

从 Duhamel 原理观点看 Duhamel 积分

王怀磊

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 江苏 南京 210016)

摘 要 本文研究数学物理中的 Duhamel 原理(齐次化原理)与单自由度线性振动系统中的 Duhamel 积分之间的内在联系。从一般 Duhamel 原理思想出发,导出了 Duhamel 原理应用于单自由度线性振动系统时的两种积分形式,称为第一积分形式和第二积分形式。提出了贡献度函数的概念,探讨了两种不同贡献度函数及相应的两种积分形式的物理意义及各自之间的相互关系。通过进一步求解贡献度函数,揭示出单自由度振动系统中与 Duhamel 原理积分形式所对应的具体数学表达式即为系统的 Duhamel 积分,最后基于贡献度函数概念总结了 Duhamel 积分的物理意义。

关键词 线性振动; Duhamel 积分; Duhamel 原理; Duhamel 原理积分形式; 贡献度函数

DUHAMEL INTEGRAL IN THE PERSPECTIVE OF DUHAMEL'S PRINCIPLE

WANG Huailei

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing, Jiangsu 210016)

Abstract This paper studies the internal relationship between the Duhamel principle (homogenization principle) in the method of mathematical physics and the Duhamel integral for the solution of linear vibration systems of single degree of freedom. Starting from the general idea of Duhamel principle, two integral forms are derived when Duhamel principle is applied to a single degree of freedom linear vibration system, namely the first integral form and the second integral form. The concept of contribution function is proposed, and the physical significance and mutual relationship of the two different contribution functions are discussed. By solving the expression of contribution function, it is revealed that the specific mathematical expression corresponding to the two integral forms of Duhamel principle in the single degree of freedom vibration system is the Duhamel integral of the system, and the physical significance of Duhamel integral is summarized through the contribution function.

Key words linear vibration; Duhamel integral; Duhamel's principle; integral form of Duhamel's principle; contributing function

在振动理论中,求解线性系统任意激励响应的积分公式称为 Duhamel 积分。不仅如此,Du-

hamel 积分还广泛应用于物理、信息、控制等许多其他学科,且名称多样,如卷积积分,叠加积分,褶

收稿日期: 2022-04-03; 修回日期:

作者简介: 王怀磊,男,副教授,主要从事分析力学及数学物理相关教学科研工作,whlay@nuaa.edu.cn。

引文格式: 王怀磊. 从 Duhamel 原理观点看 Duhamel 积分[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 16-20.

Cite this article: WANG H L. Duhamel integral in the perspective of Duhamel's principle[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 16-20. (in Chinese)

合积分,加权游动平均,Faltung 积分等。随着学术的不断发展,Duhamel 积分还被推广应用于 Banach 空间和分数阶微分方程的研究^[1-3]。Duhamel 积分的理论价值和重要性在于它是一个具有高度概括性和普遍性的原理性公式。简而言之,其物理意义可总结为一句话,即:线性系统对任意激励的响应等于其单位脉冲响应与外激励的卷积^[4]。

Duhamel 积分以法国数学家、物理学家 Jean-Marie-Constant Duhamel (1797—1872) 的名字命名,因此一般人们会认为它是由 Duhamel 最早提出的。然而事实却并非完全如此。据记载^[5],Duhamel 在 1834 年研究弦的振动问题时受到牛顿力学冲量定理的启发,将外力的瞬时作用转变为弦的速度瞬时增量,从而将方程齐次化并导出了弦振动的积分表达式。其后,他在求解带热源的热传导方程时又运用热传导实验定律(牛顿冷却定律)对方程的非齐次项进行齐次化,从而推广了 Fourier 定理,发展出了具有普遍意义的处理线性非齐次演化方程的方法,被称为 Duhamel 原理,又称为冲量原理或齐次化原理^[6-8]。这就说明,Duhamel 所发现的原理最初是针对求解波动方程、热传导方程等偏微分方程提出的,其数学形式并非振动理论中使用的 Duhamel 积分。

振动理论中的 Duhamel 积分是通过将外激励分解成无穷多个微冲量作用,再对求得的各微冲量响应进行积分叠加而求得^[9-16]。这种方法的基本物理思想虽与 Duhamel 原理一脉相承,但没有论及 Duhamel 积分与 Duhamel 原理最初的数学表达形式之间的关系,从理论体系的完整性角度来看,它们之间似乎还缺少一个尚未展示的逻辑链条。事实上,由于常微分方程描述的线性振动系统可视为不含空间变量的特殊偏微分方程,因此,Duhamel 积分理应可视为 Duhamel 原理的一个约化特例和降维应用,或者说 Duhamel 积分应可从 Duhamel 原理的数学形式约化出来。基于此,本文以 Duhamel 原理为出发点进行数学演绎,给出 Duhamel 原理视角下的 Duhamel 积分形式,揭示其与 Duhamel 积分之间的关系,并基于此对 Duhamel 积分在振动理论中的物理意义进行更为全面系统的分析,以期达到更加完整深刻地理解 Duhamel 积分以及将之与数学物理方法的相关知识体系融会贯通的目的。

1 Duhamel 原理第一积分形式

考虑如下零初值单自由度受迫振动系统

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t), & t > 0 \\ u(0) = 0, & \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由 δ 函数的筛选性质,外激励 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \quad t > 0 \quad (2)$$

根据 Duhamel 原理的基本思想^[6-8],从形式上看,既然外激励可以表示成积分的形式,可以猜想系统的响应也可表示为某种积分的形式,因此我们有下面的定理,此处称之为 Duhamel 原理第一积分形式。

定理 1: 方程(1)的解可表示为

$$u(t) = \int_0^t v(t,\tau)d\tau = \int_0^t v(t,t-\tau)d\tau \quad (3)$$

其中, $v(t,\tau)$ 满足方程

$$\begin{cases} m\ddot{v}(t,\tau) + c\dot{v}(t,\tau) + kv(t,\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau), \\ \tau \in [0,t], \quad t > 0 \\ v(0,\tau) = 0, \quad \dot{v}(0,\tau) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中,‘ $\cdot$ ’是指对变量 t 求导。

证明: 首先,根据冲量法思想可知方程(4)等价于如下系统

$$\begin{cases} m\ddot{v}(t,\tau) + c\dot{v}(t,\tau) + kv(t,\tau) = 0, \\ \tau \in [0,t], \quad t > 0 \\ v(\tau,\tau) = 0, \quad \dot{v}(\tau,\tau) = f(\tau)/m \end{cases} \quad (5)$$

对式(3)第一等式两端求导,同时考虑方程(5)的第一个初值条件,得

$$\dot{u}(t) = \int_0^t \dot{v}(t,\tau)d\tau + v(t,\tau)|_{\tau=t} = \int_0^t \dot{v}(t,\tau)d\tau \quad (6)$$

由式(3)和式(6)可知 $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0$ 。继续对式(6)两端关于 t 求导,同时考虑方程(5)的第二个初值条件,得

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= \int_0^t \ddot{v}(t,\tau)d\tau + \dot{v}(t,\tau)|_{\tau=t} \\ &= \int_0^t \ddot{v}(t,\tau)d\tau + f(t)/m \end{aligned} \quad (7)$$

将式(3)、式(6)、式(7)代入方程(1)左端,并利用方程(5)得

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) \\
 &= \int_0^t [m\ddot{v}(t, \tau) + c\dot{v}(t, \tau) + kv(t, \tau)] d\tau + f(t) \\
 &= f(t)
 \end{aligned} \quad (8)$$

这就证明了 $u(t) = \int_0^t v(t, \tau) d\tau$ 的确是方程(1)的解。进一步作变换 $\tau' = t - \tau$, 则有

$$u(t) = \int_0^t v(t, \tau) d\tau = \int_0^t v(t, t - \tau) d\tau \quad (9)$$

需要指出的是, 方程(4)虽然在形式上仍是振动系统, 但外激励 $f(\tau)$ 的量纲是力, 而非冲量, 因此其激发的响应 $v(t, \tau)$ 不再具有位移量纲。事实上, 由于系统是线性的, 脉冲力 $f(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$ 激发的响应即为 $v(t, \tau) d\tau$, 它应具有位移量纲, 因此 $v(t, \tau)$ 具有速度量纲。需要注意的是, $v(t, \tau)$ 与原系统的速度响应 $\dot{u}(t)$ 并不是一个概念, 它是 τ 时刻脉冲对 t 时刻响应贡献能力的一种度量, 并不具有任何快慢的意义, 因此, 本文将 $v(t, \tau)$ 称为贡献度函数。不难看出, 积分 $\int_0^t v(t, \tau) d\tau$ 和 $\int_0^t v(t, t - \tau) d\tau$ 分别是 $0 \sim t$ 和 $t \sim 0$ 的方向对各时刻脉冲激励的响应贡献求和。

2 Duhamel 原理第二积分形式

如果将 $f(\tau) \delta(t - \tau)$ 整体上看作广义函数, 联想到狄拉克 δ 函数的一个数学性质^[17]

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

或 $f(t) \delta(t - \tau) = f(\tau) \delta(t - \tau)$ (10)

可将方程(4)右端的脉冲激励项换成 $f(t) \delta(t - \tau)$, 得到与其等价的方程

$$\begin{cases} m\ddot{v}(t, \tau) + c\dot{v}(t, \tau) + kv(t, \tau) = f(t) \delta(t - \tau), \\ t > \tau > 0 \\ v(0, \tau) = 0, \quad \dot{v}(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

方程(11)与方程(4)右端的激励项虽在数学表达上略有不同, 但它们的物理意义相同, 其本质都是通过 δ 函数将 $f(t)$ 在 τ 时刻的脉冲筛选出来。方程(4)是已筛选出脉冲 $f(\tau) d\tau$ 的形式, 而方程(11)则是筛选前或正在筛选的形式, 表示脉冲激励尚未作用完成, 在脉冲作用完毕的瞬间, 方程(11)即变为方程(4)。由此可以得到如下 Duhamel 原理第二积分形式。

定理 2: 方程(1)的解可表示为

$$u(t) = \int_0^t w(t - \tau, \tau) d\tau = \int_0^t w(\tau, t - \tau) d\tau \quad (12)$$

其中, $w(t', \tau)$ 是另外一种形式的贡献度函数, 满足方程

$$\begin{cases} m\ddot{w}(t', \tau) + c\dot{w}(t', \tau) + kw(t', \tau) \\ = f(t' + \tau) \delta(t') \\ w(0, \tau) = 0, \quad \dot{w}(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

证明: 可完全仿照定理 1 的证明过程验证

$$u(t) = \int_0^t w(t - \tau, \tau) d\tau \text{ 的确是方程(1)的解。或者换一个角度, 若对方程(11)作变量代换 } t' = t - \tau > 0, \text{ 并令 } w(t', \tau) = v(t' + \tau, \tau), \text{ 则可直接得到 } w(t', \tau) \text{ 满足方程(13)。根据变量代换, 又可得 } w(t - \tau, \tau) = v(t, \tau), \quad w(\tau, t - \tau) = v(t, t - \tau) \quad (14)$$

从而由式(3)知式(12)成立。

由于 Duhamel 积分的计算本质是 $[0, t]$ 内的各脉冲响应的并行叠加^[18], 因此, 任何 τ 时刻单独发生的脉冲激励都可视为发生于 0 时刻。而方程(4)与方程(13)之间的关系恰恰在于, 方程(4)中原在各不同 $t = \tau$ 时刻发生的脉冲激励在方程(13)中通过时间平移 $t' = t - \tau$ 全部拉回到或视为在零时刻 $t' = 0$ 发生。此时, t' 实际上表示的是从 τ 时刻开始的计时时长 (称为计时时间)。因此, $w(t', \tau)$ 是以计时时间 t' 的方式描述 τ 时刻的脉冲对 t 时刻响应的贡献度。

这里需指出, 虽然方程(4)和方程(11)是等价的, 但在定理 2 的证明中并未对方程(4)进行变量代换。如果这样做, 则会得到如下方程

$$\begin{cases} m\ddot{w}(t', \tau) + c\dot{w}(t', \tau) + kw(t', \tau) \\ = f(t - t') \delta(t') \\ w(0, \tau) = 0, \quad \dot{w}(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

上式解为 $w(t', t) = f(t) h(t')$ 。可以看出, 这种变换得出的结果是没有意义的, 或者说是错误的。原因在于, 方程的变量代换只能施加于未求解的方程, 而方程(4)中的 $f(\tau) \delta(t - \tau)$ 这种已筛选后的形式实际上表示已经对方程进行了部分求解, 再进行变量代换必然会引起符号系统的混乱与错误。这也是前文中引入并论述方程(11)的意义所在。

3 贡献度函数表达式

上述讨论给出的是具有一般意义的 Duhamel 原理的两种积分形式,但并未给出贡献度函数的具体表达式。对于一般的偏微分方程,其贡献度函数比较难以求解,但由于此处 $v(t, \tau)$ 不含空间变量,因此其具体表达式很容易求出来。事实上,求解线性微分方程(5),并利用等式(14)可知

$$w(t - \tau, \tau) = v(t, \tau) = f(\tau)h(t - \tau) \quad (16)$$

其中, $h(t - \tau)$ 为系统的单位脉冲响应^[9]。进一步将上式中的 τ 用 $t - \tau$ 代换得

$$w(\tau, t - \tau) = v(t, t - \tau) = f(t - \tau)h(\tau) \quad (17)$$

从而由定理 1 或定理 2 可知,方程(1)的解即为

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (18)$$

上式即为通常所见的 Duhamel 积分。

可以看出, Duhamel 原理不但对于单自由度线性振动系统仍然成立,而且其两种积分形式的具体数学表达式就是通常所说的 Duhamel 积分。第一形式中的 $v(t, \tau)$ 和第二形式中的 $w(t - \tau, \tau)$ 分别以绝对时间 t 和计时时间 $t - \tau$ 描述 τ 时刻的脉冲激励对系统 t 时刻响应的贡献度,而第一形式中的 $v(t, t - \tau)$ 和第二形式中的 $w(\tau, t - \tau)$ 则分别以绝对时间 t 和计时时间 τ 描述表示 $t - \tau$ 时刻的脉冲激励对系统 t 时刻响应的贡献度。将 $f(\tau)h(t - \tau)$ 或 $f(t - \tau)h(\tau)$ 中的两个自变量分别与其对应的第二形式中的贡献度函数相比较,可知外激励函数 $f(\cdot)$ 的自变量为脉冲时刻对应的绝对时间,而单位脉冲响应函数 $h(\cdot)$ 的自变量则为自脉冲激励开始的计时时间。

式(16)还表明,当脉冲激励时刻 τ 固定后,其对其后任一 t 时刻产生的响应贡献度都只与二者的时间差 $t - \tau$ 有关。在此意义下, Duhamel 积分的计算过程可形象地总结为:将激励在 $[0, t]$ 内分成 n 个脉冲激励 $f(\tau_i)d\tau$, 同时做出 n 个相同的零初值系统,将这 n 个不同的脉冲 $f(\tau_i)d\tau$ 分别施加在各自系统上,每个系统均单独从零开始计时,对施加脉冲 $f(\tau_i)d\tau$ 的系统计时到 $t - \tau_i$ 时记录其响应值,再将记录的各响应值进行代数相加

即为原系统在 t 时刻的响应。此过程从另外一个角度再次反映出 Duhamel 积分计算过程中蕴含的并行叠加思想^[18]。

4 结语

Duhamel 原理作为一种基本的数学物理原理,将其应用到单自由度线性振动系统,可以得到 Duhamel 原理视角下两种不同的积分形式,它们是同一物理计算过程的两种不同表达形式,且其具体数学表达式即为通常的 Duhamel 积分。因此,振动理论中的 Duhamel 积分就是一般偏微分方程的 Duhamel 原理在常微分方程中的约化结果。

Duhamel 原理积分形式或 Duhamel 积分中的被积函数事实上是脉冲激励对响应的贡献度,而两种不同形式的贡献度函数分别是以绝对时间和计时时间为变量描述脉冲激励对系统响应的贡献,二者在数学形式上具有非常优美的对称关系,并具有相同的物理本质。

希望本文有助于读者全面深刻地理解 Duhamel 积分的理论来源及物理意义,以期达到将之与数学物理方法中的相关经典理论体系融会贯通的目的。由于线性多自由度振动系统与单自由度振动系统的响应具有相似的表达形式,因此文中所作分析不难推广到多自由度线性振动系统。

致谢: 感谢北京理工大学胡海岩院士和哈尔滨工业大学(深圳)陈立群教授在本文撰写过程中给出的建议。

参 考 文 献

- [1] AROSIO A. Duhamel's principle for temporally inhomogeneous evolution equations in Banach space[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984, 8(9): 997-1009.
- [2] UMAROV S R, SAIDAMATOV E M. A generalization of Duhamel's principle for differential equations of fractional order[J]. Doklady Mathematics. 2007, 75(1): 94-96.
- [3] UMAROV S R. On fractional Duhamel's principle and its applications[J]. Journal of Differential Equations. 2012, 252(10): 5217-5234.
- [4] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [5] ANGELUS J. Duhamel's Principle[M]. Duct Publishing, 2011.
- [6] 周学圣, 张九思. 数学物理方法[M]. 济南: 山东科学技术

- 出版社, 1993.
- [7] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [8] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [9] 胡海岩. 机械振动与冲击[M]. 北京: 航空工业出版社, 1998.
- [10] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [11] 郑兆昌. 机械振动(上)[M]. 北京: 机械工业出版社, 1980.
- [12] 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [13] THOMSON W T, DAHLEH M D. Theoy of Vibration with Applications[M]. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- [14] KELLY S G. Mechanical vibrations: Theory and applications[M]. Mason, OH: Cengage Learning, 2011.
- [15] INMAN D J. Engineering Vibration[M]. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc., 2014.
- [16] RAO S S. Mechanical vibrations[M]. 6th ed. Hoboken, NJ: Pearson Education, Inc., 2017.
- [17] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法[M]. 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2019.
- [18] 王怀磊. 关于 Duhamel 积分的进一步讨论[J]. 力学与实践, 2022, 44(1): 155-158.
- WANG H L. Some further discussion on Duhamel integral [J]. Mechanics in Engineering, 2022, 44(1): 155-158. (in Chinese)
- (上接第 10 页)
- [7] 荣新, 刘国超, 栾弘义, 等. 二维材料的变温拉曼光谱研究[J]. 物理实验, 2019, 39(7): 1-10.
- RONG X, LIU G C, LUAN H Y, et al. Temperature-dependent Raman spectra of 2D materials[J]. Physics Experimentation, 2019, 39(7): 1-10. (in Chinese)
- [8] 翟家振, 张元龙, 孔令杰. 简易荧光显微镜的制作及其在生物医学中的应用[J]. 物理实验, 2020, 40(8): 24-27.
- ZHAI J Z, ZHANG Y L, KONG L J. Fabrication and biomedical application of custom fluorescence microscope[J]. Physics Experimentation, 2020, 40(8): 24-27. (in Chinese)
- [9] 张朝晖. 发展研究型基础物理实验教学的理念与实践[J]. 物理实验, 2021, 41(7): 37-41.
- ZHANG Z H. Ideas and practice on development of research-type teaching of the basic physics experiments[J]. Physics Experimentation, 2021, 41(7): 37-41. (in Chinese)
- [10] 赵伟, 王中平, 韦先涛, 等. 拔尖人才培养背景下开展英才物理实验教学试点的总结和展望[J]. 物理实验, 2021, 41(9): 23-28.
- ZHAO W, WANG Z P, WEI X T, et al. Pilot teaching of elite physics experiment under the background of top-notch talent training[J]. Physics Experimentation, 2021, 41(9): 23-28. (in Chinese)
- [11] 孙腊珍, 张增明. 研究型大学物理实验教学平台建设的实践与探索[J]. 实验技术与管理, 2008, 25(10): 18-20.
- SUN L Z, ZHANG Z M. Practice and exploration on construction for platform of experimental teaching in research universities[J]. Experimental Technology and Management, 2008, 25(10): 18-20. (in Chinese)
- [12] 刘东奇. 荧光显微镜自组实验设计[J]. 物理实验, 2018, 38(9): 21-23.
- Liu D Q. Experimental design of self-assembled fluorescence microscope[J]. Physics experimentation, 2018, 38(9): 21-23. (in Chinese)
- [13] 刘东奇, 孔勇发. 显微光谱成像装置研制与实验设计[J]. 实验技术与管理, 2020, 37(2): 104-106.
- Liu D Q, Kong Y F. Development and experimental design of microscopic spectral imaging device[J]. Experimental Technology and Management, 2020, 37(2): 104-106. (in Chinese)
- [14] YAN T, QIAO X, LIU X, et al. Photoluminescence properties and exciton dynamics in monolayer WSe₂[J]. Appl. Phys. Lett., 2014, 105: 101901.
- [15] ROSS J S, KLEMENT P, JONES A M, et al. Electrically tunable excitonic light-emitting diodes based on monolayer WSe₂ p-n junctions[J]. Nat. Nanotech., 2014, 9: 268-272.
- [16] LIU D Q, YAN X Q, GUO H W, et al. Substrate effect on the photoluminescence of chemical vapor deposition transferred monolayer WSe₂ [J]. J. Appl. Phys., 2020, 128: 043101.
- [17] PARK S, MUTZ N, SCHULTZ T, et al. Direct determination of monolayer MoS₂ and WSe₂ exciton binding energies on insulating and metallic substrates[J]. 2D Mater., 2018, 5: 025003.