法比较易于得到运动方程。如图 1(b)所示,小球在碗内的运动满足如下的约束方程

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = -r \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

取 θ 角和 φ 角作为广义坐标,有

$$\begin{cases} \dot{x} = r \cos \theta \cos \varphi \cdot \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = r \cos \theta \sin \varphi \cdot \dot{\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{z} = r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases} \quad (10)$$

据此可写出质点的拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mg(-r \cos \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

代入到拉格朗日方程中即可得到描述质点运动的微分方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \sin \theta = 0 \\ \sin^2 \theta \cdot \ddot{\varphi} + \sin 2\theta \cdot \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

该微分方程的初始条件为

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{2gr}{\cos \theta_0}} \frac{1}{r \sin \theta_0} \end{cases} \quad (13)$$

我们采用 Comsol Multiphysics 仿真软件对方程(12)进行数值求解,不失一般性,初始条件中的参数选择为 $\theta_0 = \pi/3$, $\varphi_0 = 0$, $g/r = 1$ 。求解出的小球运动轨迹如图 3 所示,小球会以螺旋形轨道向上运动到达碗口,随后以螺旋形轨道向下运动到达初始水平面(并不一定会回到初始的出发点),之后小球会沿着相同函数关系的空间曲线(因为出发点不同,所以曲线不会重合)在初始水平面内和碗口水平面内作周期性的往返运动。

(下转第 141 页)

- and Supercritical CO₂[J]. Journal of Chemical and Engineering Data; the ACS Journal for Data, 2005, 50(2): 299-308.
- [2] GUY B, SALAZAR L, MILLER A. Achieving Low Interfacial Tension with Industrial Available Surfactants[C]// SPE EOR Conference at Oil and Gas West Asia. OnePetro, 2012.
- [3] DU NOUY P L. A new apparatus for measuring surface tension[J]. The Journal of general physiology, 1919, 1(5): 521-524.
- [4] 胡炜. 轴对称悬滴法表面张力实验系统研制及二甲基亚砜/甲醇混合物表面张力实验研究[D]. 太原:太原理工大学, 2015.
- [5] 刘逸飞, 王瑾, 李文华, 等. 基于对轴对称液桥边缘轮廓拟合的液体表面张力系数测量研究[J]. 大学物理, 2019, 38(3): 54-56+69.
- LIU Y F, WANG J, LI W H, et al. Liquid surface tension coefficient measurement based on the profile fitting of axisymmetric liquid bridge[J]. College Physics, 2019, 38(3): 54-56+69. (in Chinese)
- [6] 刘子臣. 大学基础物理实验(力学、热学及分子物理分册)[M]. 2版. 天津:南开大学出版社, 2005:195-200.
- [7] 吕洪方, 石文星. 大学物理实验[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2019:107-111.
- [8] TATE T. XXX. On the magnitude of a drop of liquid formed under different circumstances[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1864, 27(181): 176-180.
- [9] HARKINS W D, BROWN F E. The determination of surface tension (free surface energy), and the weight of falling drops: The surface tension of water and benzene by the capillary height method[J]. Journal of the American Chemical Society, 1919, 41(4): 499-524.
- [10] LEE B B, RAVINDRA P, CHAN E S. A critical review: surface and interfacial tension measurement by the drop weight method[J]. Chemical Engineering Communications, 2008, 195(8): 889-924.
- [11] 崔国文. 表面与界面[M]. 北京:清华大学出版社, 1990:3-28.
- [12] 艾芳洋, 毕胜山, 吴江涛. 全轮廓拟合悬滴法表面张力实验系统[J]. 物理实验, 2015, 35(5): 1-6.
- AI F Y, BI S S, WU J T. Surface tension experiment system with full-profile fitting pendant drop method[J]. Physics Experimentation, 2015, 35(05): 1-6. (in Chinese)
- [13] ANDREAS J M, HAUSER E A, TUCKER W B. Boundary tension by pendant drops1[J]. The Journal of Physical Chemistry, 2002, 42(8): 1001-1019.
- [14] BIDWELL R M, DURAN JR J L, HUBBARD G L. Tables for the determination of the surface tensions of liquid metals by the pendant drop method[R]. Los Alamos Scientific Lab., Univ. of California, N. Mex., 1963.
- [15] 刘子臣. 大学基础物理实验(力学、热学及分子物理分册)[M]. 2版. 天津:南开大学出版社, 2005:245.
- [16] International Association for the Properties of Water and Steam (June 2014). "http://www.iapws.org/relguide/Surf-H2O.html".
- [17] MILLER R, SCHANO K H, HOFMANN A. Hydrodynamic effects in measurements with the drop volume technique at small drop times 1. Surface tensions of pure liquids and mixtures[J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 1994, 92(3): 189-196.
- [18] BERRY J D, NEESON M J, DAGASTINE R R, et al. Measurement of surface and interfacial tension using pendant drop tensiometry[J]. Journal of Colloid and Interface Science, 2015, 454: 226-237.

(上接第 134 页)

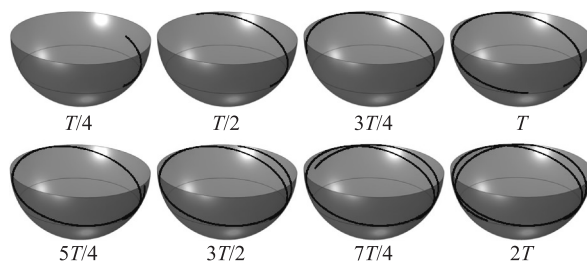


图3 两个周期内小球的运动轨迹

本文所涉及的题目对初次接触角动量的大学本科生来说是一道比较困难的习题,题目并不是传统的质点角动量守恒问题,而是角动量的分量

守恒,对初学者来说很难理解。而且利用守恒定律解题只需要考虑始末状态,不考虑运动过程的细节,使得学生对小球的运动状态很难有感性的认识。本文从小球的受力情况、速度变化、能量转化等方面进行了详细的分析和讨论,并给出了小球的实际运动轨迹,直观地展示小球的运动状态,可以帮助学生更深刻地理解本问题的物理本质。

参 考 文 献

- [1] 项林川,朱佑新,王章金. 大学物理[M]. 北京:高等教育出版社, 2021.
- [2] 黄树森. 大学物理 440 典型题[M]. 北京:中国建材工业出版社, 2002.