

分光计实验中竖向偏角对测量结果的影响

刘安平 孙子杰 杨东侠 刘 敏 刘 婷 何光宏 韩 忠
(重庆大学物理国家级实验教学示范中心, 重庆 400044)

摘 要 分光计通常使用阿贝式目镜的望远镜, 用自准直法调节光路。实验中对光路的调节要求较高, 因此对仪器的精度和可靠性要求亦高, 载物台的凹凸不平、望远镜的松动等仪器自身因素都会影响光路的调节, 进而影响实验结果。本文旨在研究初始竖向偏角与最小偏向角的关系, 以及竖向偏角对实验观测的影响。通过原理分析、Matlab 和布尔数值模拟, 给出了实验误差偏大的可能原因和相应的解释; 同时, 通过分析实验数据判断仪器本身是否存在缺陷, 并给出减小实验系统误差的建议, 以达到深化教学内容、启发学生钻研精神的目的。

关键词 分光计; 竖向偏角; 最小偏向角

INFLUENCE OF VERTICAL DEFLECTION ANGLE ON MEASUREMENT RESULTS IN SPECTROMETER EXPERIMENT

LIU Anping SUN Zijie YANG Dongxia LIU Min LIU Ting HE Guanghong HAN Zhong
(National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Chongqing University, Chongqing 400044)

Abstract Spectrometer usually uses a telescope of the Abbe type to adjust the optical path by self-collimation. In the experiment, there are high requirements for the adjustment of the optical path, so the accuracy and reliability of the instrument requires perseverance. The irregularity of the stage, the looseness of the telescope and other factors of the instrument will affect the adjustment of the optical path, and then affect the experimental results. This paper aims to study the relationship between the initial vertical deflection angle and the minimum deflection angle, and the influence of the vertical deflection angle on the experimental observation. Through principle analysis, Matlab and Boolean numerical simulation, the possible reasons for the large experimental error and the corresponding explanations are given. At the same time, the experimental data are analyzed to determine whether there are defects in the instrument itself, and suggestions are given to reduce the error of the experimental system, so as to deepen the teaching content and inspire students' professionalism.

Key words spectrometer; vertical deflection angle; angle of minimum deviation

收稿日期: 2022-05-18

基金项目: 重庆市高等教育教学改革研究重点项目(212005), 重庆市教学改革研究项目(213020), 高等学校教学研究项目(DJZW201935xn+).

作者简介: 刘安平, 男, 副教授, 从事物理实验教学与研究, liuanping@cqu.edu.cn.

引文格式: 刘安平, 孙子杰, 杨东侠, 等. 分光计实验中竖向偏角对测量结果的影响[J]. 物理与工程, 2022, 32(5): 127-132.

Cite this article: LIU A P, SUN Z J, YANG D X, et al. Influence of vertical deflection angle on measurement results in spectrometer experiment[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(5): 127-132. (in Chinese)

在大学物理实验课程中,分光计实验一直是考察和培养学生动手能力的重要内容之一。分光计作为高精度的角度测量仪器,对实验的操作要求较高,仪器的调节是学习该实验的重难点。分光计的实验内容一般为通过测量最小偏向角计算三棱镜的折射率,其误差分析只是简单地归纳为调节和读数两方面带来的误差^[1-5]。但是作者在实验中发现有意思的一点,通过统计一个教学班的测量数据发现,测量误差总体上为偏大,只有少数偏小,不符合统计规律,因此可以判断误差的主要原因并非读数引起的随机误差,而很可能是仪器本身或者操作中带来的系统误差。基于该判断,本文通过对实验原理和成像分析,找出误差来源,并利用 Matlab 模拟和布尔模拟入射光与主光轴的竖向夹角与最小偏向角之间的关系,给出实验误差偏大的详细解释。

1 实验原理

1.1 玻璃三棱镜折射率的测量

当光通过玻璃三棱镜时,传播方向发生改变,入射光与出射光所成的夹角称为偏向角,用 δ 表示,如图 1 所示。

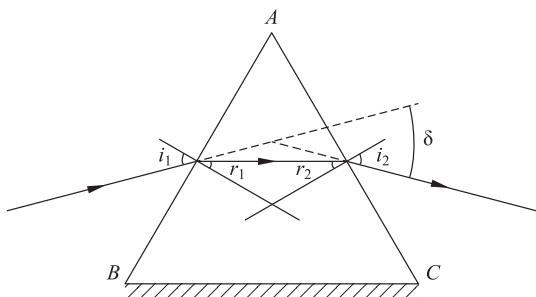


图1 光在棱镜主截面内的折射

按折射定律和数据推导,有

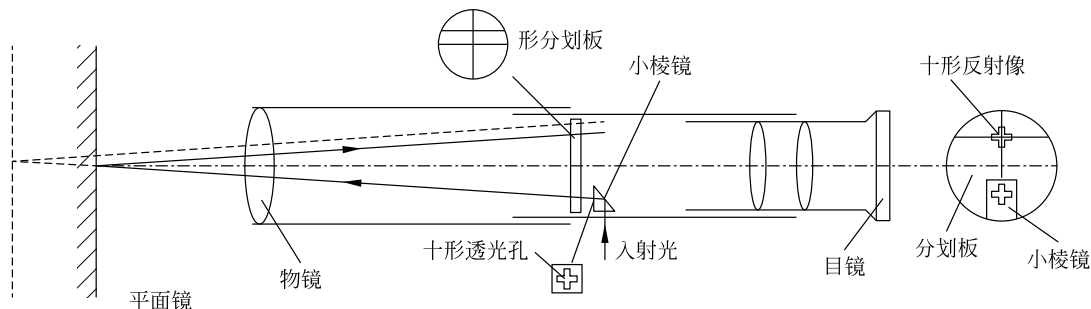


图2 阿贝型自准直望远镜

$$\begin{cases} A = r_1 + r_2 \\ \delta = i_1 + i_2 - A \\ n \sin r_1 = \sin i_1 \\ n \sin r_2 = \sin i_2 \end{cases} \quad (1)$$

当 $r_1 = r_2$, $i_1 = i_2$, 偏向角 δ 有最小值

$$\delta_{\min} = 2i_1 - A \quad (2)$$

棱镜折射率 n 为

$$n = \frac{\sin(A + \delta_{\min}) / 2}{\sin A / 2} \quad (3)$$

故只要测得三棱镜的顶角 A 和最小偏向角 $\delta_{\min}$, 就可测量出玻璃的折射率。

1.2 望远镜的自准直原理

分光计通常使用阿贝式目镜的望远镜,其剖面图如图 2 所示,由光源发射入射光,入射光在主光轴的下侧通过小棱镜射出,经物体反射后在视野上方区域成像。由成像原理易知,当且仅当小棱镜处在物镜的焦平面上,主光轴垂直于平面镜时,才满足准直条件,让亮十字光线通过物镜形成一束平行光线,经过反射或折射后进入望远镜并成像在望远镜的焦平面上^[6-8]。

假设某一时刻平面镜垂直于主光轴,此时刚好满足自准直,反射的光恰好使得视野中的反射像与上方水平叉丝重合。但若将平面镜取下换成三棱镜时,三棱镜光学面反射的十字像不一定再与上方水平叉丝重合。而教学中一般认为“当平面镜正反两面反射亮十字像均与上方水平叉丝重合,则望远镜的主光轴已与三棱镜光学面垂直”的做法是一种近似处理的结果。

2 仪器误差对实验的影响

2.1 误差成因

根据自准直原理,厂家在设计分光计时将十字分划板与物镜光心的距离设置为一倍焦距,以

达到光学设备的等高共轴。但实验设备在长期使用后会带来诸多问题,如载物台的凹凸不平、分划板的移位、小棱镜的松动等,这些仪器问题最终会对成像位置、玻璃三棱镜与水平面的夹角等物理量产生不可忽略的影响。为验证这一猜想,实验者以一台使用多年的分光计进行测量,得到 10 次实验数据结果,如表 1 所示。

表 1 展示了 10 次的测量结果,可以发现观测结果整体偏大,说明存在系统误差,并起主要作用。在实验时按照实验步骤调节望远镜与载物台,依然能使反射十字像与分划板上水平叉丝重合。但实际上,光路与玻璃三棱镜的光面可能存在初始竖向夹角,并非真正意义上的“准直”状态,进而影响测量结果。

2.2 对实验观测的影响

入射光与三棱镜位置关系的俯视图分为两大类,如图 3 所示。

由于(a)和(b)反对称,不妨先假设三棱镜与入射光的关系如图 3(a)所示,设玻璃三棱镜无穷大,

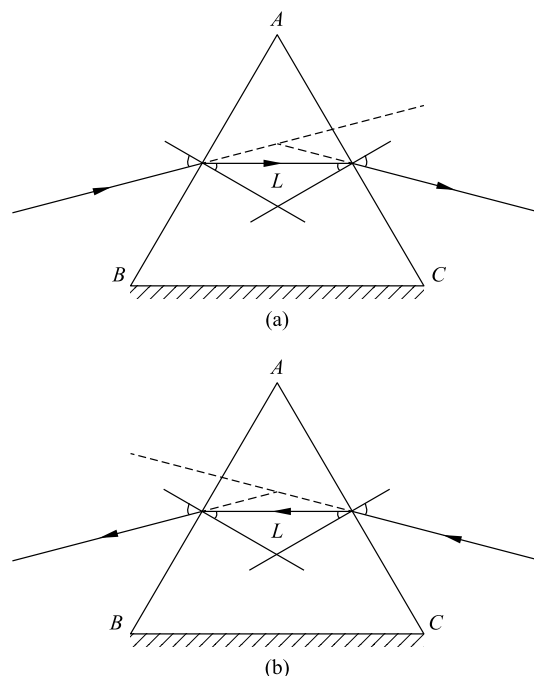


图 3 入射光与三棱镜的相对位置关系示意图

如图 4 所示,以入射点为原点,建立坐标系, y 轴的

表 1 同一台分光计下 10 次学生实验结果

次数	φ_1	φ_2	δ	$\delta_{\min}$ 测量值	$\delta_{\min}$ 理论值	测量误差
1	$203^{\circ}11'$	$164^{\circ}24'$	$38^{\circ}47'$	$38^{\circ}46'$	$38^{\circ}46'40''$	$-0'40''$
	$23^{\circ}11'$	$344^{\circ}26'$	$38^{\circ}45'$			
2	$203^{\circ}16'$	$164^{\circ}26'$	$38^{\circ}50'$	$38^{\circ}50'$		$3'20''$
	$23^{\circ}16'$	$344^{\circ}27'$	$38^{\circ}49'$			
3	$203^{\circ}42'$	$164^{\circ}52'$	$38^{\circ}50'$	$38^{\circ}48'$		$1'20''$
	$23^{\circ}41'$	$344^{\circ}54'$	$38^{\circ}47'$			
4	$206^{\circ}37'$	$167^{\circ}49'$	$38^{\circ}48'$	$38^{\circ}48'$		$1'20''$
	$26^{\circ}39'$	$347^{\circ}51'$	$38^{\circ}48'$			
5	$202^{\circ}31'$	$163^{\circ}42'$	$38^{\circ}49'$	$38^{\circ}56'$		$9'20''$
	$22^{\circ}31'$	$343^{\circ}40'$	$38^{\circ}51'$			
6	$221^{\circ}05'$	$182^{\circ}15'$	$38^{\circ}50'$	$38^{\circ}48'$		$1'20''$
	$41^{\circ}04'$	$2^{\circ}17'$	$38^{\circ}47'$			
7	$204^{\circ}22'$	$165^{\circ}29'$	$38^{\circ}53'$	$38^{\circ}52'$		$5'20''$
	$24^{\circ}20'$	$345^{\circ}30'$	$38^{\circ}50'$			
8	$202^{\circ}57'$	$164^{\circ}07'$	$38^{\circ}50'$	$38^{\circ}50'$		$3'20''$
	$22^{\circ}57'$	$344^{\circ}08'$	$38^{\circ}49'$			
9	$206^{\circ}14'$	$167^{\circ}24'$	$38^{\circ}50'$	$38^{\circ}49'$		$2'20''$
	$26^{\circ}14'$	$347^{\circ}26'$	$38^{\circ}48'$			
10	$203^{\circ}24'$	$164^{\circ}31'$	$38^{\circ}53'$	$38^{\circ}52'$		$5'20''$
	$23^{\circ}23'$	$344^{\circ}33'$	$38^{\circ}50'$			

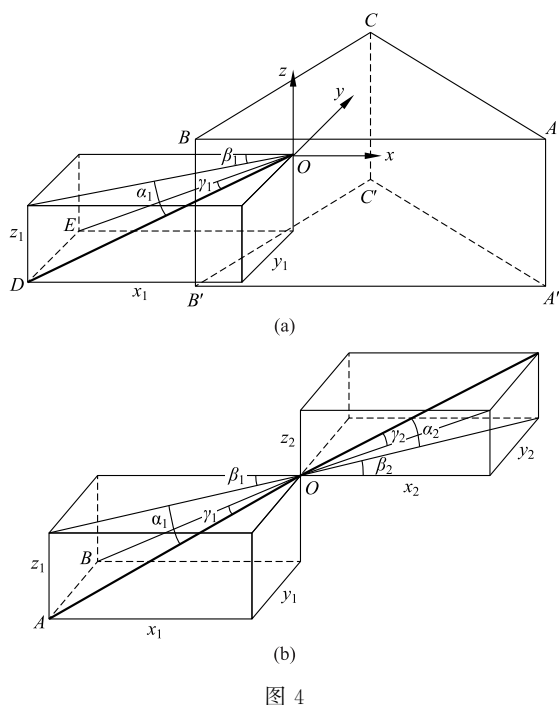


图 4 (a) 入射光角度图; (b) 第一次折射图

反向延长线即为法线,称 α_1 为入射光的竖向偏角, β_1 为入射光的横向偏角, γ_1 为入射光与入射光面的夹角。

以入射点为原点,截取单位长度的入射光 DO, DO 在坐标轴上的投影长度之比为

$$x_1 : y_1 : z_1 = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 : \cos\alpha_1 \sin\beta_1 : \sin\alpha_1 \quad (4)$$

$$\gamma_1 = \arcsin(y_1 / (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)) \quad (5)$$

由折射定律,折射发生在光线与三棱镜表面夹角最小的平面内: $\frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = n > 1$ 。

第一次折射出的光的方向向量为

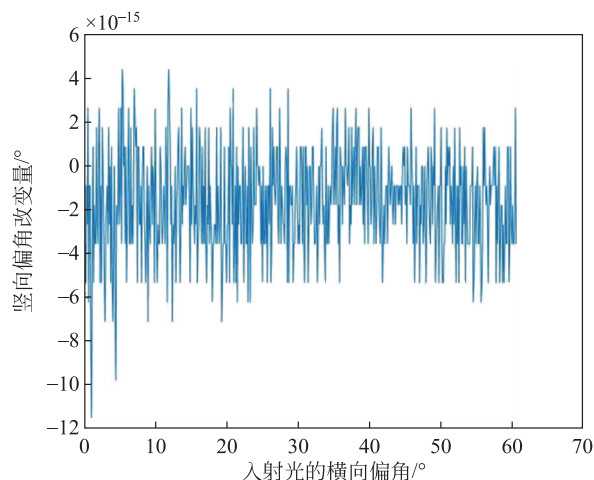
$$s = (\cos\alpha_1 \cos\beta_1, \tan\gamma_2 \sqrt{\sin^2 + \cos^2 \cos\beta_1^2}, \sin\alpha_1) \quad (6)$$

转换参考系,以第二次折射点为坐标原点,并将原参考系按顺时针方向旋转 60° ,以保证 y 轴仍垂直于折射面,第二次入射光相对于第二次折射平面的竖向偏角 $\alpha_3 = \alpha_2$,横向偏角 $\beta_3 = \beta_2 + 60^\circ$,因此

$$\begin{cases} x_3 : y_3 : z_3 = \cos\alpha_3 \cos\beta_3 : \cos\alpha_3 \sin\beta_3 : \sin\alpha_3 \\ \gamma_3 = \arcsin(y_3 / (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)) \\ \frac{\cos\gamma_3}{\cos\gamma_4} = \frac{1}{n} < 1 \\ \alpha_4 = \arcsin\left(\frac{z_4}{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2}\right) \end{cases} \quad (7)$$

光线经过三棱镜后的竖向偏角改变量 $\Phi = \alpha_4 - \alpha_1$

假设实验仪器存在竖向偏角,为方便找出规律,取一个较大值(竖向偏角 5°)为例,通过数值模拟,得出 Φ 与初始竖向偏转角之间的关系,如图 5 所示。

图 5 竖向偏角为 5° 时不同横向偏角对竖向偏角改变量的影响

由此可以看出改变横向偏角几乎不影响竖向偏角改变量,可以近似认为 $\alpha_4 = \alpha_1$ 。因此,竖向偏角的存在对于实验观测的影响是光在通过分光计时的位置错动,如图 6 所示。

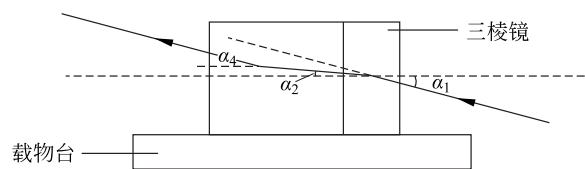


图 6 光在三棱镜中的折射

竖向错动距离的计算公式为

$$d = L(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \quad (8)$$

其中, L 为光在分光计中路径在玻璃三棱镜顶面的投影长度(见图 3),本实验使用的三棱镜边长为 2.5cm,假设三棱镜摆放在载物台中心,则最小偏向角状态下 $L = 1.25\text{cm}$,若初始竖向偏角为 2° , d 约为 0.15mm,通过望远镜观测后在视野中大约占 1/10 的上准线到中准线之间的距离。

因此,在实验调节到最小偏向角位置时,可以将通光狭缝旋转至水平,然后观察狭缝是否有肉眼可见地偏离中心位置,如果存在,则说明实验存在初始竖向偏角,若多次重新实验一直存在此现象,说明该仪器有仪器误差。

2.3 对最小偏向角的影响

入射光与主光轴的竖向夹角与最小偏向角的关系直接通过理论推导并不容易得到,我们利用 Matlab 对光线在三棱镜中的折射轨迹进行了数值模拟,得到二者的关系散点与拟合曲线图 7(a)。拟合过程使用的三棱镜对绿光的折射率的标准值为 1.51829。

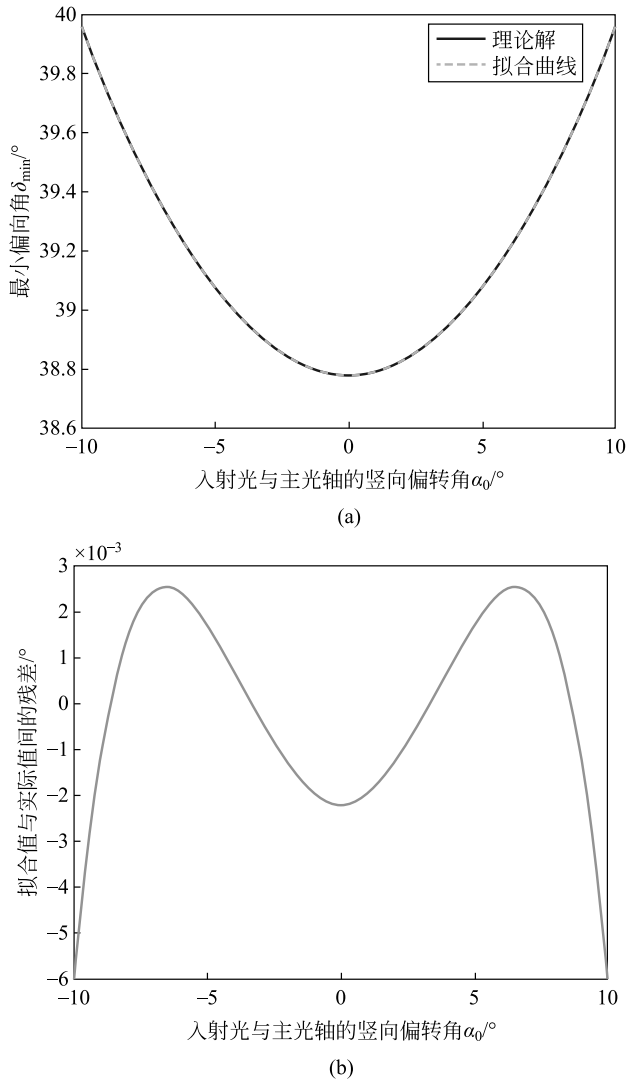


图7 初始竖向偏角对最小偏向角的影响
(a) 使用最小二乘法拟合的曲线图; (b) 拟合残差图

通过最小二乘法对竖向初始偏角与最小偏向角的关系进行多项式拟合,综合比较各阶拟合结果,最终选取拟合程度较好且形式简单的二阶多项式(见图 7(a)),拟合公式为

$$\delta_{\min} = 0.0117\alpha_1^2 + 38.7756^\circ \quad (9)$$

拟合的残差数量级为 10^{-3} (见图 7(b)),说明式(9)能较好地表示初始竖向偏角与最小偏向角

理论值之间的关系。

拟合得出,在无竖向夹角($\alpha_1 = 0$)时,最小偏向角为 38.7756° ,即 $38^\circ 46' 32''$,与在仪器不存在初始竖向偏角的情况下,根据公式(3)计算得出的最小偏向角的理论值 $38^\circ 46' 40''$ (38.7778°)符合。

3 实验数据分析

实验中的误差会使最终测量的最小偏向角 $\delta_{\min}^{\text{测量}}(\alpha_1)$ 与理论值 $\delta_{\min}(\alpha_1)$ 存在偏差,偏差可分为两部分,一部分源于实验时的竖向偏角,另一部分源于读数。

在实际实验过程中,实验仪器的老化情况无法事先得知,因此竖向偏角 α_1 可以看做一均值与方差都未知的正态分布,观测误差 ϵ 为一均值为 0,方差为仪器分度值一半的 $1/3$ ($1/6$ 分)的正态分布。则实验测量的最小偏向角可表示为 $\delta_{\min}^{\text{测量}} = 0.0117\alpha_1^2 + 38.7756 + \epsilon$ ($^\circ$)。最小偏向角概率密度函数应为一 $n=1$ 的卡方分布与一正态分布的叠加,其通解难以使用解析解表示,利用较为灵活的 Burr 类型Ⅲ分布可以通过调整参数近似拟合正态分布与卡方分布。对 α_1 与 ϵ 的进行正态随机生成,可发现最小偏向角测量值 $\delta_{\min}^{\text{测量}}$ 的概率密度曲线所呈现出的分布使用 Burr 类型Ⅲ分布进行拟合有较高的拟合度,故使用该分布对表 1 中所列出的学生实验数据进行拟合(如图 8 所示)。

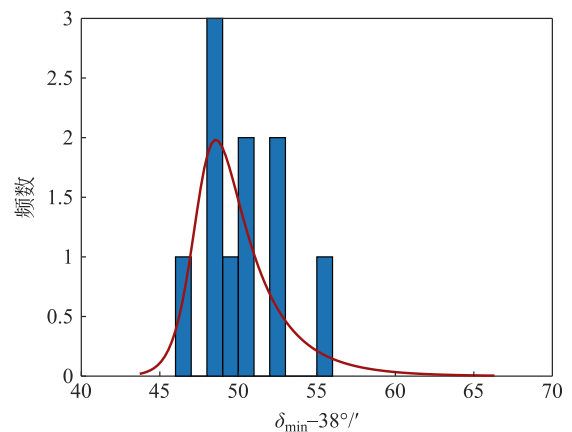


图8 使用 Burr 类型Ⅲ分布拟合实验数据

拟合出的概率密度函数的曲线方程为

$$f(x) = \frac{\frac{kc}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{c-1}}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^c\right)^{k+1}}, \quad x > 0 \quad (10)$$

其中: $a=47.7415$; $c=62.2101$; $k=0.32314$ 。

ϵ 和 α_1 均认为是正态分布,假设 ϵ 均值的绝对值远大于方差,即仪器误差已不可忽略,则有偏态分布概率密度最大的峰值点对应于 ϵ 和 α_1 均取均值的时刻。求解出此实验仪器对应的最大概率的最小偏向角 $38^\circ 48' 32''$,可反算出仪器有 $1^\circ 39'$ 的初始竖向偏角。

本模型存在固有缺陷:当 α_1 本身较小时,反算出的 α_1 会与真实值有较大的偏差,例如,当最小偏向角比理论最小偏向角大 $1'$ 时,反算出的 α_1 已经有 $51' 36''$ 。灵敏度较高甚至导致“四舍六入五凑偶”的数据处理方式会在数据量较少的情况下对统计结果造成较大影响。

故本模型的主要适用范围应为对老化程度较大(竖向偏角较大且带来的误差占主导)的仪器初始竖向偏角进行估算,以及对学生实验数据进行统计分析。

4 结语

实验通过成像原理分析和数值模拟,分析了实验测量普遍误差偏大的可能原因,带有初始竖向偏角的入射光在经过玻璃三棱镜的折射后,望远镜中观测的像的竖向位移并不会非常明显,但会使最终测量的最小偏向角略偏大。本文给出了最小偏向角与竖向偏角之间的关系式,以折射率为 1.51829 的标准值条件下,拟合得出最小偏向角的理论值为 $38^\circ 46' 40''$ 。

实验教学过程中,为了能在有限的学时内完成实验,简化了操作,直接用三棱镜调节其两个光学面的十字像来判定准直,学生实验时往往难以调准直,从而产生竖向偏角影响实验结果;同时实验也容易受到实验设备老化(载物台的凹凸不平、分划板移位、小棱镜松动等)因素带来的竖向偏角的影响。实验时应严格按照操作规范、尽量规避自身调节问题产生的竖向偏角。在实验过程中,可通过以下方法检验仪器是否有较大初始竖向偏角:在调节光谱线至转折现象出现位置处(最小偏向角状态)将狭缝旋转至水平,观察视野中的狭缝像是否有明显的偏离中心位置,如果明显偏离,则说明有较大的初始竖向偏角存在。

上述模型可以对仪器误差进行分析,启发课

程思政,让学生清楚本实验严格规范操作的意义所在;还可通过统计学生测得的最小偏向角反算出初始竖向偏角的大小,对学生的实验细节、动手能力等进行评价,深化教学内容。

参 考 文 献

- [1] 贾翠红,林振杰. 分光计测折射率问题的不确定度分析[J]. 物理通报, 2020(1): 90-93.
JIA C H, LIN Z J. Uncertainty analysis of spectrophotometer measurement of refractive index problem[J]. Physics Bulletin, 2020(1): 90-93. (in Chinese)
- [2] 翁存程,蔡清标,张静. 分光计望远镜与平行光管的共轴调节[J]. 物理与工程, 2012, 22(4): 31-32, 36.
WENG C C, CAI Q B, ZHANG J. Co-axial adjustment of spectrometer telescope and parallel light tube[J]. Physics and Engineering, 2012, 22(4): 31-32, 36. (in Chinese)
- [3] 常相辉,魏云,刘其军,等. “分光计调整和使用”实验常见问题讨论[J]. 物理实验, 2020, 40(5): 18-21.
CHANG X H, WEI Y, LIU Q J, et al. Discussion of common problems in the experiment of “spectrometer adjustment and use”[J]. Physics Experiment, 2020, 40(5): 18-21. (in Chinese)
- [4] 祁玲敏,韩太坤,贺言,等. 分光计调节中的难点分析及调节方法的改进[J]. 大学物理实验, 2019, 32(3): 21-24.
QI L M, HAN T K, HE Y, et al. Analysis of difficult points in spectrometer adjustment and improvement of adjustment methods [J]. University Physics Experiment, 2019, 32(3): 21-24. (in Chinese)
- [5] 王国友,李经纬,邓志宏,等. 一种测量三棱镜折射率的新方法[J]. 大学物理实验, 2019, 32(5): 41-43.
WANG G Y, LI J W, DENG Z H, et al. A new method for measuring the refractive index of trigonal prisms[J]. University Physics Experiment, 2019, 32(5): 41-43. (in Chinese)
- [6] 谢银月. 分光计调整方法的改进[J]. 物理与工程, 2010, 20(4): 36-37, 48.
XIE Y Y. Improvement of spectrophotometer adjustment method[J]. Physics and Engineering, 2010, 20(4): 36-37, 48. (in Chinese)
- [7] 徐国旺,江铭波,杨涛. 分光计调整中的推理过程[J]. 高师理科学刊, 2018(10): 33-35.
XU G W, JIANG M B, YANG T. Reasoning Process in Spectrometer Adjustment[J]. Journal of Advanced Science, 2018(10): 33-35. (in Chinese)
- [8] 尹学爱,郭洪岩,邱光辉. 分光计实验仪器的改进[J]. 实验科学与技术, 2012, 10(4): 185-186.
YIN X A, GUO H Y, QIU G H. Improvement of spectrophotometer experimental apparatus[J]. Experimental Science and Technology, 2012, 10(4): 185-186. (in Chinese)