

物理实验



电磁铁驱动下钢弦的受迫振动的研究

罗艺豪 陈宗强 陈靖 孔勇发

(南开大学物理科学学院, 天津 300071)

摘要 本文研究了在交流电磁铁的驱动下两端固定钢弦的受迫振动, 模拟出磁场的空间分布以及钢弦上的横向受力呈高斯分布, 并基于非齐次弦振动方程对钢弦的振动进行数值模拟。同时自组实验装置观察并测量弦的振动, 从钢弦受迫振动的波形、振动幅度、振动频率三个方面进行研究。研究发现, 在周期性电磁力的驱动下钢弦振动的波形存在稳定的“驻波”模式, 且驱动力频率偏离钢弦固有频率时, 钢弦的振动幅度明显衰减。通过实验验证, 在一定条件下钢弦的振动频率大小是电磁铁的交变电流频率的两倍。

关键词 IYPT; 弦振动; 受迫振动; 电磁铁

INVESTIGATION ON FORCED VIBRATION OF STEEL STRING DRIVEN BY ELECTROMAGNET

LUO Yihao CHEN Zongqiang CHEN Jing KONG Yongfa

(School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract In this paper, the forced vibration of a steel string fixed at both ends under the action of an electromagnet with alternating current is studied. The spatial distribution of the magnetic field and the lateral force with a Gaussian distribution on the string are simulated, and the vibration of the steel string is calculated based on the non-homogeneous string vibration equation. At the same time, the vibration of string is observed and measured by a self-organized experimental device, and studied from three aspects: the waveform, vibration amplitude and vibration frequency of the forced vibration of the steel string. It is found that here is a stable “standing wave” mode in the waveform of steel string vibration driven by periodic electromagnetic force, and the vibration amplitude of the steel string is significantly attenuated when the driving force frequency deviates from the natural frequency of the steel string. The experimental results show that the vibration frequency of the steel string is twice the frequency of the alternating current of the electromagnet under certain conditions.

Key words IYPT; string vibration; forced vibration; electromagnet

弦振动模型是大学物理中十分重要的物理模型之一, 在大学物理中研究弦的振动也是经常出

现的课题^[1-3]。在我们的日常生活中有许多与振动有关的知识与现象, 如乐器吉他弦振动、桥梁的

收稿日期: 2021-10-08; 修回日期: 2022-02-14

基金项目: 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会 2021 年高等学校教学研究项目(DWJZW202107hb), 教育部产学研合作协同育人项目(202002091038), 南开大学教学改革项目(NKJG2021099, NKJG2021100), 南开大学 2021 年本科实验教学改革项目。

通讯作者: 陈宗强, chenzongqiang@nankai.edu.cn; 陈靖, jingchen@nankai.edu.cn。

引文格式: 罗艺豪, 陈宗强, 陈靖, 等. 电磁铁驱动下钢弦的受迫振动的研究[J]. 物理与工程, 2022, 32(5): 87-91.

Cite this article: LUO Y H, CHEN Z Q, CHEN J, et al. Investigation on forced vibration of steel string driven by electromagnet[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(5): 87-91. (in Chinese)

振动等。由于弦振动的研究广泛而富有趣味性, 被选为 2021 年国际青年物理学家锦标赛(IYPT) 的第 11 题^[4]。题目描述为: 使用电磁铁将周期性的力施加钢制吉他弦上, 研究吉他弦在其共振频率的运动。大多数书本或教材中对弦振动的研究主要体现在对齐次弦振动方程的求解以及对固有频率进行分析, 而对在驱动力作用下的非齐次的弦振动方程的求解在实验与理论的研究较少^[5-6]。

本文主要研究电磁铁驱动作用下的两端固定的钢弦的振动, 模拟了系统的磁场空间分布^[7-8], 并基于非齐次的弦振动方程对钢弦的振动进行数值模拟。利用电磁驱动器、测微目镜、CCD 装置、示波器等仪器自主搭建了一套定量测量钢弦在电磁驱动下的受迫振动的实验装置, 并从振动波形、振动幅度、振动频率等方面研究了钢弦的受迫振动。

1 理论模型

1.1 弦振动模型

为求解弦的振动情况, 我们使用了细弦的横向振动模型。在模型中, 均匀弦线的两端固定, 弦线上的横向振幅远小于弦的总长, 弦的平衡位置处于 x 正半轴, 横向位移量用 y 坐标表示, 如图 1 所示。

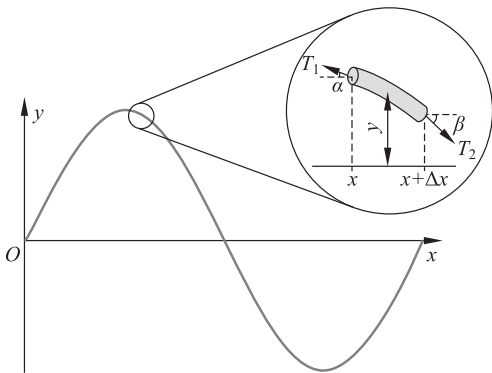


图 1 弦振动的横向振动模型

图 1 中, 取弦上一微元, 设单位弦长所受的横向电磁外力为 $F(x, t)$, 弦密度为 ρ , 两端张力为 T , 总弦长为 l , 微元两端的张力为 T_1 、 T_2 , 倾角分别为 α 、 β , 设弦振动时的阻尼系数为 γ , 可得

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T \quad (1)$$

$$T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta + F(x, t) dx - \gamma \frac{\partial y}{\partial t} \rho dx = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

且有几何关系

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \\ \tan \beta = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \end{cases} \quad (3)$$

在小幅度振动下, 满足小角近似条件

$$\begin{cases} \tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha \\ \tan \beta \approx \sin \beta \approx \beta \end{cases} \quad (4)$$

同时有 $\cos \alpha \approx 1$, $\cos \beta \approx 1$, 可得弦振动的方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (5)$$

边界条件和初始条件如下

$$\begin{cases} y(0, t) = y(l, t) = 0 \\ y(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

1.2 系统磁场与弦振动驱动力分析

电磁铁驱动钢弦振动的模型如图 2。电磁铁在输入频率为 ω 的交流电流条件下产生了空间交变磁场 $B = B_0 \sin \omega t$, 其中, B_0 为磁感应强度的初值。钢弦被磁化, 弦上出现磁矩分布。而这些磁矩在不均匀磁场下受到磁力作用, 从而驱动钢弦做受迫振动。

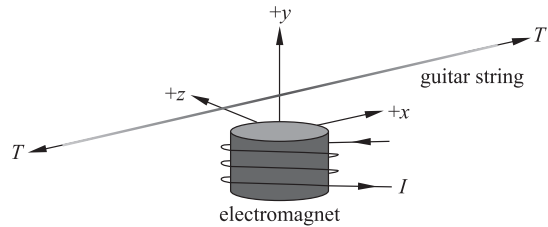


图 2 电磁铁驱动钢弦振动模型

由理论分析, 可以模拟系统磁场分布如图 3 所示, 其表示在电磁铁驱动下钢弦振动磁感应强度分布与磁力线分布。

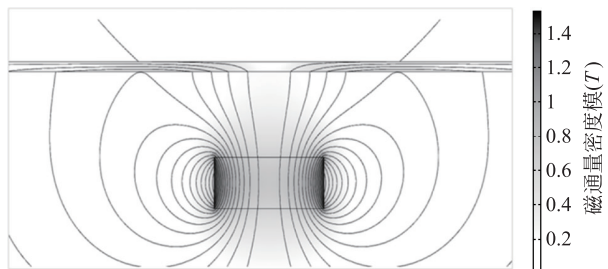


图 3 模拟磁场分布

为了得到钢弦受力随位置的关系,我们对电磁铁驱动下吉他弦的横向受力大小的线密度随坐标分布进行了数值模拟,并将模拟结果进行高斯拟合,如图4所示,拟合的 R^2 值为0.99。

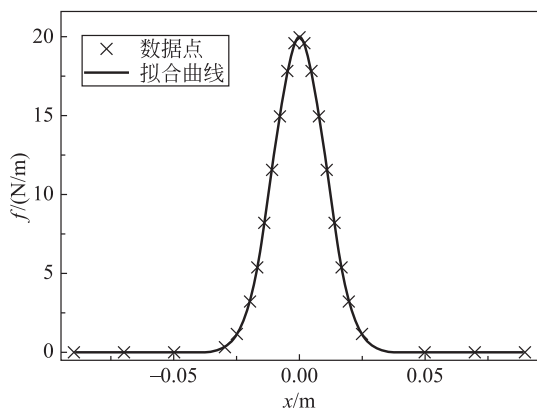


图4 钢弦横向受力大小线密度随位置分布拟合图。其中,磁铁直径为1.50cm,磁铁高度为3cm,钢弦直径为0.33mm,钢弦相对磁导率为4000,激励电流为1.0 A,线圈匝数为3000圈,钢弦中心与磁铁上表面距离为0.5cm

由于电磁铁的尺寸远小于弦的长度,磁场主要集中在电磁铁附近,由图4可得到钢弦的受力随位置的关系呈高斯分布,设 x_0 为磁铁中心所在位置,磁铁半径为 a ,可得

$$F(x, t) \propto e^{-\left(\frac{x-x_0}{2a}\right)^2} \quad (7)$$

对于50Hz的交流电产生的交变磁场,其变化时产生的电场对于本身电流产生的电场相比可以忽略,此时空间中的麦克斯韦应力张量由磁场部分贡献,其大小正比于磁感应强度平方的梯度,而钢弦单位弦长的受力大小可写成麦克斯韦应力张量的面积分的形式,故可知单位弦长受力与磁感应强度平方的梯度成正比。由此可知单位弦长受力与磁感应强度模平方成正比,而磁场大小随时间呈正弦变化,可得

$$F(x, t) \propto \sin^2 \omega t \quad (8)$$

单位弦长受力表示为

$$F(x, t) = A e^{-\left(\frac{x-x_0}{2a}\right)^2} \sin^2 \omega t \quad (9)$$

即为该模型下的钢弦单位长度所受磁力的近似表达式,其中 A 为比例系数。

1.3 弦振动的模拟

对该非齐次偏微分方程所决定的弦振动过程进行模拟,可发现系统共振频率附近的振动出现驻波的振动波形,如图5所示。

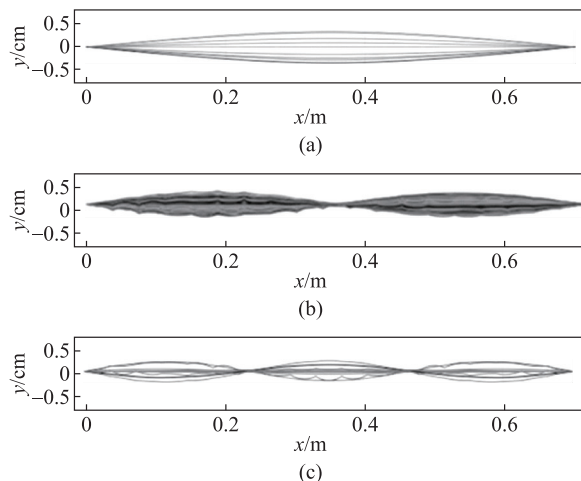


图5 弦振动波形模拟图。其中模拟参数中钢弦弦长为0.7m,弦张力为3N,弦的线密度为 $7.6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$,单位长度上钢弦横向受力的比例系数 A 为20N/m,磁铁宽度设置为1.5cm,磁铁中心位置距离钢弦左端的距离分别为(a)0.35m、(b)0.175m与(c)0.35m,输入电流频率分别为(a)45Hz、(b)90Hz与(c)135Hz

2 实验探究

2.1 实验装置

我们通过电磁驱动器、钢弦、信号发生器、示波器、测微目镜以及CCD等仪器自主设计并搭建的实验装置如图6所示。

图6(b)中,装置使用信号发生器的驱动传感器作为电磁铁对钢弦施加周期性的磁力,使之发生周期性的受迫振动;利用CCD装置组合测微目镜对弦的局部区域的振动进行观测,同时使用传感器连接示波器并探测弦的振动;钢弦的一端固定,另一端通过滑轮连接着悬挂砝码的托盘并控制弦的张力。

2.2 弦的振动波形探究

利用信号发生器向传感器中(其结构相当于电磁铁)输入一定频率的正弦信号,使之产生周期性变化的磁场,从而驱动钢弦的振动。

改变信号发生器的输出频率和传感器的位置,当振动频率接近钢弦的固有频率时,我们可以观察到弦的振动呈类似于驻波的波形,出现了明显的波腹和波节如图7所示,实验现象与图5模拟结果一致。

为了在实验中得到钢弦的整体振动波形图像,我们使用移动光源垂直钢弦补光,同时利用长曝光的方式得到了波数 $N=1, 2, 3$ 的三张图片。图7中长波段的弦线为实验中振动着的钢弦,钢

弦下方是电磁驱动装置。

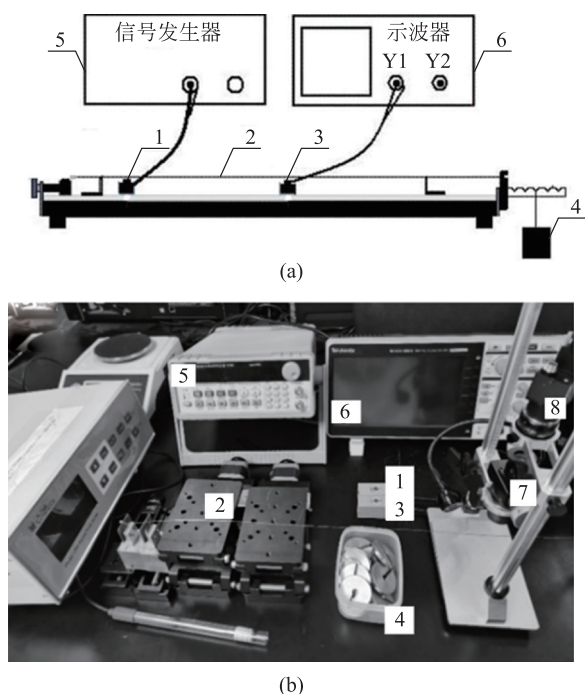


图6 实验装置示意图(a)及实物图(b)。图中1为电磁驱动器,2为钢弦,3为接收传感器,4为钩码,5为信号发生器,6为示波器,7为测微目镜,8为CCD成像系统

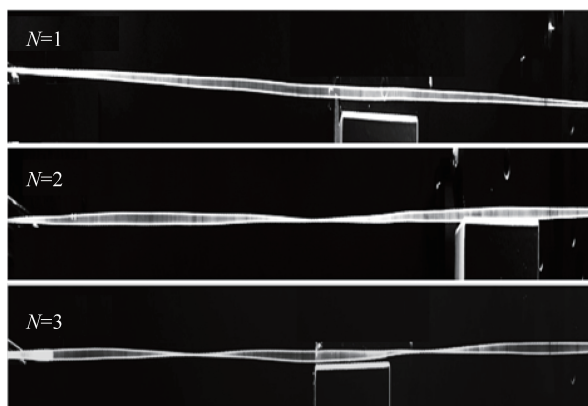


图7 不同波数下的波形振动图

钢弦长度为0.7m、钢弦直径为0.33mm,电磁铁的电压输入峰峰值为10.0V,钢弦中心距离磁铁距离为0.85cm,输入的交流信号的频率随着波数N的增大依次为45Hz、90Hz、135Hz,磁铁中心位置距离弦左端点的距离随着波数N的增大依次为35.00cm、17.80cm、38.00cm

2.3 弦的振动幅度探究

由弦振动方程可知,连续改变信号发生器的频率,弦的振动频率越接近其固有频率,弦的振动幅度越大,反之则振动幅度迅速衰减。

通过光源补光,CCD装置组合测微目镜对钢弦的局部区域进行拍摄,可观测到钢弦在电磁驱

动力驱动下的振动情况,实验中钩码总质量为235.1g,弦的密度为 $8.92 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弦线长度为68.00cm,弦的直径为0.33mm,磁铁表面距离钢弦平衡位置的距离为1.00cm,输入电压峰峰值为10.0V。

图8展示了不同频率下钢弦的振动图,此时钢弦的固有频率为 $f_0 = 32.43 \text{ Hz}$ 。在该频率附近,钢弦的中点的振动幅度 A_0 对频率 f 的改变出现明显的响应,弦的振动频率越接近其固有频率,弦的振动幅度越大,反之则振动幅度迅速衰减。

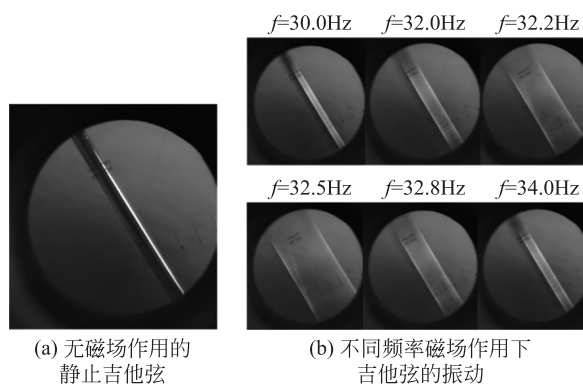


图8 钢弦振动实验图

(a)表示无磁场驱动时的吉他弦;(b)表示在不同频率下磁场驱动时的吉他弦振动图

在控制弦长与张力等其他变量不变的情况下,调节电磁驱动装置的输入电流频率,可以使得钢弦的振动频率发生连续变化,利用测微目镜与CCD装置可以测量出弦线中点的振幅大小,该值可以反应出弦整体的振动情况,而弦振动频率具体值则可通过示波器提取信号得出。可以得出钢弦振幅随振动频率变化图如图9所示。

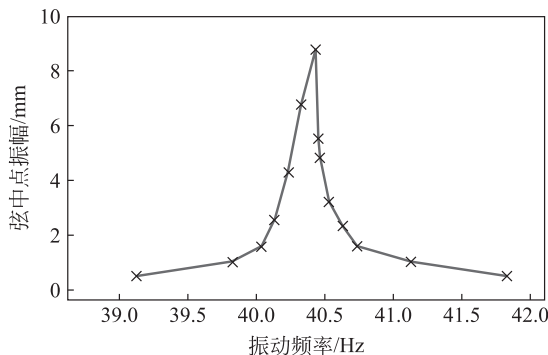


图9 钢弦的振幅随振动频率变化图

2.4 弦振动频率探究

在使用传感装置驱动钢弦进行振动的同时,利用另一接收传感器将弦的振动转换为了示波器

上的电信号。设置总弦长为 $l=0.70\text{m}$, 张力 $T=0.231\text{N}$, 弦线的线密度为 $\rho=8.92\times 10^3\text{kg/m}^3$ 。提取示波器中的振动信号, 得到振动信号值随时间变化图, 可以得出钢弦振动的周期与频率。

改变驱动传感器(电磁铁)的输入电流的频率, 可以得到钢弦振动频率随输入电流的频率的变化, 即钢弦振动频率随磁场频率的变化关系, 如图 10 所示。

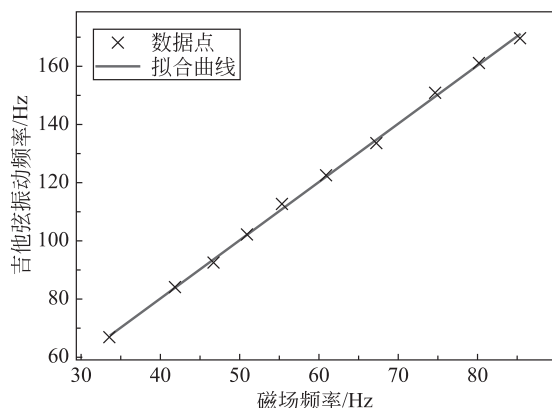


图 10 钢弦振动频率随磁场频率的变化关系图

由图 10 可得拟合直线的斜率为 $k=2.05\pm 0.08$, 那么钢弦振动的频率等于电磁铁电流频率的两倍。根据之前的理论, 由公式(8)可知钢弦上受到电磁力与 $\sin^2\omega t$ 呈正比例关系, 当交流电的磁场变化频率为 ω 时, 钢弦的振动频率为 2ω 。这也就验证了电磁铁驱动下钢弦的受迫振动频率是电磁铁输入电流频率的两倍的关系。

3 结语

本文利用弦振动模型分析了钢弦在电磁铁驱动下的振动情况, 模拟模型中空间磁场分布并求解了弦振动方程。通过模拟得到钢弦的受力随位置的关系为高斯分布曲线。同时, 设计了一系列实验来对弦振动的波形、振动幅度、振动频率等进行研究, 理论与实验研究发现: 在周期性电磁力的驱动下, 弦振动的波形出现驻波模式, 且频率越接近弦的固有频率时弦的振动幅度越大, 弦振动的频率也与电磁铁的交变电流频率呈两倍的关系。

钢弦的振动可能出现二维的情况, 即钢弦在竖直、水平方向上同时振动。由于电磁铁对钢弦的驱动力在水平和竖直方向上并不相同, 同时电磁驱动装置中永磁体剩磁的存在将使钢弦在水

平、竖直两个方向上振动的固有频率发生偏移^[10-11], 这些增加二维修正后弦振动模型的复杂性, 我们将在后续的工作中对这一现象进行更深入的研究。

参 考 文 献

- [1] 沈元华, 陆申龙. 普通物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 浦天舒. 弦振动实验中阻力系数的测定[J]. 物理与工程, 2015, 25(4): 54-56.
PU T S. Measurement of resistance coefficient in string vibration experiment[J]. Physics and Engineering, 2015, 25(4): 54-56. (in Chinese)
- [3] 吕斯骅, 段家祗. 新编基础物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [4] International Olympic Committee. Problems for the 34th IYPT 2021[Z/OL]. [2022-01-29] <https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-34th-iypt-2021>.
- [5] 宋浩, 黄彦, 邓志扬, 等. 几组特殊形状永磁体的磁场及梯度 COMSOL 分析[J]. 大学物理实验, 2013, 26(4): 7-11.
SONG H, HUANG Y, DENG Z Y, et al. Magnetic field and gradient COMSOL analysis of several permanent magnets with special shapes[J]. College Physics Experiment, 2013, 26(4): 7-11. (in Chinese)
- [6] 张克通, 王化明. 圆柱永磁体磁场及磁力分析[J]. 机械制造与自动化, 2010, 39(3): 161-164.
ZHANG K T, WANG H M. Magnetic field and magnetic force analysis of cylindrical permanent magnet[J]. Machine Building and Automation, 2010, 39(3): 161-164. (in Chinese)
- [7] 周恩权, 郑仲桥, 张燕红, 等. 圆柱形永磁体磁场建模及仿真研究[J]. 河南科技, 2017, 23(11): 139-143.
ZHOU E Q, ZHENG Z Q, ZHANG Y H, et al. Magnetic field modeling and simulation of cylindrical permanent magnet[J]. Henan Science and Technology, 2017, 23(11): 139-143. (in Chinese)
- [8] 杨禄权, 孙子阳, 周志奇. 基于永磁体磁场的数值计算与仿真分析研究[J]. 河北农机, 2021, 27(3): 111-113.
YANG L Q, SUN Z Y, ZHOU Z Q. Numerical calculation and simulation analysis of permanent magnet magnetic field[J]. Hebei Farm Machinery, 2021, 27(3): 111-113. (in Chinese)
- [9] 韩建民. 数学物理方法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2011.
- [10] 焦春, 程熹, 舒达. 张紧弦振动的频率偏移[J]. 物理实验, 2005, 25(4): 45-48.
QIAO C, CHENG X, SHU D. Vibration frequency shift of tensioned string[J]. Physics Experiment, 2005, 25(4): 45-48. (in Chinese)
- [11] FEINBERG J, YANG B. Natural-frequency splitting of a guitar string caused by a non-uniform magnetic field[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 144(5): 460-464.