

旋转圆环上的珠子动力学

杨瑾涛 黎秋航 侯吉旋 章羽 陈乾 周智勇

(东南大学物理学院, 江苏 南京 211189)

摘要 对于放置在旋转圆环凹槽上的珠子,当圆环旋转时,珠子将产生一系列运动行为。可以将珠子视为刚体,研究珠子的动力学,考虑滚动摩擦和黏滞阻力两种形式的阻力,用分析力学方法推导其运动方程,并讨论相关动力学变量,包括平衡点超临界分叉、小振动周期等条件,通过实验模型进行逐一验证。并对特殊条件下进行的受迫振动进行了理论和实验研究。

关键词 IYPT; 旋转圆环; 珠子动力学; 受迫振动

DYNAMICS OF A BEAD ON A ROTATING RING

YANG Jintao LI Qiuhan HOU Jixuan ZHANG Yu CHEN Qian ZHOU Zhiyong

(School of Physics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189)

Abstract For a bead placed on a rotating ring, when the ring rotates, the beads will produce a series of motion behaviors. The bead can be considered as a rigid body. Two forms of resistance, rolling friction and viscous resistance, are considered, and their equations of motion are derived by analytical mechanics. Relevant kinetic variables are discussed, including supercritical pitchfork bifurcation at the equilibrium point, small vibration period, which are verified one by one through the experimental model. The forced vibration under special conditions is studied theoretically and experimentally.

Key words IYPT; rotating ring; bead dynamics; forced vibration

2021 年国际青年物理学家锦标赛(IYPT2021)的第七题 Bead Dynamics 描述了一个动力学问题: A circular hoop rotates about a vertical diameter. A small bead is allowed to roll in a groove on the inside of the hoop. Investigate the relevant parameters affecting the dynamics of the bead. 如果让一圆环绕着垂直于直径的轴旋转,一个珠子在环内的凹槽中滚动。在旋转圆环上的珠子的运动,是理论力学^[1]和非线性动力学^[2]教科书中研究的一个经典例子。尽管这个系统具有丰富的动力学特性,在教科书中却没有超越质点近似的分析。在已有中文文献数据库,并无相关文献进行研究分析。

为了更好地探究其运动行为,本文将珠子视为刚体,考虑滚动摩擦和黏滞阻力两种形式的阻力,用分析力学方法重新推导其运动方程,并讨论相关动力学变量,包括平衡点超临界分叉、小振动周期、特殊条件下的受迫振动,并在实验上逐一验证。

1 理论模型

1.1 运动方程

将小球视为刚体,意味着小球自转不可忽略,但小球在槽内会做垂直于凹槽的横向运动,滚动方向不一直沿圆环,自转角速度难以测量。因此

收稿日期: 2022-05-04

基金项目: 教指委华东地区高等学校教学研究项目(2021JZWHD02)。

通讯作者: 黎秋航,男,工程师,主要从事物理实验教学与研究,125033853@qq.com。

引文格式: 杨瑾涛,黎秋航,侯吉旋,等. 旋转圆环上的珠子动力学[J]. 物理与工程,2022,32(5):138-143.

Cite this article: YANG J T, LI Q H, HOU J X, et al. Dynamics of a bead on a rotating ring[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(5): 138-143. (in Chinese)

设计将小球两点接触架在凹槽上而非在凹槽内,从而有效避免横向运动,也便于验证小球的纯滚动(见图1)。

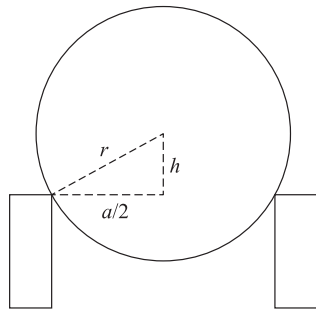


图1 小球与凹槽接触横截面图

设小球球心到圆环中心距离为 R_c , 小球半径为 r , 质量为 m , 绕质心转动惯量为 $I = 2mr^2/5$, 自转角速度为 $\dot{\phi}$; 圆环匀速转动角速度为 ω , 凹槽宽度为 α ; 小球在圆环上的具体位置, 用小球与圆环中心连线与竖直方向夹角 θ 来表示(见图2); 小球; 重力加速度为 g 。

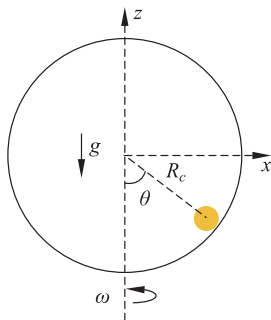


图2 珠子运动示意图

选取夹角 θ 为动力学的广义坐标, 则体系的势能 V 和动能 T 分别表示为

$$T = \frac{1}{2} m (R_c^2 \dot{\theta}^2 + R_c^2 \omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad (1)$$

$$V = mgR_c (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

环上小球运动速度一般较小, 不妨假设小球做纯滚动, 满足条件 $h\dot{\phi} = (R_c + h)\dot{\theta}$, 其中由几何条件(见图1), $h = \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$ 。

体系的拉格朗日量为

$$L = T - V \quad (3)$$

小球在运动过程中受到的阻力有两种: 滚动摩擦和黏滞阻力。设黏滞阻力与相对速度的一次方成正比^[3], 阻力系数 β , 得黏滞阻力 $f_{\text{visc}} = -\beta R_c \dot{\theta}$ 。当滚动体在支撑面上作无滑动滚动时,

由于支撑面或滚动体的形变, 法向支持力 N 会对滚动体质心产生滚动摩擦力矩 $M = N\delta$, δ 为滚动摩擦因数^[4]。可以将滚动摩擦等效为滑动摩擦^[5]得

$$f_{\text{roll}} = M/r = -\text{sgn} \dot{\phi} \cdot N\delta/r = -\text{sgn} \dot{\phi} \cdot \mu \cdot N \quad (4)$$

μ 为滚动阻力因数。

将上述两种摩擦代入非保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = Q_a \quad (5)$$

得到小球在环上的运动方程

$$\ddot{\theta} + \kappa (\omega_c^2 - \omega^2 \cos \theta) \sin \theta = \frac{-\beta R_c \dot{\theta} - \text{sgn} \dot{\phi} \mu N}{m R_c} \quad (6)$$

这是 θ 关于时间的二阶微分方程, 此方程内含有两个参量 β, μ , 无解析解。其中几何参数

$$\textcircled{1} \quad \kappa = \left(1 + \frac{I}{m R_c^2} \left(\frac{R_c + h}{h} \right)^2 \right)^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{g}{R_c}}$$

$$\textcircled{3} \quad N = N_{\text{side}} + N_{\text{bottom}} = 2m\omega R_c \dot{\theta} \cdot \cos \theta + (mg \cos \theta + m\omega^2 R_c \sin^2 \theta + m\dot{\theta}^2 R_c)$$

1.2 运动范围

假设小球不越过圆环最高点, 即 $|\theta| \leq \pi$ 。由于小球在半封闭槽上运动, 存在脱离轨道的情况, 所以运动范围不是 $[-\pi, \pi]$ 。

根据受力关系图(见图), 法向支持力

$$N = N_1 + N_2 + mg \cos \theta = m\dot{\theta}^2 R_c + m\omega^2 R_c \sin^2 \theta + mg \cos \theta \quad (7)$$

当 $\dot{\theta} = 0$ 时, 运动范围内 θ 满足 $N(\theta) \geq 0$ 。解得

$$\theta \in \left[-\arccos \left(\frac{\omega_c^2 - \sqrt{\omega_c^4 + 4\omega^4}}{2\omega^2} \right), \arccos \left(\frac{\omega_c^2 - \sqrt{\omega_c^4 + 4\omega^4}}{2\omega^2} \right) \right] \quad (8)$$

随着圆环转速 ω 的增加, 小球的运动范围也逐渐增大。

1.3 平衡点

当圆环转动时, 小球会在圆环凹槽中运动并逐渐停留在某些位置。令小球速度和加速度为 0, 即 $\ddot{\theta} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0$, 代入运动方程中得到

$$\kappa \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R_c} \right) \sin \theta = 0 \quad (9)$$

小球在半封闭槽上,舍弃解 $\theta = \pi$ 。故小球平衡点

$$\theta_0 = \begin{cases} 0, & \omega \leq \sqrt{\frac{g}{R_c}} = \omega_c \\ 0 \text{ 或 } \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R_c}\right), & \omega > \sqrt{\frac{g}{R_c}} = \omega_c \end{cases} \quad (10)$$

可以看到,在 $\omega < \omega_c$ 的时候,小球仅能在最底端停留;而当 ω 提高至大于 ω_c 时平衡点位置出现超临界分叉^[2] (Supercritical Pitchfork Bifurcation) (见图 3)。

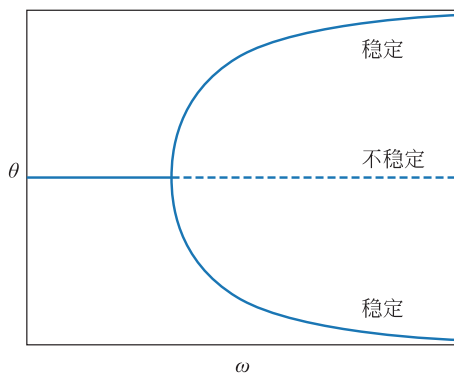


图 3 平衡点位置呈现超临界分叉

下面讨论平衡点的稳定性。运动小球的有效势能表示为

$$U_{\text{effect}} = V + U_{\text{centrifugal}} = mg(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} m (\omega R_c \sin \theta)^2 \quad (11)$$

有效势能的二阶导数

$$U''_{\text{effect}}(\theta) = \frac{\partial^2 U_{\text{effect}}}{\partial \theta^2} = m R_c^2 (\omega_c^2 \cos \theta - \omega^2 \cos 2\theta) \quad (12)$$

可以用来判断平衡稳定性,平衡点处二阶导数大于 0 表示稳定平衡,小于 0 表示不稳定平衡。

当 $\omega < \omega_c$ 时, $U''_{\text{effect}}(\theta=0) > 0$, $\theta_0 = 0$ 为稳定平衡状态 (见图 4(a)); 当 $\omega > \omega_c$ 时, $U''_{\text{effect}}(\theta=0) < 0$,

$U''_{\text{effect}}\left(\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R_c}\right)\right) > 0$, 即 $\omega > \omega_c$ 时, $\theta_0 = 0$ 为不稳定平衡状态, $\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R_c}\right)$ 为稳定平衡状态 (见图 4(b))。

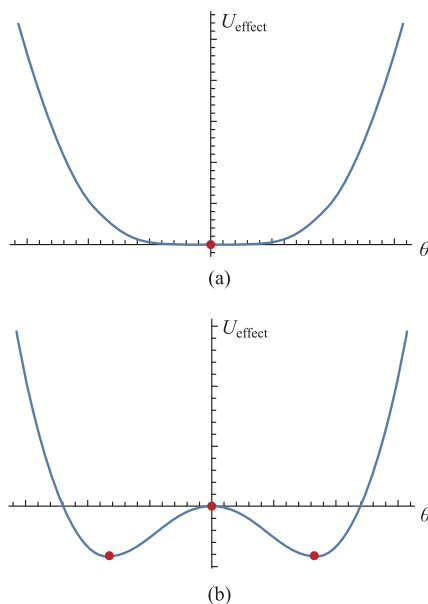


图 4 小球运动的有效势能 U_{effect} , 红点对应 θ 表示平衡位置
(a) $\omega < \omega_c$; (b) $\omega > \omega_c$

1.4 小振动周期

小球是以振动的形式在运动,直至稳定在平衡位置,因此振动周期值得研究。

$$\text{总能量 } E = \frac{1}{2} \kappa^{-1} m R_c^2 \dot{\theta}^2 + U_{\text{effect}}, \text{ 其中 } U_{\text{effect}}$$

不包含速度项 $\dot{\theta}$ 。可推得

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(E - U_{\text{effect}})}{\kappa^{-1} m R_c^2}} \quad (13)$$

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{\kappa^{-1} m R_c^2}{2(E - U_{\text{effect}})}} d\theta \quad (14)$$

但运动过程中积分上下界变化较大,振动周期变化较大,故仅讨论小球在稳定平衡位置附近作微小振动。忽略摩擦。小振动周期为

$$T = 2\pi / \sqrt{\frac{U''_{\text{effect}}(\theta_0)}{\kappa^{-1} m R_c^2}} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa(\omega_c^2 - \omega^2)}}, & \omega < \sqrt{\frac{g}{R_c}} = \omega_c \\ \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa\left(\omega^2 - \frac{\omega_c^4}{\omega^2}\right)}}, & \omega > \sqrt{\frac{g}{R_c}} = \omega_c \end{cases} \quad (15)$$

1.5 受迫振动

如果旋转不垂直,小球在圆环上的运动极不稳定;但如果旋转轴略微不垂直,与竖直角呈一个小角度,在某种条件下,小球的运动会呈现受迫振动的形式^[6]。

设旋转轴与竖直方向夹角为 α ,重新列出体系的拉格朗日量

$$T = \frac{1}{2}m(R_c^2\dot{\theta}^2 + R_c^2\omega^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

$$V = mgR_c(1 - \cos\theta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\theta\cos\omega t)$$

$$L = T - V$$

如果小球受到的阻力形式仅为黏滞阻力 $f = -\beta R_c\dot{\theta}$,那么由拉格朗日方程 $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = Q_\theta$,小球的运动方程为

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} + \kappa \left[\left(\frac{g}{R_c} \cos\alpha - \omega^2 \cos\theta \right) \sin\theta + \frac{\beta}{m} \dot{\theta} \right] \\ &= \kappa \frac{g}{R_c} \sin\alpha \cos\theta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

当 α 和 θ 为小角度的时候,运动方程近似为

$$\ddot{\theta} + \kappa \frac{\beta}{m} \dot{\theta} + \kappa \left(\frac{g}{R_c} - \omega^2 \right) \theta = \kappa \alpha \frac{g}{R_c} \cos(\omega t)$$

是受迫振动。根据受迫振动相关公式^[4],振幅随角频率 ω 的关系式

$$\theta_r(\omega) = \frac{\alpha g}{R_c \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa} \omega^2 - \frac{g}{R_c} \right)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}}} \quad (17)$$

由极值条件 $\partial \theta_r(\omega) / \partial \omega = 0$ 得出,当角频率为

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1} \left(\frac{g}{R_c} - \frac{\kappa}{2(\kappa+1)} \frac{\beta^2}{m^2} \right)} \quad (18)$$

此时,振幅达到最大,如图5所示。

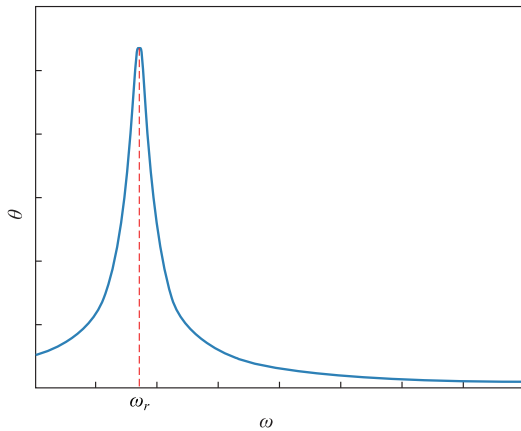


图5 珠子受迫振动幅频曲线

2 实验验证

2.1 实验装置及方案

为了验证建立的理论模型,本文搭建了如图6

所示的装置:一个直径为 (200.0 ± 0.4) mm的3D打印圆环,凹槽宽度为 (10.0 ± 0.2) mm,圆环由电机驱动转动。钢制小球直径为 (14.00 ± 0.02) mm,质量为 (11.26 ± 0.10) g。小型运动相机固定在圆环顶部向下俯拍,利用物理影像分析软件Tracker软件,对不同时刻的小球位置进行测量,并通过和几何关系计算角度 θ 。标记圆环上特殊角度 $(0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ)$ 位置,计算得到在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 范围内相机的视差小于1%。



图6 实验装置图

理论中存在两个与装置有关的待测摩擦参数: β, μ 。通过静止圆环上小球在最低点两侧振荡滚动实验测量得到, $\beta = (9 \pm 1) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$;滚动摩擦在本装置中影响远小于黏滞阻力,故 $\mu \approx 0$ 。

2.2 仿真验证

小球运动方程无解析解。将实验装置和小球运动初始条件代入微分方程,利用Matlab分别求解并与实验测量点比较,结果如图7所示。

可以看到,仿真计算的理论图像与实验测量数据点较为吻合。这验证了小球运动微分方程的正确性。

观察图7,小球释放后在某一点附近来回振荡且振幅逐渐减小,最终相对静止于圆环的某一位置。

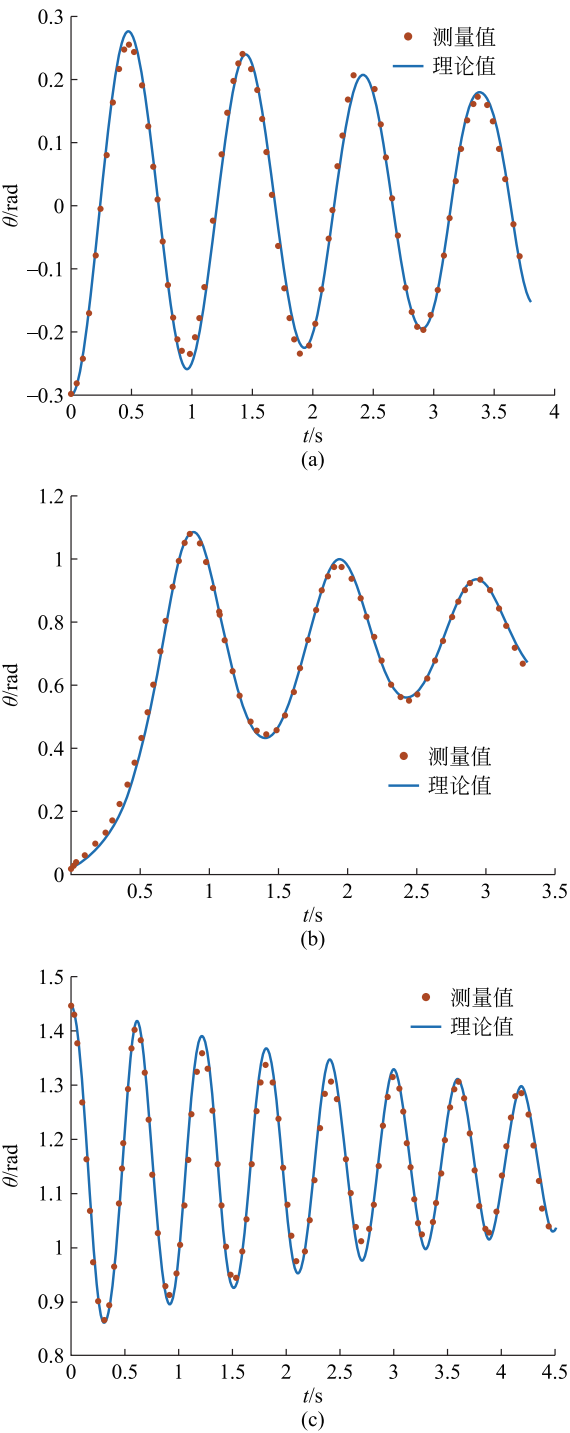


图7 小球运动位置与时间图像

(a) $\omega = (4.62 \pm 0.20) \text{ rad/s}$; (b) $\omega = (12.13 \pm 0.20) \text{ rad/s}$; (c) $\omega = (16.14 \pm 0.20) \text{ rad/s}$

2.3 平衡点

调整不同转速,让小球在最低位受到微扰,记录小球最终平衡点位置。实验结果与理论匹配,存在超临界分叉临界点 $\omega_c = 10.15 \text{ rad/s}$,在临界点两侧的平衡情况截然不同。当圆环转速 $\omega < \omega_c =$

10.15 rad/s 时,小球仅能在最低点 ($\theta = 0$) 处静止; $\omega > \omega_c = 10.15 \text{ rad/s}$ 时,受到微扰的小球会向高处 ($\theta \neq 0$) 运动直至停止,平衡点位置也符合理论预测的图像,如图8所示。

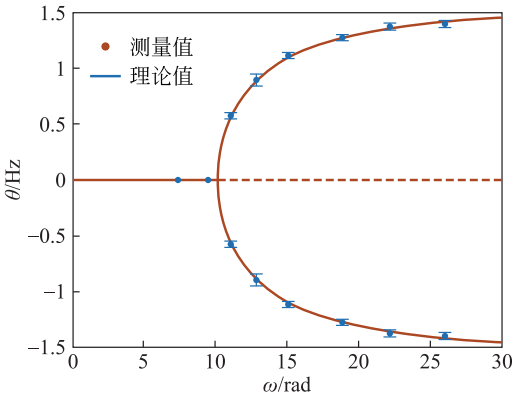


图8 平衡点位置实验与理论对比图

在小球稳定在平衡点后,让小球受到微扰以判断平衡稳定性。结果与理论一致,如表1所示。其中,不稳定平衡情况下,不受到微扰的小球在静摩擦控制下可以停留在圆环最低点,但一旦微扰克服静摩擦,小球便会立刻向高处运动直至停止,不再回到最低点。

表1 平衡稳定性

圆环转速/(rad/s)	平衡点/rad	稳定性
7.40	0	稳定平衡
11.09	0.578	稳定平衡
11.09	0	不稳定平衡

2.4 小振动周期

根据视频,测量不同转速下小球的小振动周期,得到了表2的实验数据。

表2 小球振动周期

圆环转速/(rad/s)	4.68	11.09	13.87	17.48	20.59
振动周期/s	0.975	1.372	0.769	0.600	0.463

实验和理论结果如图9所示,振动周期实验值与理论值匹配较好。

这里有趣的是,小球的小振动周期不是单调的,而是关于 ω_c 的分段函数。当 $\omega < \omega_c$ 时,振动周期随 ω 增大而增大,也即振动频率变小;当 $\omega > \omega_c$ 时,振动周期随 ω 增大而减小,振动频率变大。

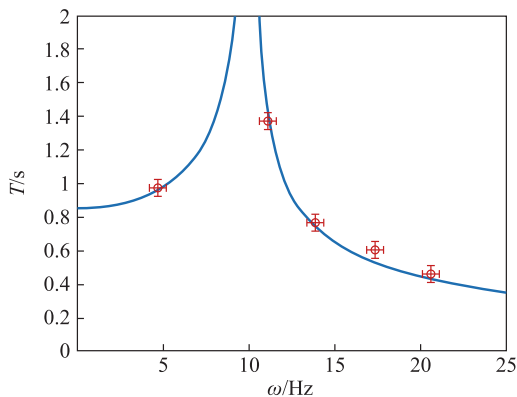


图9 小振动周期实验与理论对比图

这一点也可以从图7中看出。

2.5 受迫振动

理论上,在旋转轴与水平面夹角较小的情况下,小球的运动为受迫振动。将电机平台一侧提高,使圆环旋转轴与竖直形成小角度($\alpha = 4.9^\circ$)。调整圆环转速在共振频率附近,待小球振动稳定后,测量受迫振动振幅。

钢制小球的实验与理论结果对比如图10所示,受迫振动的振幅实验值,除去共振频率($\omega_r = 5.96 \text{ rad/s}$)处尖峰数据有较大误差外,其余位置理论与实验匹配度较好。

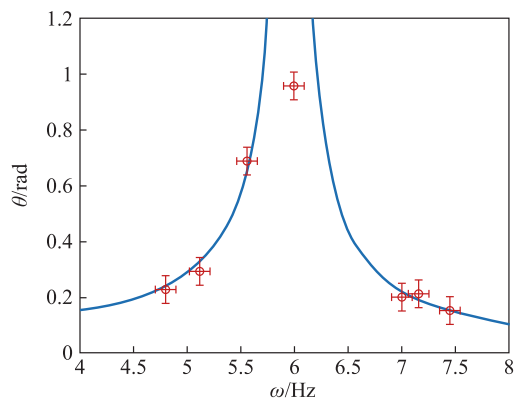


图10 受迫振动振幅实验与理论对比图(钢制小球)

在共振频率附近,由于小球的黏滞阻力较小,理论上的受迫振动振幅会超过 π ;但在实际装置中,小球受到环的几何约束以及重力影响,运动范围不会超过式(8)的范围。尖峰数据不匹配可能的原因是小球运动振幅较大时难以保证纯滚动,运动状态、摩擦形式和系数等因素干扰较大。因此,我们更换质量更轻,黏滞系数更大($\beta = 1 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$)的木球作为研究对象,并调整圆环

旋转轴倾斜角 $\alpha = 2.76^\circ$,再次实验,结果如图11所示。虽然小球受到周围环境的影响更大,但实验值包括共振频率($\omega_r = 5.35 \text{ rad/s}$)附近的数据均与理论较好匹配。这证明了圆环转轴小角度倾斜下,小球存在受迫振动。

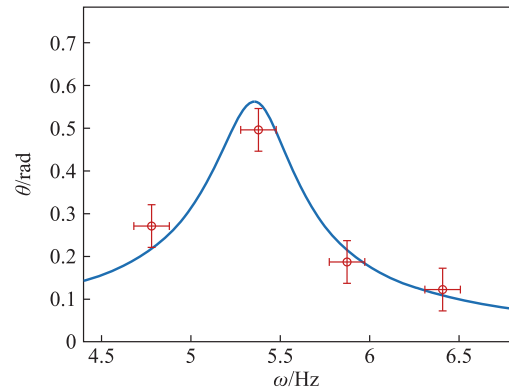


图11 受迫振动振幅实验与理论对比图(木球)

3 结语

本文从理论和实验上探究了力学中一个教科书问题;将小球视为刚体,利用分析力学方法重写了珠子的运动方程,并计算了相关动力学参数;通过实验和计算机求解模型相结合的方法,验证了理论模型的可靠性和契合度。

受限于实际测量条件的限制,本文对于小球所受摩擦力的变化和初始速度的改变等未能进行充分研究讨论。

参考文献

- [1] GOLDSTEIN H, POOLE C P, SAFKO J L. Classical Mechanics[M]. 3rd ed. Boston: Addison-Wesley, 2002: 67.
- [2] STROGATZ S H. Nonlinear Dynamics and Chaos with Student Solutions Manual[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2018: 62-70.
- [3] 秦允豪,黄凤珍,应学农.普通物理学教程:热学[M].4版.北京:高等教育出版社,2018:125.
- [4] 漆安慎,杜婵英.普通物理学教程:力学[M].3版.北京:高等教育出版社,2012:240-243.
- [5] 邵云,宴瑾.浅议滚动摩擦及轿车最大速度的估算[J].物理与工程,2020,30(4):96-101.
SHAO Y, DOU J. A brief discussion on rolling friction and an estimation of the maximum speed of a car[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(4): 96-101. (in Chinese)
- [6] RAVIOLA L A, VELIZ M E, SALOMONE H D, et al. The bead on a rotating hoop revisited: An unexpected resonance[J]. Eur. J. Phys., 2017, 38(1): 015005.