

## 圆周运动的一种特殊分解方法

张 静

(江苏省淮阴中学, 江苏 223002)

**摘 要** 高中阶段通常会用运动合成或分解的方法来处理匀变速直线运动、平抛运动、类平抛运动及一般的匀变速曲线运动,但能否用运动合成或分解的方法处理高中阶段另一种重要的运动——圆周运动呢?本文以带电粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动为例进行分析与验证,得出相关结论,并用这种方法分析两个具体的问题。

**关键词** 分解;圆周运动;圆心的位置;GeoGebra

## A SPECIAL DECOMPOSITION METHOD OF CIRCULAR MOTION

ZHANG Jing

(Huaiyin Middle School, Jiangsu 223002)

**Abstract** In senior middle school physics course, the method of composition and resolution of motions is usually used to deal with uniform variable rectilinear motion, horizontal projectile motion, quasi flat throwing motion and general uniform variable curvilinear motion. Could this method be applied to deal with circular motion that is another important motion in senior middle school physics course? In this paper, the uniform circular motion of charged particles in a uniform magnetic field is analyzed and verified, and relevant conclusions are obtained. Besides, two specific cases are analyzed by this method.

**Key words** decomposition; circular motion; position of the center of a circle; GeoGebra

运动的合成与分解是处理复杂运动的常用方法,高中阶段常用这种方法来处理匀变速直线运动、平抛运动、类平抛运动及一般的匀变速曲线运动。针对不同的问题,同一个匀变速曲线运动还可以用不同的分解方法。那么,能否用这种方法处理另一种重要的曲线运动——圆周运动呢?

大学课程中指出可以将匀速圆周运动分解为两个互相垂直方向的简谐运动,能否有其他的分解方法呢?本文将带电粒子在匀强磁场中作匀速圆周运动为例进行分析说明。

### 1 分解粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动

#### 1.1 创建运动情境

假设空间存在垂直于纸面向里的匀强磁场,磁感应强度为  $B$ ,质量为  $m$ 、带电量为  $+q$  的粒子具有沿纸面的初速度  $v_0$ ,易知,粒子将沿逆时针方向做匀速圆周运动,如图 1 所示(为了作图的简洁,图中没有画出磁场,下同),其运动半径为  $r = \frac{mv_0}{qB}$ 、运动的角速度为  $\omega = \frac{qB}{m}$ 。经过时间  $t$ ,粒子

收稿日期:2021-06-29;修回日期:2021-08-08

基金项目:本文为江苏省教育科学“十三五”规划 2020 年度重点课题(批准号为:B-b/2020/02/18)研究成果之一。

作者简介:张静,男,中学高级教师,从事高中物理及物理竞赛教学工作,zj6933@sohu.com。

引文格式:张静. 圆周运动的一种特殊分解方法[J]. 物理与工程,2022,32(3):134-138.

Cite this article: ZHANG J. A special decomposition method of circular motion[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 134-138. (in Chinese)

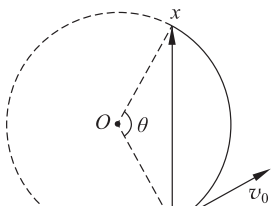


图 1

转动过的角度为  $\theta = \omega t$ , 粒子相对于出发点的位移大小为  $x = 2r \sin \frac{\theta}{2}$ , 可得  $x = \frac{2mv_0}{qB} \sin \frac{qBt}{2m}$ , 位移方向与初速度方向的夹角为  $\frac{\theta}{2} = \frac{qBt}{2m}$ 。

### 1.2 运动的分解

将初速度  $v_0$  沿两任意方向分解, 令两分速度  $v_1, v_2$  与  $v_0$  的夹角分别为  $\alpha, \beta$ , 如图 2 所示。由于各自洛伦兹力的作用, 粒子在磁场中的运动可看成初速度分别为  $v_1, v_2$  的两个匀速圆周运动的合成, 易得轨道半径分别为  $r_1 = \frac{mv_1}{qB}, r_2 = \frac{mv_2}{qB}$ , 角速度皆为  $\omega = \frac{qB}{m}$ , 与实际运动的角速度相同。这样的分解是不常见的, 可以这样处理吗? 下面做一些验证。

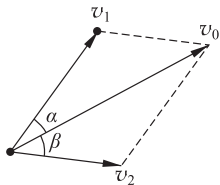


图 2

### 1.3 验证

由于两分运动的角速度与实际运动的角速度相等, 相当于图 2 中三个速度矢量以相同的角速度转动, 所以任意时刻两分速度与实际速度的相对关系不变, 令运动后某时刻两分运动速度矢量分别为  $v'_1, v'_2$ , 实际速度矢量为  $v'$ , 有  $v' = v'_1 + v'_2$ 。

由于两分运动的向心加速度分别为  $a_1 = \omega \times v'_1, a_2 = \omega \times v'_2$ , 实际运动的加速度为  $a = \omega \times v'$ , 有  $a = a_1 + a_2$ , 可知, 任意时刻两分运动加速度的矢量和等于实际加速度。

再来验证位移关系, 令经过时间  $t$  (小于一个周期), 两个分运动转过的角度皆为  $\theta = \omega t$ , 位移大

小分别为  $x_1, x_2$ , 如图 3 所示。可以求得  $x_1 = 2r_1 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2mv_1}{qB} \sin \frac{qBt}{2m} = kv_1$ , 其中  $k = \frac{2m}{qB} \sin \frac{qBt}{2m}$ , 与其对应的初速度  $v_1$  夹角为  $\frac{\theta}{2}$ ,  $x_2 = 2r_2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2mv_2}{qB} \sin \frac{qBt}{2m} = kv_2$ , 与其对应的初速度  $v_2$  夹角也为  $\frac{\theta}{2}$ , 所以两分运动位移方向的夹角为  $\alpha + \beta$ , 而实际运动位移的大小为  $x = 2r \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2mv}{qB} \sin \frac{qBt}{2m} = kv$ , 其方向与初速度  $v$  夹角也为  $\frac{\theta}{2}$ , 所以位移矢量  $x, x_1$  的夹角仍为  $\alpha, x, x_2$  的夹角仍为  $\beta$ 。另, 三个位移的大小与它们对应的初速度大小成比例, 比例系数均为  $k$  (与时间  $t$  有关), 可知图 3 中  $x, x_1, x_2$  构成的四边形与图 2 中  $v, v_1, v_2$  构成的四边形相似, 一定为平行四边形, 所以, 任意时刻两分运动位移的矢量和等于实际运动的位移, 有  $x = x_1 + x_2$ 。

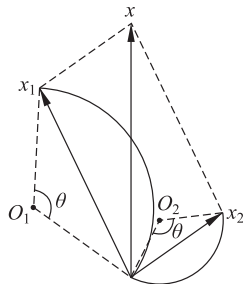


图 3

所以, 将粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动分解为两个匀速圆周运动是可行的。

### 1.4 分运动的圆心与实际运动的圆心的位置关系

如图 4 所示,  $O, O_1, O_2$  分别是实际运动及两个分运动对应的圆心位置, 它们相对于粒子所在位置的位置矢量均与对应的速度垂直, 易得其大小与对应速度的大小成正比。所以这三个位置矢

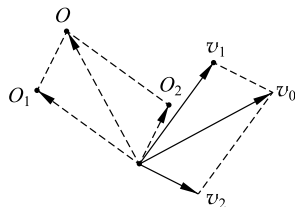


图 4

量之间也满足矢量的平行四边形定则!

特别的,如果将初速度分解为两个互相垂直的分速度,如图5所示,则粒子做圆周运动的圆心相对于出发点沿 $x$ 方向的偏移量 $O_x = \frac{mv_y}{qB}$ ,只取决于 $y$ 方向的分速度 $v_y$ ,沿 $y$ 方向的偏移量 $O_y = \frac{mv_x}{qB}$ ,只取决于 $x$ 方向的分速度 $v_x$ 。

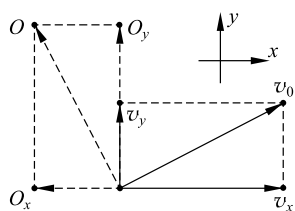


图5

利用 GeoGebra 制作动画,模拟了以上的过程,可以验证以上分析都是正确的,感兴趣的老师可以自己制作动画进行验证。

把一个运动进行分解是为了解决具体的问题,而这种分解方法是把一个匀速圆周运动分解为两个匀速圆周运动,看上去不是简化了问题,而是使问题更加复杂了,是这样吗?以两个实例进行说明这样分解的好处。

## 2 应用实例 1

### 2.1 问题

如图6所示, $PQ$ 为磁感应强度为 $B$ 的匀强磁场的边界线,在距离 $PQ$ 为 $d$ 的 $O$ 点处有质量为 $m$ 、电量为 $+q$ 的带电粒子以速度 $v$  ( $v > \frac{qBd}{m}$ ) 垂直于磁场方向射出,为了使粒子能垂直于 $PQ$ 射出磁场,则粒子的速度方向应满足什么条件?

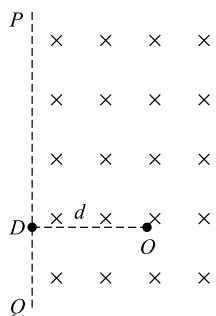


图6

### 2.2 常规分析法

为了粒子能垂直于边界线 $PQ$ 射出磁场,则粒子做圆周运动的圆心 $O_1$ 一定在边界线 $PQ$ 上,如图7所示,所以粒子速度方向与 $OD$ 方向的夹角 $\theta$ 应满足 $\sin\theta = \frac{d}{r}$ ,粒子在磁场中做匀速圆周运动的半径为 $r = \frac{mv}{qB}$ ,所以粒子的速度方向应满足 $\theta = \arcsin \frac{qBd}{mv}$ 。

需要说明的是,用这种常规方法进行分析时,容易漏解,即圆心在 $O_2$ (与 $O_1$ 关于 $D$ 点对称)处,其轨迹为图7中的虚线所示圆弧,对应的速度方向与 $OD$ 方向的夹角 $\theta = \pi - \arcsin \frac{qBd}{mv}$ 。

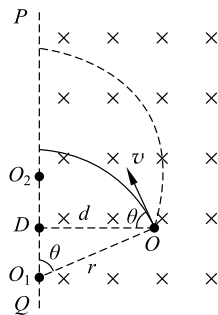


图7

### 2.3 分解圆周运动法分析

将粒子的速度分解为 $v_x$ ( $OD$ 所在直线方向)、 $v_y$ ( $PQ$ 所在直线方向), $v_y$ 决定了粒子做圆周运动的圆心相对于 $O$ 点沿 $x$ 方向的偏移量 $O_x$ , $v_x$ 决定了圆心相对于 $O$ 点沿 $y$ 方向的偏移量 $O_y$ ,为了使粒子做圆周运动的圆心在边界线 $PQ$ 上,则 $v_y$ 应满足 $d = \frac{mv_y}{qB}$ ,且可判断得 $v_y$ 应向上,而对 $v_x$ 没有要求,所以粒子速度方向应如图8所示

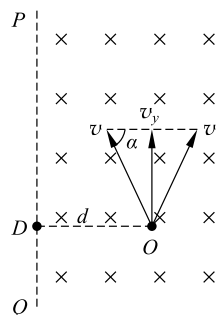


图8

示,有两种可能,图中  $\alpha = \arcsin \frac{v_y}{v} = \arcsin \frac{qBd}{mv}$ ,  
所以粒子速度方向与  $OD$  方向的夹角  $\theta =$   
 $\arcsin \frac{qBd}{mv}$ 、或  $\theta = \pi - \arcsin \frac{qBd}{mv}$ 。

相比于常规方法,用这种方法进行分析不容易漏解。

### 3 应用实例 2

2015 年天津高考试卷最后一题是一道粒子在“斑马场”中运动的问题,作为压轴题,其难度很大,特别是第 2 小问,如果用常规的解法,需涉及平面几何的推演,结合物理规律,通过抽象的演算找出数列的规律,这种解决问题的方法对学生的物理思维能力及数学运算能力要求都非常高,难度很大。

#### 3.1 试题

现代科学仪器常利用电场、磁场控制带电粒子的运动。在真空中存在着如图 9 所示的多层紧密相邻的匀强电场和匀强磁场,电场和磁场的宽度均为  $d$ 。电场强度为  $E$ ,方向水平向右;磁感应强度为  $B$ ,方向垂直纸面向里。电场、磁场的边界互相平行且与电场方向垂直,一个质量为  $m$ 、电荷量为  $q$  的带正电粒子在第 1 层电场左侧边界某处由静止释放,粒子始终在电场、磁场中运动,不计粒子重力及运动时的电磁辐射

(1) 求粒子在第 2 层磁场中运动时速度  $v_2$  的大小与轨迹半径  $r_2$ ;

(2) 粒子从第  $n$  层磁场右侧边界穿出时,速度的方向与水平方向的夹角为  $\theta_n$ ,试求  $\sin \theta_n$ ;

(3) 若粒子恰好不能从第  $n$  层磁场右侧边界穿出,试问在其他条件不变的情况下,也进入第  $n$  层磁场,但比荷较该粒子大的粒子能否穿出该层磁场右侧边界,请简要推理说明之。

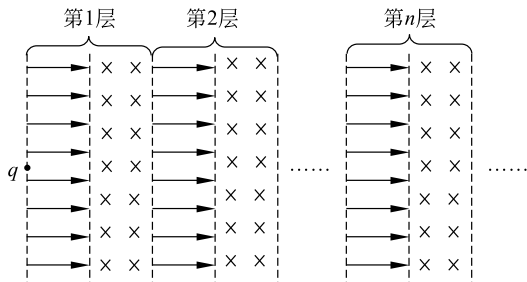


图 9

#### 3.2 简单分析

第 1 小问考查了粒子在电场及磁场中的运动特点,由于洛伦兹力不做功,根据动能定理及粒子在匀强磁场中运动的相关知识可求得结果,属于第 2 小问的铺垫,不难获得这几分。

第 2 小问是该题的难点、核心,常规的解法是抓住粒子在同一层电场中运动时,其沿垂直电场方向的分速度不变,以及粒子在进出同一层磁场时其速度方向的关系,找出规律,从而解决问题。这种解法比较抽象,规律难寻,实属困难。

在解出第 2 小问后,可以比较容易地解答第 3 小问,不作赘述。

#### 3.3 常规解答

第 2 小问的参考解答如下:

设粒子在第  $n$  层磁场中运动的速度为  $v_n$ ,轨迹半径为  $r_n$ (各物理量的下标均代表粒子所在层数,下同),有

$$nqEd = \frac{1}{2}mv_n^2 \quad (1)$$

$$qv_nB = m \frac{v_n^2}{r_n} \quad (2)$$

粒子进入第  $n$  层磁场时,速度的方向与水平方向的夹角为  $\alpha_n$ ,从第  $n$  层磁场右侧边界穿出时速度方向与水平方向的夹角为  $\theta_n$ ,粒子在电场中运动时,垂直于电场线方向的速度分量不变,有

$$v_{n-1} \sin \theta_{n-1} = v_n \sin \alpha_n \quad (3)$$

由图 10 可得

$$r_n \sin \theta_n - r_n \sin \alpha_n = d \quad (4)$$

由式(3)(4)得

$$r_n \sin \theta_n - r_{n-1} \sin \theta_{n-1} = d \quad (5)$$

由式(5)看出  $r_1 \sin \theta_1, r_2 \sin \theta_2, \dots, r_n \sin \theta_n$  为一等差数列,公差为  $d$ ,可得

$$r_n \sin \theta_n = r_1 \sin \theta_1 + (n-1)d \quad (6)$$

当  $n=1$  时,由图 11 看出

$$r_1 \sin \theta_1 = d \quad (7)$$

由式(2)(6)(7)得

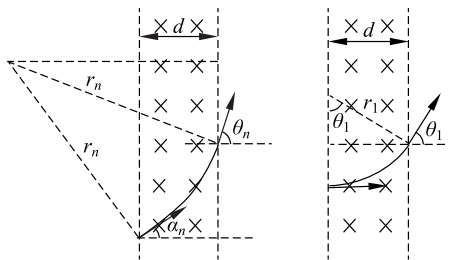


图 10

图 11

$$\sin\theta_n = B \sqrt{\frac{nqd}{2mE}} \quad (8)$$

这个解答过程有一定的难度,在考场中用这种方法解决该问不是一件易事。试着从运动合成与分解的角度来理解粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动,可以较方便地解决第2小问。

### 3.4 分解圆周运动法分析

粒子经第一层电场加速后垂直进入第一层磁场中做匀速圆周运动,可知其对应圆心一定在第一层电场与磁场的分界线上,令其对应的半径为  $r_1$ ,出第一层磁场时其速度方向与水平方向的夹角为  $\theta_1$ ,等于在第一层磁场中运动轨迹所对应的圆心角,如图12所示,有  $\sin\theta_1 = \frac{d}{r_1}$ 。

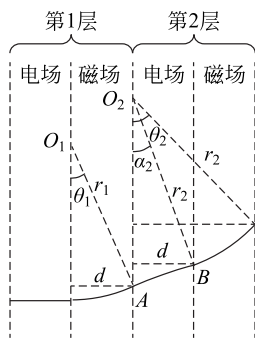


图 12

粒子在第二层电场中只受电场力作用,由于电场力的方向沿水平方向,所以粒子只是沿水平方向的分速度变大,而沿竖直方向的分速度不变。根据前面的分析可知,由于粒子在 A、B 两个位置沿竖直方向的分速度相同,所以在第一、二层磁场中做圆周运动的圆心  $O_1$ 、 $O_2$  分别相对于 A、B 两点在水平方向的偏移量相同! 可得  $O_2$  一定在第一、二层分界线上。

所以刚进入第二层磁场时,其速度方向与水平方向的夹角(等于图12中的  $\alpha_2$ )满足

$$\sin\alpha_2 = \frac{d}{r_2}$$

刚出第二层磁场时,其速度方向与水平方向的夹角(也等于图12中的  $\theta_2$ )满足

$$\sin\theta_2 = \frac{2d}{r_2}$$

以此类推,可得粒子刚出第  $n$  层磁场时其速

度方向与水平方向的夹角满足

$$\sin\theta_n = \frac{nd}{r_n}$$

结合参考解答中的(1)(2)两式,可得

$$\sin\theta_n = B \sqrt{\frac{nqd}{2mE}}$$

与参考解答相同!

这种分析方法抓住了粒子在电场中运动时沿垂直于电场方向分速度不变的特点,以及粒子在磁场中匀速圆周运动时其圆心相对于粒子所在位置偏移量的规律,推理出关键结论,大大减少了运算量,缩短了解题时间。

## 4 结语

运动合成与分解的方法通常用来处理一些复杂的运动,高中阶段常用运动合成与分解的方法来处理匀变速曲线运动。其实任何实际运动都可以进行分解,还可以根据所要解决问题的不同对同一个运动进行不同的分解,这里介绍的分解圆周运动的方法,既更新了学生对圆周运动的理解,也促进了学生对运动合成与分解的进一步认识,可以启发学生运用合成与分解的方法去处理更多复杂的运动,这样的过程可以培养学生的逻辑思维、实证思维,提升学科素养。

老师在教给学生物理定理定律及处理物理问题的方法时,不能囿于常见的几种物理模型,要鼓励学生灵活地运用所学知识和方法去解决更多的陌生问题,将所学的知识迁移到新情境,解决新问题,得出新结论,并且能够科学地反思和验证自己的新结论,这样的体验过程有利于学生学科能力的提升。

## 参 考 文 献

- [1] 教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社, 2018:4-5.
- [2] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[S]. 北京:人民教育出版社, 2019. 11:20-26.
- [3] 刘岩. 2015年天津高考物理试题评析[EB/OL]. (2015-06-09)[2020-05-15]. <https://edu.qq.com/a/20150609/032622.htm>.