

用基础物理知识诠释前沿科技 ——从斯特恩-盖拉赫实验到量子弱测量

吴春旺 张 杰 吴 伟 张 婷

(国防科技大学理学院量子信息研究所, 湖南 长沙 410073)

摘 要 利用量子弱测量技术, 可使很弱的相互作用引起显著的观测效应, 在观测极弱物理效应、量子参量估计、量子态层析等方面发挥重要作用, 已成为当前量子测量领域的研究热点。本文以斯特恩-盖拉赫(Stern-Gerlach)实验为切入点, 利用大学物理范畴的量子力学知识阐释了量子弱测量的物理图像, 并进一步介绍了该领域的前沿进展。本文有助于加深物理教师对量子弱测量这一前沿问题的理解, 帮助学生建立清晰的物理图像。在教学过程中引入前沿科技, 也有助于激发学生主动探索和进一步研究的兴趣和热情。本文旨在基础物理原理和高新尖技术之间搭建桥梁, 有益于大学物理教学拓宽思路、提升品位。

关键词 量子弱测量; 斯特恩-盖拉赫实验; 量子测量

EXPLAINING FRONTIER TECHNOLOGY WITH BASIC PHYSICS KNOWLEDGE —FROM STERN-GERLACH EXPERIMENT TO QUANTUM WEAK MEASUREMENT

WU Chunwang ZHANG Jie WU Wei ZHANG Ting

(Department of Physics, College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073)

Abstract Using quantum weak measurement technology, the very weak interaction can cause significant observation effects. It plays important roles in observing the extreme weak physical effect, quantum parameter estimation, quantum state tomography and so on. It has become a research hotspot in the field of quantum measurement. Based on the Stern-Gerlach experiment as the starting point, this paper explains the physical image of quantum weak measurement by using the knowledge of elementary quantum mechanics, and further introduces the frontier development of related fields. This paper can deepen physics teachers' understanding of quantum

收稿日期: 2021-10-20; 修回日期: 2021-11-04

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFA0301903)和国家自然科学基金(12004430; 11904402; 61632021; 12174447; 12174448)。

作者简介: 吴春旺, 男, 副教授, 从事量子计算相关的教学及科研工作, cwwu@nudt.edu.cn; 吴伟, 男, 副教授, 从事基于囚禁离子的量子模拟和量子计算研究, weiwu@nudt.edu.cn; 张杰, 男, 讲师, 从事囚禁离子量子操控的实验研究, zj1589233@126.com。

通讯作者: 张婷, 女, 副教授, 长期从事大学物理教学及囚禁离子量子计算科研工作, 在本科生基础课教学改革及创新能力培养方面有过多探索, tingzhang@nudt.edu.cn。

引文格式: 吴春旺, 张杰, 吴伟, 等. 用基础物理知识诠释前沿科技——从斯特恩-盖拉赫实验到量子弱测量[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 121-126.

Cite this article: WU C W, ZHANG J, WU W, et al. Explaining frontier technology with basic physics knowledge—From Stern-Gerlach experiment to quantum weak measurement[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 121-126. (in Chinese)

weak measurement, which is a frontier physical problem, and also help students to establish a clear physical image. The introduction of cutting-edge technology in the teaching process also helps to stimulate students' interest and enthusiasm for active exploration and further research. This paper aims to build a bridge between basic physics principles and high-tech, which is beneficial for college physics teachers to broaden scientific thoughts and enhance academic taste.

Key words quantum weak measurement; Stern-Gerlach experiment; quantum measurement

量子测量不仅是量子力学的基本问题,而且在量子操控和量子精密测量领域中占有重要的地位^[1]。理论上,测量是作为一条基本公设被引入量子力学框架的:当对量子系统进行某一力学量的量子测量时,会瞬时坍缩到该力学量的本征态之一,单次测量读数为本征值之一,多次测量可得到该力学量的均值。1932年,著名物理学家冯·诺伊曼(Von Neumann)在他的著作《量子力学的数学基础》中给出了描述量子测量的一个唯象模型:量子测量对应被测系统状态与测量仪器状态之间的某种相互作用过程(此模型并不能解释量子坍缩现象)^[2]。1988年,以色列物理学家阿哈罗诺夫(Yakir Aharonov)等人基于冯·诺伊曼测量模型,提出了弱值放大效应和量子弱测量的概念^[3]。近年来,随着量子体系操控技术的进步,量子测量的实验研究取得了显著进展。量子弱测量由于能够在被测系统和测量仪器相互作用很弱的情况下得到具有较大读数的测量数值,获得显著的放大效果,因此逐渐成为量子测量领域的研究热点,已被广泛应用于多种物理体系中的极小参数量子放大测量、量子态波函数层析和量子力学佯谬实验验证等领域^[4,5]。本文以在物理学史上有重要地位的斯特恩-盖拉赫实验为切入点,简洁、清晰地阐述量子弱测量的基本物理图像,并简要介绍其在应用方面的发展。

1 量子测量的冯·诺伊曼模型

量子力学建立在若干公设之上。在哥本哈根诠释下,量子测量公设叙述如下:设物理力学量 F 对应的线性厄米算符为 $\hat{F}$, $\{|\psi_n\rangle\}$ 为 $\hat{F}$ 的正交、归一、完备本征基矢,即 $\hat{F}|\psi_n\rangle = F_n|\psi_n\rangle$, F_n 为相应本征值。对于量子态 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$,若我们

测量物理量 F ,得到的结果必定是其本征值之一。至于得到哪个本征值则是随机的,特别地,得到本征值 F_n 的概率为 $|c_n|^2$ 。进一步,若测得 F_n ,则系统在测量后的状态为对应的本征态 $|\psi_n\rangle$ 。这一公设表明,量子测量使量子态发生“瞬时”变化,从初始的相干叠加状态“坍缩”到某一个本征态。可以看出,哥本哈根诠释回避了对量子测量具体过程的阐述,对量子测量坍缩的物理机制也没有提供解释。

1932年,冯·诺伊曼通过量子化的测量仪器模型,为量子测量过程提供了一个唯象描述。在他的模型中,量子测量被看成是被测系统和测量仪器的相互作用过程。在初始时刻,假设被测系统状态为 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$,仪器状态为 $|\phi\rangle$,它们所组成的复合量子系统状态为 $(\sum_n c_n |\psi_n\rangle) \otimes |\phi\rangle$ 。若被测系统和仪器的相互作用过程 $\hat{U}$ 满足

$$\hat{U}(\sum_n c_n |\psi_n\rangle) \otimes |\phi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |\phi_n\rangle \quad (1)$$

其中, $|\phi_n\rangle$ 可区分(即:当 $n_1 \neq n_2$ 时, $\langle \phi_{n_1} | \phi_{n_2} \rangle = 0$),那么 $\hat{U}$ 就可以看作是一个量子测量过程。在冯·诺伊曼模型中,测量被看作是可区分的仪器状态对被测系统本征态的标记,标记完成后此复合系统处于相干叠加状态。冯·诺伊曼的描述并没有解决量子测量坍缩的问题,后续的一些研究者猜测“量子坍缩”可能是来源于环境引起的消相干^[6]或引力引起的随机坍缩^[7]。

2 从测量角度看斯特恩-盖拉赫实验

1922年,德国物理学家斯特恩和盖拉赫做了一个永载物理史册的实验(图1)。由电炉蒸发出射的银原子束,经过一个抽成真空的 z 方向梯度

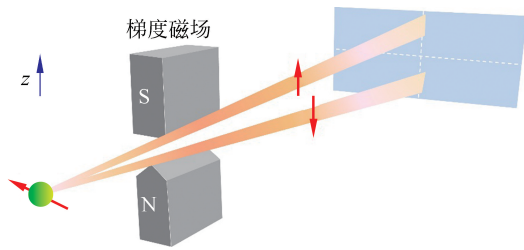


图1 斯特恩-盖拉赫实验

磁场区域,最后到达照相底片上。显像后底片上出现了两条分立的黑带,这表示银原子具有空间量子化的磁矩,这个磁矩的 z 分量只有正负两个值。这并不是轨道角动量,而是另一个内禀自由度,即自旋。通过磁场时,分裂的两束原子分别对应自旋向上(为 $|\uparrow\rangle$)和自旋向下(记为 $|\downarrow\rangle$)两种状态。由于首次在实验上证实了原子磁矩空间取向的量子化,斯特恩获得了1943年的诺贝尔物理学奖。

从测量角度看,斯特恩-盖拉赫实验装置是对原子自旋在 z 方向的投影测量。高温蒸发产生的银原子磁矩方向随机分布,按照经典物理,照相底片上的条纹在 z 方向应该是连续分布的。但是,实验结果却是分立的两条黑带。这个结果就体现了量子测量“坍缩”。任意一个银原子在 z 方向的自旋状态总可以写成 $|\psi\rangle = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle$,其中, $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ 构成了一组完备的正交基矢,复常数系数 $c_{\uparrow}$ 和 $c_{\downarrow}$ 满足 $|c_{\uparrow}|^2 + |c_{\downarrow}|^2 = 1$ 。按照现有量子测量理论,不论 $c_{\uparrow}$ 和 $c_{\downarrow}$ 取何值,银原子磁矩在 z 方向投影的测量结果只可能是 $|\uparrow\rangle$ 或 $|\downarrow\rangle$ 。因此,虽然初始磁矩方向随机,但在底片上只会有两条分立的黑带。

套用冯·诺伊曼测量模型,被测系统自由度是原子的自旋,而测量仪器自由度则是原子的位置。银原子内禀自旋自由度和位置自由度组成一个复合量子系统。根据不确定性原理,原子的动量和位置不能同时准确确定。由于出射原子束的动量并非完全不确定,因此原子的位置就不是完全确定的,位置自由度必须由具有一定大小的波包来描述。设初始时原子的位置波包为 $|\phi(z)\rangle$,则此复合系统的状态为 $(c_{\uparrow}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle) \otimes |\phi(z)\rangle$ 。梯度磁场提供了自旋自由度(被测系统)和位置自由度(测量仪器)之间的耦合,此相互作用使得复合系统状态演化为

$$c_{\uparrow}|\uparrow\rangle \otimes |\phi(z-g)\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle \otimes |\phi(z+g)\rangle \quad (2)$$

其中, g 是原子在 z 方向波包移动的大小,并且 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 对应的波包移动方向相反。银原子落在照相底片上的过程就是该复合系统量子叠加态的“测量坍缩”。

3 量子弱测量的物理诠释

1988年,阿哈罗诺夫等人基于极端参数条件下斯特恩-盖拉赫装置的思想实验,提出了量子弱测量和弱值放大效应的概念^[3]。当斯特恩-盖拉赫实验装置中梯度磁场的强度降到几乎为零,使得原子位置波包的分开程度远小于波包本身的宽度时,对应 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 的波包不能完全分开。此时不能通过原子落在屏幕上的位置确定自旋状态。从测量的观点来看,这个过程没有带来原子自旋在竖直方向投影的“量子坍缩”。阿哈罗诺夫等人把这种测量方式称为弱测量(图2)。

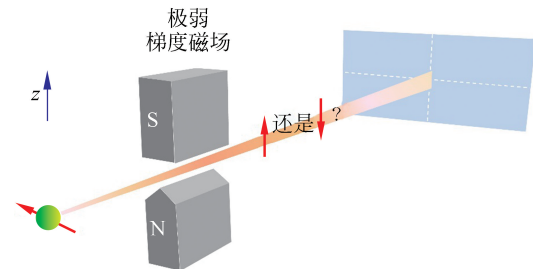


图2 极弱梯度磁场时的斯特恩-盖拉赫实验

有趣的是,他们在理论上预测了一个非常反直觉的物理现象。假设出发时原子自旋近似朝 $-x$ 方向,在 z 方向极弱梯度磁场后面再设置一个 x 方向的强梯度磁场。那么,绝大多数原子会飞向接收屏的 $-x$ 方向,极少数会飞向 $+x$ 方向。神奇的是,飞向 $+x$ 方向的原子在 z 方向可能会发生比较大的偏移(图3)。乍看这非常奇怪,因为 z 方向只有极弱的磁场,它带来的自旋和位置自由度之间的弱耦合被明显放大了,这就是所谓的弱值放大效应 WVA(weak value amplification)。

弱值放大效应显然与 x 方向强梯度磁场的加入紧密相关,这可以用量子干涉加以解释。银原子经过 z 方向的极弱梯度磁场后,量子复合系统状态为

$$|\Psi\rangle_{\text{total}} = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle \otimes |\phi(z-g)\rangle +$$

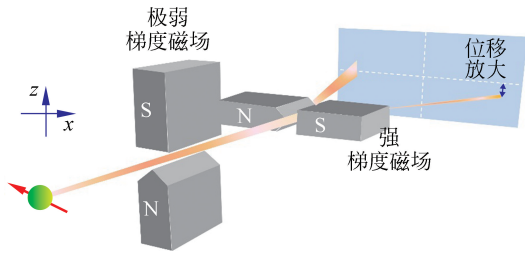


图3 带后选择的斯特恩-盖拉赫实验

$$c_{\downarrow} |\downarrow\rangle \otimes |\phi(z+g)\rangle \quad (3)$$

其中, g 远小于波包 $|\phi(z)\rangle$ 的宽度, 因此 $|\phi(z-g)\rangle$ 和 $|\phi(z+g)\rangle$ 很大一部分是重叠的。再经过 x 方向的强梯度磁场后, 如果只看屏幕的 $+x$ 一侧, 就相当于对原子自旋进行了一次后选择。理论上 $\pm x$ 方向的自旋态可以分别描述为 $|\phi\rangle_{\pm x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ 。由于出发时原子自旋近似朝 $-x$ 方向, 因此有 $c_{\uparrow} \approx -c_{\downarrow}$ 。于是在对自旋执行后选择后, 银原子的位置波包可以描述为

$$\begin{aligned} |\phi(z)\rangle_{\text{final}} &= {}_{+x}\langle\varphi|\Psi\rangle_{\text{total}} \\ &\cong \frac{c_{\uparrow}}{\sqrt{2}}(|\phi(z-g)\rangle - |\phi(z+g)\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

这里, 式(4)中未进行归一化处理。可以看出, 两个几乎重叠的位置波包 $|\phi(z-g)\rangle$ 和 $|\phi(z+g)\rangle$ 在 z 方向的中心位置附近恰好干涉相消。但同时, 在其他某些特定位置就可能干涉相长, 于是 z 方向很小的劈裂最终在接收屏上显示可观的位移。

下面举例说明。设初始时原子位置具有高斯形状的波包

$$\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \quad (5)$$

其不确定度大小为 1; 初始时内禀自旋近似朝 $-x$ 方向, 不妨设为 $\frac{1}{\sqrt{1.81}}(|\uparrow\rangle - 0.9|\downarrow\rangle)$ 。 z 方向

弱梯度磁场引起的原子位置波包劈裂远小于波包不确定度, 不妨取 $g=0.1$ 。根据式(4), x 方向强梯度磁场对自旋后选择后, 筛选出 $+x$ 方向自旋的位置波包为

$$\begin{aligned} |\phi(z)\rangle_{\text{final}} &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 1.81}}(|\phi(z-0.1)\rangle - 0.9|\phi(z+0.1)\rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

图4中, 我们比较了 $|\langle\phi(z-0.1)|\phi(z-0.1)\rangle|^2$ 、 $|\langle\phi(z+0.1)|\phi(z+0.1)\rangle|^2$ 、 $|\langle\phi(z)|\phi(z)\rangle_{\text{final}}|^2$, 其中 $|\phi(z)\rangle_{\text{final}}$ 已经进行了归一化处理。可以发现, 由于波包之间的量子干涉, 后选择出的自旋在 z 方向产生的平均偏移大小近似为 1, 远大于弱磁场引起的劈裂 $g=0.1$, 发生显著的弱值放大效应。

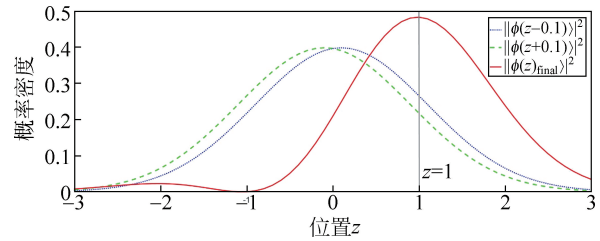


图4 波包量子干涉引起的弱值放大效应

要实现阿哈罗诺夫等人的思想实验, 需要高精度的原子物质波干涉技术, 难度很大。但近十几年来, 利用光波的干涉特性, 研究人员首先在经典光学体系中实现了弱测量与弱值放大效应, 并被应用于光的自旋霍尔效应的研究^[8]、超高灵敏度光学偏转角的测量^[9]、单光子非线性效应的放大测量^[10]、光子量子态波函数“直接”测量^[11]、基于光学系统的量子力学互补原理验证^[12]、利用弱测量来对抗光子退相干^[13]等。下面以光的自旋霍尔效应为例, 简要介绍弱测量方法在观测极弱物理效应方面的效力。光子具有自旋自由度, 其本征态有两个: 自旋平行于中心波矢(对应右旋圆偏振光)和自旋反平行于中心波矢(对应左旋圆偏振光)。如图5所示, 一束线偏振光在不同介质的界面发生折射时, 自旋角动量相反(左、右旋圆偏振)的光子在垂直于入射面 $x-z$ 平面的 y 方向会发生微小的相对横向平移, 造成光束的自旋分裂, 这种现象叫做光的自旋霍尔效应(Spin Hall Effect of Light, SHEL)^[14]。它是由光子的自旋-轨道耦合作用在折射率变化情况下引起的。

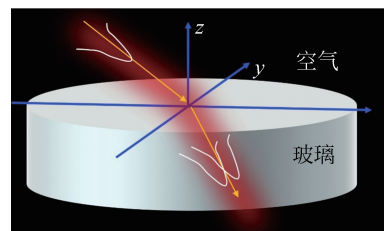


图5 光的自旋霍尔效应

SHEL 效应非常小,不到波长的十分之一,如何测量是个很大的难题。2008 年,两位美国科学家 Hosten 和 Kwiat 利用弱测量方法,通过对光的自旋自由度(即偏振自由度)进行后选择,使分裂的两束光发生适当的干涉,最终实现微小横向平移的 104 倍的放大,测量精度达到 $1\text{\AA}$,从而完美地观测到了光的自旋霍尔效应^[8]。光的自旋霍尔效应为操控光子提供了新的途径,在纳米光学、量子信息和半导体物理方面都具有重要的应用前景^[15]。

近几年来冷原子(离子)体系相干操控技术的进步使得基于实物粒子量子干涉技术的量子弱测量成为可能。笔者所在课题组在基于囚禁离子的弱值放大效应和弱测量方面已取得了一些理论和实验成果^[16,17]。囚禁离子是束缚在谐势阱中的带电粒子,该物理系统中的量子弱测量过程与阿哈罗诺夫等人的思想实验有类似物理图像。离子外层价电子的基态和亚稳态能级可以组成一个赝自旋;同时,把离子当作一个谐势阱中的运动粒子,其质心运动可以用谐振子相空间中的量子态波包来描述,占有数表象下的描述为声子态;赝自旋-声子之间的耦合在实验上可以用双色激光来实现,耦合强度取决于激光强度和作用时间。于是,通过建立自旋 $\leftrightarrow$ 赝自旋、自旋的位置波包 $\leftrightarrow$ 赝自旋的声子态、梯度磁场 $\leftrightarrow$ 双色激光的一一对应关系,即可在囚禁离子系统中设计与阿哈罗诺夫等人思想实验类似的量子弱测量过程。2019 年,笔者所在课题组以单个囚禁钙离子的电子状态作为被测对象,离子的质心运动声子态作为测量仪器,在国际上首次实验验证了纯原子自由度的弱值放大效应。通过激光离子相互作用来实现内态-声子的线性弱耦合,以及用电子搁置技术对离子内态进行有效后选择,最终在相空间中观察到声子波包平移放大 25 倍的效应^[16]。2020 年,又通过调节激光与囚禁离子的相互作用强度,实验展示了离子体系量子弱测量到强测量的连续转变过程,并发现了该转变过程中的普遍规律——存在指数形式的转变因子,第一次严格给出了量子测量强弱转变的量化描述。利用对声子波函数的层析,还证明了该指数形式的转变因子来源于离子质心运动波包的干涉效应^[17]。这些研究可极大地推动基于囚禁离子的量子操控和量子精密测量技术的发展。

4 结语

本文从斯特恩-盖拉赫实验出发对量子测量的冯·诺伊曼模型进行了阐述,进而介绍了弱测量的物理图像及其进展与应用。量子弱测量与弱值放大技术是目前量子测量领域的前沿热点方向之一。本文基于大学物理范畴的知识介绍最新的科技进展,有助于激发学生主动探索、甚至进一步研究的愿望,必将有益于大学生自我学习兴趣和能力的培养及提升,获得终身学习能力。

量子力学是现代文明发展的理论基石,学习量子力学就是要掌握现代科学技术中最重要的基础理论,不仅能提高学生的知识储备量,而且学生的科学素质、文化素质都有明显提升。但在大学物理课程中,量子物理是最难学、同时也是最难教的部分。如何教好量子物理是一个非常值得探讨的问题。王小力在《美国大学物理教学特色——兼谈对我国大学物理教学改革的建议》^[18]一文中对比了中美大学在大学物理教育中的不同之处,明确指出了美国大学对科技前沿的重视。以科技前沿引导学生兴趣、开拓学生眼界,激发学习理论的兴趣和热情,并在未来进一步转化为探索科技前沿的持续动力,既是教好量子物理的有效途径,也是响应习主席“加快量子科技领域人才培养力度,加快培养一批量子科技领域的高精尖人才”号召的切实举措。

参 考 文 献

- [1] BRAGINSKY V B, KHALILI F Y, THORNEE. Quantum measurement [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [2] NEUMANN J V. Mathematical foundations of quantum mechanics[M]. Berlin: Springer Press, 1932.
- [3] AHARONOVY, ALBERT D Z, VAIDMAN L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100[J]. Physical Review Letters, 1988, 60(14): 1351-1354.
- [4] DRESSELJ, MALIK M, MIATTOF M, et al. Colloquium: understanding quantum weak values: Basics and applications [J]. Reviews of Modern Physics, 2014, 86: 307-316.
- [5] KNEEG C, COMBES J, FERRIE C, et al. Weak-value amplification: State of play [J]. Quantum Measurements and Quantum Metrology, 2016, 3: 32-37.
- [6] ZUREK W H. Pointer basis of quantum apparatus; into

- what mixture does the wave packet collapse[J]. Physical Review D, 1981, 24(6): 1516-1525.
- [7] GHIRARDIG C, RIMINIA, WEBERT. Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems[J]. Physical Review D, 1986, 34(2): 470-491.
- [8] HOSTENO, KWIAT P. Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements[J]. Science, 2008, 319: 787-790.
- [9] DIXON P B, STARLING D J, JORDAN A N, et al. Ultra-sensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(17): 173601(1-4).
- [10] HALLAJIM, FEIZPOURA, DMOCHOWSKIG, et al. Weak-value amplification of the nonlinear effect of a single photon[J]. Nature Physics, 2017, 13: 540-545.
- [11] THEKKADATH G S, GINER L, CHALICHY, et al. Direct measurement of the density matrix of a quantum system[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(12): 120401(1~5).
- [12] WESTON M M, HALL M J W, PALSSON S, et al. Experimental test of universal complementarity relations[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(22): 220402(1~5).
- [13] ZOU W J, LI Y H, WANG S C et al. Protecting entanglement from finite-temperature thermal noise via weak measurement and quantum measurement reversal[J]. Physical Review A, 2017, 95(4): 042342(1~6).
- [14] ONODAM, MURAKAMIS, NAGAOSAN. Hall effect of light[J]. Physical Review Letters, 2004, 93(8): 083901(1~4).
- [15] 罗海陆, 文双春. 光自旋霍尔效应及其研究进展[J]. 物理, 2012, 41(6): 367-373.
- LUO H L, WEN S C. The spin Hall effect of light[J]. Physics, 2012, 41(6): 367-373. (in Chinese)
- [16] WU C W, ZHANG J, XIE Y, et al. Scheme and experimental demonstration of fully atomic weak-value amplification[J]. Physical Review A, 2019, 100(6): 062111(1~7).
- [17] PANY M, ZHANG J, COHENE, et al. Weak-to-strong transition of quantum measurement in a trapped-ion system[J]. Nature Physics, 2020, 16: 1206-1210.
- [18] 王小力. 美国大学物理教学特色——兼谈对我国大学物理教学改革建议[J]. 比较教育研究, 1999, 1: 16-20.
- WANG X L. Characteristics of American college physics teaching—Suggestions on the reform of college physics teaching in China[J]. International and Comparative Education, 1999, 1: 16-20. (in Chinese)
- (上接第 120 页)
- [25] ZHANG S C. The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of the fractional quantum Hall effect[J]. International Journal of Modern Physics B, 1992, 6: 25-58.
- [26] HALDANE F D M. Geometrical description of the fractional quantum Hall effect[J]. Physical Review Letters, 2011, 107: 116801.
- [27] HALDANE F D M. “Hall viscosity” and intrinsic metric of incompressible fractional Hall fluids[J]. 2009, arXiv: 0906.1854.
- [28] HALL E. On the “rotational coefficient” in nickel and cobalt[J]. Philosophical Magazine, 1881, 12: 157-172.
- [29] NAGAOSA N, SINOVA J, ONODA S, et al. Anomalous Hall effect[J]. Review of Modern Physics, 2010, 82: 1539-1592.
- [30] 金国钧. 凝聚体中的拓扑量子态[J]. 物理学进展, 2019, 39: 187-241.
- JIN G J. Topological quantum states in condensed matter[J]. Progress in Physics, 2019, 39: 187-241. (in Chinese)
- [31] BERNEVIG B A, HIGES T A, ZHANG S C. Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells[J]. Science, 2006, 314: 1757-1761.
- [32] BERNEVIG B A, ZHANG S C. Quantum spin Hall effect[J]. Physical Review Letters, 2006, 96: 106802.
- [33] WEN X G. Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter[J]. Review of Modern Physics, 2017, 89: 041004.
- [34] MIN H, HILL J E, SINITSYN N A, et al. Intrinsic and Rashba spin-orbit interactions in graphene sheets[J]. Physical Review B, 2006, 74: 165310.
- [35] YAO Y, YE F, QI X L, et al. Spin-orbit gap of graphene: First-principles calculations[J]. Physical Review B, 2007, 75: 041401(R).
- [36] 余睿, 方忠, 戴希. Z_2 拓扑不变量与拓扑绝缘体[J]. 物理, 2011, 40: 462-468.
- YU R, FANG Z, DAI X. Z_2 topological invariant and topological insulators[J]. Physics, 2011, 40: 462-468. (in Chinese)
- [37] KÖNIG M, WIEDMANN S, BRÜNE C, et al. Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. Science, 2007, 31: 766-770.
- [38] 汪容. 数学物理中的微分几何与拓扑学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2010.
- [39] 侯伯元, 侯伯宇. 物理学家用微分几何[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2004.
- [40] NAKAHARA M. Geometry, topology and physics[M]. 3rd ed. Bosa Roca: Taylor & Francis, 2016.
- [41] NASH C, SEN S. Topology and geometry for physicists[M]. London: Academic Press, 1983.