

大中衔接

开普勒三定律和万有引力定律的几何证明

李 都 刘 颖 姜付锦

(黄陂区第一中学, 湖北 武汉 430300)

摘 要 在高中教材中“由开普勒定律推导出万有引力定律”“由万有引力定律推导开普勒定律”, 采用的是近似方法求解, 结果不能令人信服。在大学教材或者相关文献中都是通过微积分知识求解, 学生不易理解。本文采用哈密顿速度矢量图, 结合简单的几何知识, 巧妙地解决了上述问题。

关键词 开普勒定律; 万有引力定律; 哈密顿定理; 矢量图; 几何方法

GEOMETRIC PROOF OF KEPLER'S THREE LAWS AND THE LAW OF UNIVERSAL GRAVITATION

LI Du LIU Ying JIANG Fujin

(Huangpi No. 1 middle school, Wuhan, Hubei 430300)

Abstract In high school textbooks, “the law of universal gravitation is derived from Kepler’s law” and “Kepler’s law is derived from the law of universal gravitation”, which are solved by approximate method, and the result is not convincing. In university textbooks or related literature, it is solved by calculus knowledge, which is not easy for students to understand. In this paper, Hamilton velocity vector diagram and simple geometric knowledge are used to skillfully solve the above problems.

Key words Kepler’s law; law of universal gravitation; Hamilton theorem; vector diagram; geometric method

开普勒(Kepler)从第谷(Tycho)的观测数据中总结出开普勒行星运动三大定律, 牛顿(Newton)由此在他的著作《自然哲学的数学原理》中得到有心力必须与距离的平方成反比的万有引力定律, 这便是开普勒第一类问题。后来万有引力定律被作为基本定律, 约翰内斯·伯努利(Johannes Bernoulli)证明在有心引力场中, 若力与距离的平方成反比,

轨迹总是圆锥曲线, 这便是开普勒第二类问题。

在现行的大学教材或者论文中, 求解开普勒问题都是通过微积分解决的^[1,4-6]。由于高中学生微积分的知识储备不够, 所以在高中教材通常都是将行星的椭圆运动近似看做圆周运动来加以推导得到万有引力定律。这种推导一般高中学生都能理解, 但总是有一种近似的感觉, 不能完美地解

收稿日期: 2021-08-11; 修回日期: 2021-09-14

基金项目: 湖北省教育学会教师教育专业委员会 2020 年课题(HBJSJY2020-027)资助。

作者简介: 李都, 男, 中学一级教师, 主要研究中学物理教学及强基计划, 591663462@qq.com; 姜付锦, 男, 中学高级教师, 研究方向为数学和数值模拟在物理问题研究中的应用, 2917542082@qq.com; 刘颖, 女, 中学二级教师, 主要研究中学物理教学及强基计划, 961579600@qq.com。

引文格式: 李都, 刘颖, 姜付锦. 开普勒三定律和万有引力定律的几何证明[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 125-130.

Cite this article: LI D, LIU Y, JIANG F J. Geometric proof of Kepler’s three laws and the law of universal gravitation[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 125-130. (in Chinese)

决开普勒第一类问题。

本文整理了开普勒、牛顿、哈密顿等人在开普勒问题上的研究成果,并将哈密顿的重要研究思想:哈密顿定理加以推广应用。将行星运动过程中的每个速度矢量起点平移到同一个点,速度矢量的终点构成的轨迹称为速度矢量图。哈密顿发现行星运动的速度矢量图是一个圆,称为哈密顿定理^[7]。本文的主要工作是基于哈密顿定理,加上一些高中学生都能理解的几何知识,巧妙地“由开普勒定律推导万有引力定律”“由万有引力定律推导开普勒定律”。

1 椭圆的光学性质及其应用

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·(第二册(上))》(2006年人民教育出版社)第138—139页^[2]的阅读材料“圆锥曲线的光学性质及其应用”中写道:

定理1 从椭圆的一个焦点发出的光线,经过椭圆反射后,反射光线交于椭圆的另一个焦点上。

推论1 如图1所示给定一个椭圆和椭圆的切线,焦点 F_1 、 F_2 在切线上的投影为 X 、 Y ,则 $F_1X \cdot F_2Y = b^2$ (b 为椭圆的半短轴)。

证明可参考文献[2]。

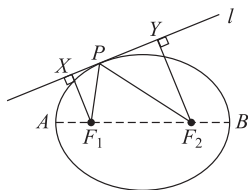


图1 椭圆的光学性质

2 哈密顿定理(Hamilton's theorem)

定理2(哈密顿第一定理) 如果开普勒第二定律成立且物体运动的轨道是一个椭圆,那么它的速度矢量图就是一个圆^[7,9]。

定理3(哈密顿第二定理) 如果一个物体在与距离平方成反比的中心力作用下绕固定点运动,那么它的速度矢量图是一个圆^[7,9]。

我们先用一个简单的例子来说明什么是速度矢量图。一个做平抛运动的物体,它的水平速度是恒定的,竖直方向上的速度从零开始均匀增加。如图2(a)所示将速度的起点平移到同一个点 O ,

速度的终点 A 、 B 、 C 、 D 、 E ……在同一条竖直线上,这些由速度终点组成的图形称为速度矢量图。显然平抛运动的速度矢量图为一竖直线。在速度矢量图上任意相邻的两点的有向线段为该过程的速度变化量 ΔV ,速度变化量 ΔV 的方向与物体加速度方向和力的方向相同。由平抛运动的速度矢量图为一竖直线可以求出做平抛运动的物体受到的重力方向为竖直方向。若将该速度矢量图旋转 90° ,可得其旋转 90° 的速度矢量图为一水平线,与重力方向垂直,如图2(b)所示。

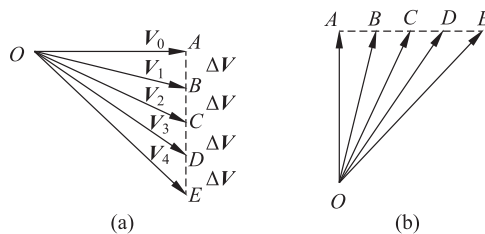


图2 平抛运动速度矢量图

(a) 原图; (b) 旋转 90°

2.1 哈密顿第一定理的证明

如图3所示,作一个焦点为 F_1 、 F_2 的椭圆轨道,其中 F_2 为太阳所在位置, A 为远日点, B 为近日点,该椭圆的半长轴为 a ,半短轴为 b ,半焦距为 c 。设 P 是椭圆上的任意点,以 F_2 为圆心, $2a$ 为半径作圆,连接 F_2P 并延长与圆的交点为 U ,连接 F_1U 过 P 点作椭圆的切线 l , l 与 F_1U 的交点为 X ,过 F_2 作 l 的垂线,垂足为 Y 。

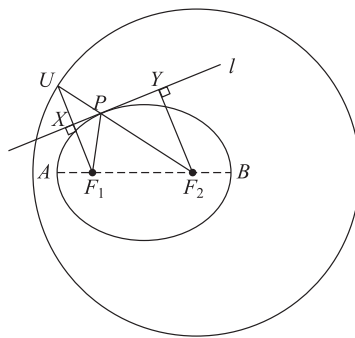


图3 哈密顿第一定理的证明

$$\text{由椭圆的光学性质 } \angle XPF_1 = \angle YPF_2 \quad (1)$$

$$\text{由对顶角得 } \angle UPX = \angle YPF_2 \quad (2)$$

$$\text{由(1)(2)两式得 } \angle XPF_1 = \angle UPX \quad (3)$$

$$2a = UP + PF_2 = PF_1 + PF_2 \quad (4)$$

$$\text{由式(4)可得 } UP = PF_1 \quad (5)$$

由(3)(5)两式得 $UF_1 \perp l$, 即 $UF_1 \perp v$ (6)

由开普勒第二定律得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} v \cdot PF_2 \cdot \sin \angle YPF_2 = \frac{1}{2} v \cdot YF_2 \quad (7)$$

$$\text{令 } k = \frac{\Delta s}{\Delta t} (k \text{ 为常数}) \quad (8)$$

$$\text{由推论 1 得 } \frac{1}{2} UF_1 \cdot YF_2 = b^2 \quad (9)$$

$$\text{由(7)(8)(9)三式得 } UF_1 = \frac{b^2}{k} v \quad (10)$$

由(6)(10)两式得行星的旋转 90° 速度矢量图是一个圆, 其中圆心为太阳所在位置, 所有速度矢量的起点为椭圆的另一个的焦点, 终点在这个圆上, 哈密顿第一定理得证。

2.2 哈密顿第二定理的证明

假设行星运动的轨道形状是未知的, 为了便于说明, 如图 4 所示, 现以太阳为固定点, 将轨道平面按角度等分成 8 块, 每一段轨迹对太阳的张角均为 $\Delta\theta = \frac{\pi}{4}$ 设分割线与轨道交点处速度分别为 V_n , 将这 8 个速度矢量起点移动到一固定点, 如图 5 所示, 将 8 个速度的终点依次相连, 将形成一个正八边形。

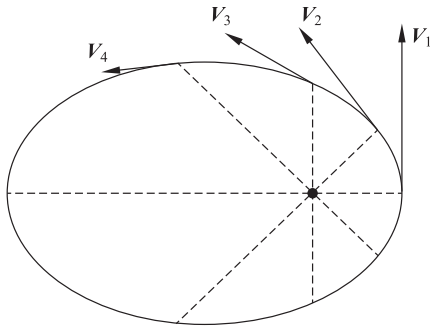


图 4 行星轨道按角等分为 8 块

相邻两速度的终点相连的有向线段为

$$\Delta V = V_n - V_{n-1} \quad (11)$$

$$\text{由万有引力定律得 } F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12)$$

$$\text{由牛顿第二定律得 } F = m \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (13)$$

容易证明, 如果物体受到的合力方向是径向的, 那么开普勒第二定律成立, 角动量守恒即

$$L = mr^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (14)$$

$$\text{由(12)(13)(14)三式得 } \Delta V = G \frac{Mm}{L} \Delta\theta \quad (15)$$

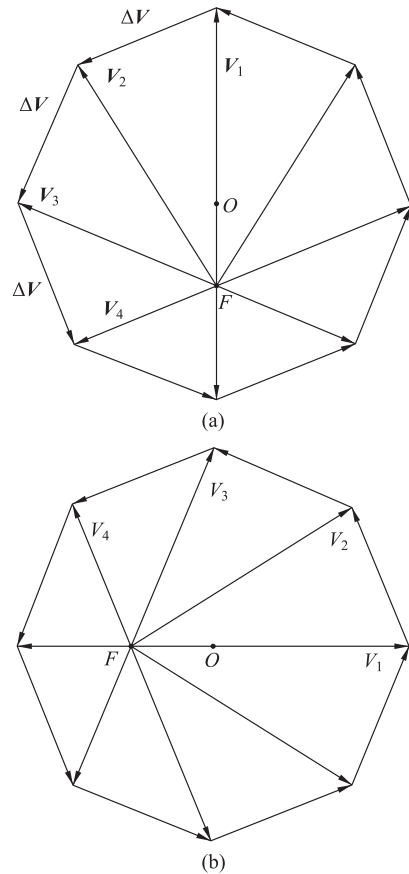


图 5 速度矢量图

(a) 原图; (b) 旋转 90°

如图 5(a)所示, 轨迹上相邻的两点在万有引力的作用下转过相同的角度 $\Delta\theta$ 后每个有向线段 ΔV 长度相同, 后一速度变化量相对于前一个逆时针旋转了 $\Delta\theta$ 角, 故速度矢量的终点依次连接形成了一个正八边形, 当分割的边数趋于无穷大时, 正多边形变为圆。哈密顿第二定理证毕。应当注意的是该圆的圆心 O 并不是速度矢量的起点 F 。将该速度矢量图旋转 90° 后得到旋转 90° 的速度矢量图, 如图 5(b)所示, 不难看出旋转 90° 的速度矢量图仍为一个圆, 速度矢量的起点为圆内某一固定点, 与每一个速度对应的有向线段大小不变, 方向与速度垂直。

3 由开普勒定律推导万有引力定律的几何证明

接下来论文将证明根据开普勒定律可推导得到万有引力定律, 即行星运动受到的力为有心力, 指向太阳所在位置(椭圆的一个焦点); 力的大小与距离的平方成反比。

由图 3 和定理 2(哈密顿第一定理)得在满足开普勒第一定律和第二定律的旋转 90° 速度矢量图是一个圆,其中圆心为太阳所在位置,所有速度矢量的起点为椭圆的另一个焦点,终点在圆上,如图 6 所示。

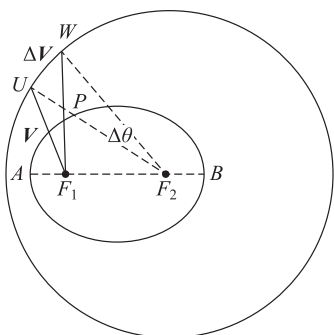


图 6 万有引力定律推导

在图 6 中,取一段很短的时间 Δt ,速度矢量的终点由 U 处沿着圆弧线向 W 移动,有向线段 $\overrightarrow{UW}$ 与此过程中旋转 90° 的速度变化量 ΔV 相同,与此过程的速度变化量 ΔV 方向垂直。在 Δt 取很短时有向线段 $\overrightarrow{UW}$ 沿该圆的切线方向,由此可得此过程的速度变化量 ΔV 垂直于该圆的切线方向即沿径向方向,行星在绕太阳运动过程中的加速度和受到的力与速度变化量 ΔV 方向相同,即都沿径向方向。行星受到太阳的引力为有心力。

由开普勒第二定律得单位时间内扫过的面积

$$k = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (16)$$

$$\text{由矢量三角形 } \Delta F_1 U W \text{ 类比为 } \frac{\Delta v}{v} = \frac{UW}{UF_1} \quad (17)$$

$$\text{由(10)(17)两式得 } UW = \frac{b^2}{k} \Delta v \quad (18)$$

$$\text{由几何知识得 } UW = 2a \Delta \theta \quad (19)$$

$$\text{由牛顿第二定律得 } F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (20)$$

$$\text{联立(16)(18)(19)(20)四式得 } F = \frac{4ak^2}{b^2} \cdot \frac{m}{r^2} \quad (21)$$

其中 k 是一个与行星有关的常数。

$$\text{椭圆的面积为 } S = \pi ab \quad (22)$$

$$\text{行星运动的周期 } T = \frac{S}{\frac{\Delta S}{\Delta t}} = \frac{\pi ab}{k} \quad (23)$$

$$\text{由开普勒第三定律 } \frac{a^3}{T^2} = k_1 \quad (24)$$

$$\text{联立(21)(23)(24)三式得 } F = 4\pi^2 k_1 \frac{m}{r^2} \quad (25)$$

$4\pi^2 k_1$ 是一个与行星无关的常数。

4 开普勒三定律的几何证明

4.1 开普勒第一定律的几何证明

由于太阳对行星的万有引力为保守力和有心力,所以行星运动过程中的机械能守恒,角动量守恒。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (\text{其中 } E < 0) \quad (26)$$

$$L = mvr \sin \theta \quad (27)$$

$$\text{不妨设 } E = -\frac{GMm}{R} \quad (28)$$

由机械能守恒,得 R 为一定值。

如图 7 所示,设行星绕太阳运动的轨道为 Γ (形状未知),太阳处在 O 点, A 、 B 分别为行星运动过程中的远日点和近日点。由哈密顿第二定理得旋转 90° 的速度矢量图为圆,假定该圆以 O 为圆心,以 R 为半径。接下来,将确定速度矢量的起点 F 和速度大小与对应有向线段的比例系数。

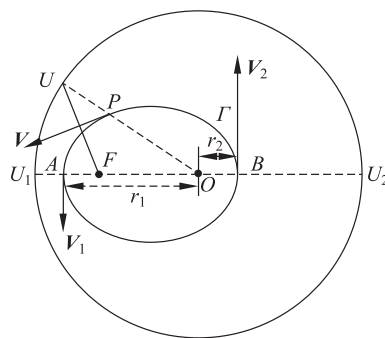


图 7 旋转 90° 的速度矢量图

由 A 、 B 的势能处在极值,动能也为极值得 A 、 B 对应的速度垂直于 A 、 B 与 O 的连线。旋转 90° 的速度矢量图中速度矢量垂直于对应有向线段。由此可得速度矢量的起点 F 在 AOB 直线上。

$$\text{由图 7 可得 } FU_1 + FU_2 = 2R \quad (29)$$

对 A 、 B 两点由角动量守恒可得

$$L = mv_1 r_1 = mv_2 r_2 \quad (30)$$

由于 FU_1 、 FU_2 为 A 、 B 两点速度对应的有向线段

$$\frac{FU_1}{FU_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (31)$$

由式(29)(30)(31)得

$$FU_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} 2R = \frac{r_2}{r_1 + r_2} 2R \quad (32)$$

由式(32)得速度矢量的起点为圆内一固定点。

不妨设轨道上任一点 P 的速度与对应的有向线段 FU 的关系为 $FU = kv$ 。(33)

对 A, B 两点由能量守恒定律得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = -\frac{GMm}{R} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = -\frac{GMm}{R} \end{cases} \quad (34)$$

将式(30)代入式(34)消掉 r_1, r_2 后, 将(34)中两式相减后整理得

$$v_1 + v_2 = 2 \frac{GMm}{L} \quad (35)$$

$$\text{由式(32)(35)得 } FU_1 = \frac{RL}{GMm}v_1 \quad (36)$$

$$\text{对比(33)(36)两式可得比例系数 } k = \frac{RL}{GMm} \quad (37)$$

由以上分析可得, 旋转 90° 的速度矢量图有如下性质。旋转 90° 的速度矢量图为一个圆; 速度矢量的起点 F 为圆内一固定点, 速度矢量的终点在圆上; 任一点的速度 v 与对应的有向线段垂直且比例系数为一定值。

如图 8 所示, 太阳的质量为 M , 处在 O 点, 一质量为 m 的行星的初始位置为 P_0 , 初速度为 v_0 , v_0 与 $\overrightarrow{OP_0}$ 的夹角为 θ_0 , 接下来要证明行星运动的轨道为椭圆。

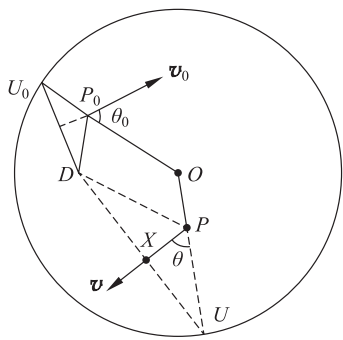


图 8 行星的运动轨道

以太阳所在位置 O 为圆心, 以 R 为半径作圆, 连接 OP_0 并延长与圆相交, 交点为 U_0 , 作 U_0 关于初速度 v_0 的对称点 D (为一固定点)。取行星在运动过程中的任一点 P , 设在 P 点的速度为 v , 连接 OP 并延长与圆相交, 交点为 U , OP 与速度 v 的夹角为 θ , 速度 v 与 DU 的交点为 X 。

$$\text{由机械能守恒得 } \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{R} \quad (38)$$

$$\text{由角动量守恒得 } L = mv_0 r_0 \sin \theta_0 \quad (39)$$

$$\text{由几何关系得 } DU_0 = 2(R - r_0) \sin \theta_0 \quad (40)$$

$$\text{由三式(38)(39)(40)得 } DU_0 = \frac{RL}{GMm}v_0 \quad (41)$$

对比三式(33)(37)(41)可得图 8 中的 D 点与图 7 中速度矢量的起点 F 与点为同一点, 图 8 中的圆与图 7 中的旋转 90° 的速度矢量图为同一圆。由旋转 90° 的速度矢量图的性质可得行星运动轨道上任一点 P 的速度 v 与对应的有向线段 DU 满足以下关系

$$v \perp \overrightarrow{DU}, \quad DU = \frac{RL}{GMm}v \quad (42)$$

$$\text{由角动量守恒得 } L = mvr \sin \theta \quad (43)$$

$$\text{由机械能守恒得 } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R} \quad (44)$$

$$\text{由几何关系得 } UX = (R - r) \sin \theta \quad (45)$$

$$\text{得三式(43)(44)(45)得 } UX = \frac{RL}{2GMm}v \quad (46)$$

$$\text{由两式(42)(46)得 } UX = \frac{1}{2}DU, \quad PX \perp DU \quad (47)$$

由式(47)得 $\triangle DPU$ 为等腰三角形

$$\text{即 } DP + OP = R \quad (48)$$

行星运动过程中到两定点 D, O 的距离之和为一定值 R (为椭圆的长轴), 所以行星运动的轨道为椭圆, D, O 为椭圆的焦点, 开普勒第一定律得证。可令

$$R = 2a \quad (a \text{ 为行星运动的椭圆轨道的半长轴}) \quad (49)$$

4.2 开普勒第二定律的几何证明

$$\text{单位时间内扫过的面积 } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L}{2m} \quad (50)$$

由角动量守恒易得行星与太阳的连线在单位时间内扫过的面积相等。

4.3 开普勒第三定律的证明

在图 8 基础上作出图 9。如图 9 所示, 椭圆为行星运动轨道, 设该椭圆的半长轴为 a , 半短轴为 b , 半焦距为 c 。以 O 为圆心, 以 R (R 等于椭圆的长轴) 为半径的圆为行星旋转 90° 的速度矢量图, D 为速度矢量的起点, P 为椭圆轨道上的任一点, 连接 OP 并延长与圆相交于 U

$$\text{令 } q = DU, \quad r = OP, \quad R = 2a \quad (51)$$

由式(42)(47)可得 $\triangle DPU$ 为等腰三角形, P 点的速度垂直平分 DU , 设 P 点的速度与 PU 之间的夹角为 θ 。

$$\text{由上述几何知识得 } \sin \theta = \frac{q}{2(2a - r)} \quad (52)$$

