

基于拓扑思想对海伦喷泉实验原理的分析

侯世林 李 颖 师玉荣

(中国海洋大学物理与光电工程学院, 山东 青岛 266100)

摘 要 海伦喷泉是一种既简单又有趣的实验装置, 可用作大中学生综合素质训练的教学素材。与普通喷泉不同, 海伦喷泉喷射高度可高于初始液面高度, 因此其工作原理常常困惑一些中学生和大学生。本文基于拓扑分析, 可以发现海伦喷泉原理上可等效于其内液柱之间密封一段气体的 U 形管; 其喷水高度在准静态条件下等于密封气柱的高度。实际喷射高度受初始条件或操作过程等主要因素的影响, 也可以在该模型下得到简洁解释。相关拓扑分析思想也可应用于其他实验的设计与探究。

关键词 拓扑思想; 海伦喷泉; U 形管模型

A SIMPLE TOPOLOGICAL ANALYSIS ON HOW HERON'S FOUNTAIN WORKS

HOU Shilin LI Ying SHI Yurong

(College of Physics and Optoelectronic Engineering, Ocean University of China, Qingdao, Shandong 266100)

Abstract Heron's fountain is simple and interesting experimental device, which can be used as a teaching material for comprehensive quality training of college and middle school students. Different from ordinary fountains, the water jet of a Heron's fountain can be higher than the initial water level, which often puzzles some middle school students and college students. In this paper, based upon a simple topological analysis, it is found that Heron's fountain can be equivalent to a U-tube with water separated by a certain amount of gas in principle, which can give a concise explanation on how it works. The height of the water jet is equal to the height of the gas in the tube under ideal condition. The actual injection height is affected by the main factors such as initial conditions or operation process, and can also be explained concisely under the model. The application of topological ideas can also be applied to the design and exploration of other experiments.

Key words topological idea; Heron's fountain; U-tube model

“拓扑”这一概念源于数学, 本是指所研究的几何对象在连续形变之下保持不变的性质^[1]。这种性质可以反映研究对象所具有的某种高度概括性的本质属性, 对于探究事物的物理本质有重要帮助。拓扑思想目前被广泛应用于物理学、天文学、信息科学等学科领域, 并被赋予丰富的专业内

涵。诸如人们用“网络拓扑”来描述计算机网络中各节点之间的特定连接方式或连接关系。这种关系与电学实验中电路图与实物图之间的关系类似, 体现着对应物理器件之间的连接关系, 与物理器件及其具体参数、性能、距离等因素无关。显然, 借助拓扑可以将实物器件之间本质的物理关系简洁描

收稿日期: 2021-10-14; 修回日期: 2021-11-25

基金项目: 中国高等教育学会理科教育研究项目(21LK YB03); 中国海洋大学本科生教学研究(2021JY009)与教师发展基金(2019JXJ01)项目。

作者简介: 侯世林, 男, 讲师, 主要从事物理理论与实验教学科研工作, 研究方向为原子分子物理与光谱学, slhou@ouc.edu.cn; 李颖, 女, 教授, 主要从事物理与光电信息教学和科研工作, 研究方向为激光光谱学, liying@ouc.edu.cn; 师玉荣, 女, 讲师, 主要从事力学和大学物理教学, 研究方向复杂系统动力学, shiyurong@ouc.edu.cn。

引文格式: 侯世林, 李颖, 师玉荣. 基于拓扑思想对海伦喷泉实验原理的分析[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 110-114.

Cite this article: HOU S L, LI Y, SHI Y R. A simple topological analysis on how Heron's fountain works[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 110-114. (in Chinese)

述出来。本文所述拓扑思想既包含类似网络拓的实物连接关系所对应的拓扑属性,也包含实验器件在几何外形方面连续变化所对应的本初含义上的拓扑变化性质。下面将结合这两方面的拓扑含义,借助“海伦喷泉”具体实例,谈一谈基于拓扑思想对于实验原理的分析以及对实验设计的启发。

1 海伦喷泉

“海伦喷泉”(Heron's fountain)作为2018年国际青年物理学家锦标赛(IYPT)的一道赛题^[2],并用于当年的中国大学生物理学术竞赛(CUPT),曾为国内外部分大中學生所熟悉^[3,4]。题目要求做一个海伦喷泉,解释它的工作原理,并研究相关参数对喷水高度的影响。海伦喷泉有不同设计样式,图1给出两种常见结构。

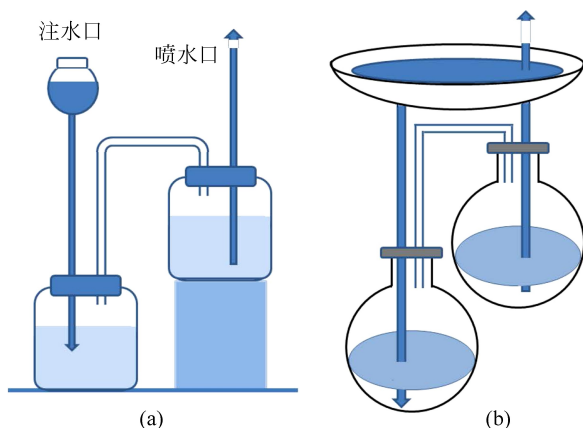


图1 海伦喷泉示意图

由图1示例可知,海伦喷泉取材普通,设计方便,操作简单,现象有趣,可探究性强,可用于科学素质培养的启蒙教育,与其他CUPT实验类似^[5],也可以作为一个较好的STEM或STEAM(Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics)综合教育的教学素材。从网络上也可以搜索出一些面向中小学生的相关应用案例。从生活应用上,海伦喷泉技术可被用于为民居太阳能制冷给水以节能减排^[6]。从喷射效果上,与一般喷泉不同,海伦喷泉喷射高度可高于初始液面,看起来好像违背能量守恒定律。该实验的现象可以吸引低年级学生的探究兴趣,也可以引发高年级或大学生的思考:是不是违背了能量守恒定律?是不是可以在此基础上设计出永动机?这种现象的本质是什么?哪些具体因素在起关键作用?近

期文献[3,4]在伯努利方程基础上开展了不同层面探究,相关内容可补充学生对海伦喷泉现象和动力学因素影响的了解,但从工作原理的方面,对于大学低年级和中小学学生的理解尚有难度。后面将借助于拓扑思想来挖掘和展示海伦喷泉工作的简洁物理图像,同时在原理性的基础上可以便捷地解决经常困扰学生的这些普遍性问题。目前,公共网络资源和为数不多的国内国际文献资源未见相应的分析方法和对应的原理解释。

2 拓扑思想的应用

应用拓扑关系开展设计性实验教学的目的主要有两层:(1)对已有实验装置进行简化,获得简洁直观的实验模型,进行实验原理上的提炼和分析;(2)在原理图或已有实验装置基础上,进行几何设计上的优化或性能上的改进,以满足针对不同教学对象的教育教学需要。两者存在一定的互逆关系。本文主要围绕第一层目的介绍拓扑思想在设计性实验中的应用。

为了获得简化的拓扑原理图,需首先理顺整个实验装置中各几何构件的功能和连接关系,然后借助拓扑思想简化几何上的实验设计,获得精简的原理图,提炼对应的核心物理思想,为实验设计的优化与改进提供理论支撑。

对于海伦喷泉实验,先以图1中两种装置图的比较为例进行分析。图1中两图的结构其实非常相似,(b)相当于在(a)的基础上将注水口放大,然后喷水口再从注水口穿过而成。显然(b)结构在几何空间上有黏连,因此需要在功能不变的前提下对其黏连部分进行剥离,以理清各部分结构之间的功能联系,得到功能相同、结构单一的简化图,然后再进行几何结构上的拓扑简化。

下面以图1(a)所示的海伦喷泉模型为例进行拓扑思想应用的展示。图1(a)实物上可以由两个配有双孔塞的广口瓶,一个长颈漏斗,以及若干导管组成。塞有双孔塞的广口瓶可视为一个具有两个孔的容器,任意改变两孔之间距离不改变容器的几何拓扑性质,从而可得到多种不同的等价几何形状,如双颈烧瓶、抽滤瓶等。漏斗则可演化为一段直导管。也就是说,在这里的变化过程中忽略部件的尺寸大小、质材、几何外形等,但仍保持改变之前相应的物理功能和几何联络特点。为便于学生理解,下面给出一种由图1(a)开始的简便

演变流程,如图 2 所示。为了便于后面进行物理原理分析,在演变示意图中对其中的关键位置,如入液管与出液管下端液压相等的位置,以短线或虚线作了标识。液压是准静态条件下的压强。

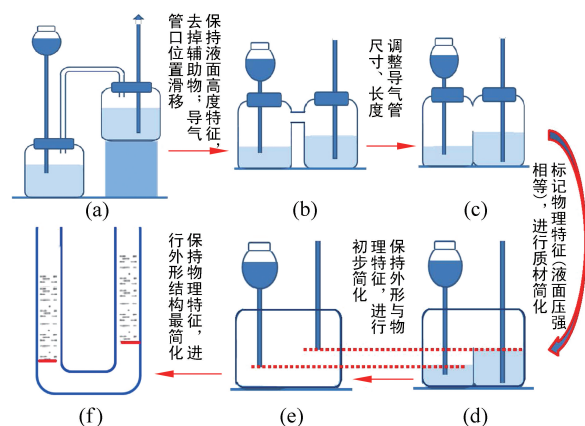


图 2 海伦喷泉实验装置拓扑简化过程示意图

C、D、E 下部短线或虚线标记准静态条件下压强相等的液面位置

图 2 对应的演化过程如下:在原装置图 1(a)基础上,去掉辅助垫块,但保留瓶内液体液面的相对高度差特征,同时对导管的位置进行平移并简化,得到图 2(b);对图 2(b)的导气管进行尺寸放大,并缩短导气管的长度至两瓶间距离为零,得到图 2(c),此时两侧液面高度差仍保持不变;其他特征不变,对图 2(c)瓶口及密封塞等进行同一质材化,得到图 2(d)。图 2(d)中的液体是不连续的,可以从功能上将两部分液体进行拓扑划分。以容器内的等压线(以虚线标示)为界,各自等压线以上的液体分别等价于漏斗内和喷管内的液体,其余等同于容器壁。这一步也可以基于液体的功能及其连续性进行直接划分,即左侧液体全部来自于注水漏斗,功能上是对瓶内气体施加压力,等同于漏斗内的液体;右侧为被喷出液体,等同于喷管内的液体。这样 2(d)可简化为 2(e)。为了与原始图的表面特征一致,图 2(e)中漏斗与喷液管内液体的下液面仍然保留一定高度差。在图 2(e)的基础上对容器壁进行几何形状的拓扑变化,可得到等价的 U 形管结构图 2(f),该图即海伦喷泉实物示意图 1(a)经过拓扑等价变换后所得到的具有海伦喷泉功能的拓扑简化图。这里几何变化的物理依据显然是根据液体和气体压强在空间分布的性质。由此可见,海伦喷泉从原理上等效于如图 2(f)所示的两段液体中间间隔一部分气体的联通结构。后面的讨论将立足于图 2(f)来分析海伦喷泉工作的原理以及有关结构参数对喷液高度的影响。

图 3 展示了 U 形管构型下海伦喷泉工作的原理。为了追溯其工作的原初动力作用机制,这里假设物理条件为无能量耗散的理想条件和准静态物理过程。设 U 形管两侧均匀,左侧为入液口(漏斗),右侧为喷水口,为展示其泵运能力,设右侧出液口高于入液口。以其中的液体和气体为研究对象,并假设液体的密度为 ρ ,外界压强为 p_0 ,气柱的初始长度为 l_0 ,待喷液柱的初始长度为 h_0 ,重力加速度为 g 。而可喷水的高度定义为出液口高液面与入液口高液面的高度差,如图 3(d)和 3(e)中的 h 和 h' 所示。

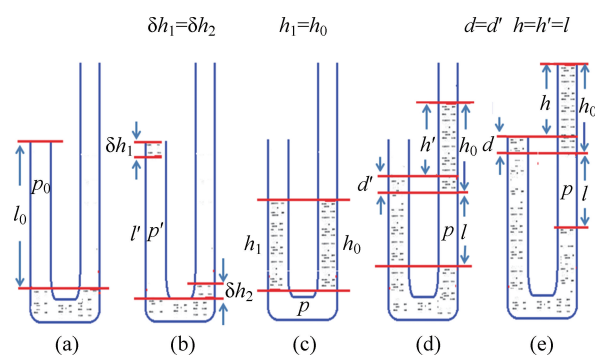


图 3 海伦喷泉的工作机理及相关参数关系示意图

初始状态如图 3(a)所示,外界气压为 p_0 ,入水管气体长度为 l_0 ,待喷液体置于 U 形管底部,两侧液面水平;然后开始通过缓缓滴加液体对 U 形管左侧的气体施压,气压等于 $p_0 + \rho g \delta h_1$,由平衡条件可知,U 形管左侧施压液柱的高度 δh_1 等于被压液体在 U 形管两侧的上下液面高度之差 δh_2 ,如(b)所示;该过程一直持续到两侧液柱高度相等,即 $h_1 = h_0$,如(c)所示。显然(b)~(c)的变化过程中,内部气体的压力逐渐增大,在(c)达到最大值。注意在偏离底部较远时,(c)状态对应应遇平衡;在底部附近,由于体积突变则(c)状态对应的平衡容易被打破。在(c)基础上,继续增加左侧施压液体的量,则左侧液体到达 U 形管底部,并进入右侧,达到如图(d)所示的平衡或稳定状态。(d)状态左右液面高度差 h' 实际上已对应着最大喷射高度。继续增加左侧液体至注水口,得到图(e)。(d)~(e)过程中管内气体压力保持不变。(e)对应的出口与入口的液面之差为 h ,即海伦喷泉喷水的理论高度。由压强关系可求出 h 等于其下方气柱的高度 l ; l 可以大于 h_0 ,取决于气体物质的量的大小。由于平衡条件相同,可以证明,(d)状态的左右液面高度差 h' 与(e)相同,注水过程中保持不变。

简单证明如下:图 3(c)~(e)状态下气柱的压强 $p = \rho gh_0 + p_0$ 。由连通器原理和气体压强分布特点,可知气柱上方与下方液面的压强等,均等于气柱压强。对于(d),气液下界面液体的压强等于左侧相同高度位置的液体压强,即 $p = \rho gh_0 + p_0 = \rho g(l + d') + p_0$,得 $l + d' = h_0$;对于 E,有 $p = \rho g(l + d) + p_0$,可得 $l + d = h_0$;比较可得 $d = d'$ 。d 和 d' 均对应注液口上液面与喷液柱下液面高度之差。再由如图所示几何关系,可得 $h = h' = l$ 。由于气体压强不变,整个过程中气柱的长度不变,因此 $d = d'$, $h = h'$ 在右侧液体升高过程中恒成立。这个关系很容易用透明胶管实验来检验。从便于操作的角度建议采用较细的胶管开展相关实验。

此后,随着液体流出喷口,喷管内液体高度小于初始时液柱高度 h_0 ,气体的压强高于上液面液体的压强,则喷口内液体开始做加速运动,直至气体上方的液体全部被喷出。最后被喷出液体的理论高度将大于 l 。由逆过程分析可知, l 对应的极限高度为 l_0 ,即初始状态的管内气柱高度。所以最后阶段液体被喷的最高。

气柱上方的液体排出后继续注水,则对应普通喷泉情况,其出水口的液面高度始终不会超过注水口。由此可见,由拓扑变化得到的 U 形管模型可以直观解释海伦喷泉所产生的实验现象和对应的工作原理。两种喷泉的本质区别在于管内流体的连续性,这一点很容易通过实验检验。

也可以证明,若其他条件不变,降低实际出水口的位置,由机械能转换关系可以使实际喷出液体获得一定初速度;通过缩小喷水口的口径,可以有效提高液体喷出的速度。理想条件下,流速与出口截面积成反比,而动能与速度的平方成正比,由此可得若出口截面积缩为原口径的 $1/n$,则出口液体速度原来的 n 倍,单位质量液体动能变为原来的 n^2 倍。对应的最大喷射高度也变为原来的 n^2 倍。实际条件下,各种能量耗散会导致喷射高度低于理论预期。

3 讨论

基于 U 形管模型可知,出口液柱长度越小,气体的高度越大,喷射的理论高度越高。该结论中喷射高度与气体的压强大小并没有正向关系。这主要是因为 U 形管模型对应着平衡态的变化,此时气体压强与出口液体高度是相关联的:压强

由液柱提供,液柱越长,被压气体的压强越大,气柱越短,则液柱上升越难,喷水高度因而降低。而实际操作过程中,为便于操控,出水口下面常常加装出水开关,喷水前开关关闭。这相当于一端封闭的 U 形管,与本文前面两端开口的模型是有本质区别的。对于一端封闭的 U 形管,注水量的增加,气体压强增大,但气压与出液管上方的液柱高度没有关系;打通气体与液体之间的喷水开关,则下面气体压强越大,上端液柱承受的压力越大,液体喷出的速度也越大,因此能喷射更高。这样就会产生人们所熟悉的压力与喷射高度的定性关系。

关于气体量的影响,由 U 形管原理图可得喷水高度与气柱高度的等量关系,与气体物质的量的大小没有直接关系。但对于有开关的海伦喷泉,喷水之前,先需要对其注水,这个过程压缩空气,对气体做功。气体量越多,可储存的能量越多。在喷泉运行后期,全部水待要喷出时,气体膨胀对外做功越多,使得最后喷出的液体获得的动能最大,这在实验现象上可以观察到喷出液的溅射。在注水状况不稳定的情况下,大量的气体还可以起到缓冲作用,维持喷泉更稳定工作。由恒温条件下理想气体体积功公式^[7] $W = \int p dV = mRT \ln(V_0/V) = mRT \ln(p/p_0)$ 估算可知,在压缩比有限的情况下,增大其物质的量 m 可以有效改变气体储能的情况。

关于喷泉运行的能量问题,由图 3(a)~(e)可知,U 形管底部的液体,逐步由被注水口液体压缩的气体压到喷水口喷出。由图 3 中(b)~(e)的比较可知,注入液体液面的下降,通过管内气体为待喷液体提供了喷出所需的能量。达到平衡((c)状态)后,进一步注水则打破原平衡,建立如(d)所示新平衡;此后注水则(d)和(e)的左右液面同步上升,直至对应的喷水高度高于注水口液面。如果将喷出的水直接注入注水漏斗,则可得如图 1(b)所示的可循环的复杂结构。这时则容易使人产生困惑,若一直循环下去,不就成了永动机了吗?其实不然,由图 3(e)显而易见,由于上下两部分液体不连续,因此无法保持通过自动循环做功。上部的水喷完,“循环”就自动结束,因此不是永动机。由此可见,基于拓扑变化得到的精简模型,有助于从教学上解决复杂结构带来的理论困惑。

在实验设计方面,基于拓扑思想可以简化实验装置,也可以增设部分结构,而不影响其工作原理。如可以在拓扑功能不变的前提下增加测量传

感器探头,测量液压、气压、温度等物理量,以便于开展实验与理论结果的定量比较探究。这显然是对U形管模型简化过程的逆操作,即由图2(f),逐步演化为图1(a),以及更复杂结构的过程。这个过程便于增加其演示性能以及实验可测量性,可增加一定的趣味性或神秘感,但也可能会给初学者带来理解上的困难,甚至困惑。而在理顺拓扑关系的基础上,将简洁的原理图与复杂的实际装置图相对照,这种困惑就比较容易消除。对于中小学生而言,进行功能相同,结构不同的部件的等价替换则更容易理解和被接受。如将烧瓶用普通水瓶代替,玻璃管由塑料管替代,或者在不同的位置打孔、开口等。对于教学,也便于就地取材,节约成本,同时也有助于训练学生解决实际问题的能力。另外,实际操作过程中,对学生其实还有更多的训练和启发作用。如实验装置的稳定性,气密性,液体的黏滞性,初始实验条件(注水速度)等对喷射高度可能都有不同的影响。因此在实验装置的设计改造方面,借助拓扑思想显然还可以激发学生的创新思想。

基于拓扑思想,也有助于在问题讨论环节,扩展问题场景,思考部分实际问题。如流管内混有气体,是不是容易产生流体中的湍动情况?普通喷泉内如果有气仓,类似于图2(d)中两部分的液体不直接连通的情况,结果如何?此时如果气体压力很高,又会发生什么情况?可想而知,在压力突然释放的情况下,很可能产生类似“井喷”的现象。可知,基于简洁的U形管模型,有助于简化解决实际物理问题的理论思路,拓展学生实事求是、举一反三的理性探究思维。

基于U形管模型的简便性,其实物本身也具有较好的课堂展示优势。为便于实际操作,演示时可采用口径细小的透明胶管,比如医用输液管。口径过粗则不容易形成液封,容易导致两部分液柱之间的气体泄露。对于粗管,则需要在注水口和出水口下方增加控制开关以便于操控。实物尺寸上以管长长,管径小,高度大,底部宽度小,且尽可能竖直放置为佳。

以上讨论可知,一个合适的小实验不仅可以有效训练学生的实验操作能力,培训实验器材设计与加工方面的动手技能,借助于拓扑思想,还有助于培养学生灵活运用知识的创新思维,锻炼解决具体物理问题的能力,提升学生STEM或STEAM综合素质。这一点与对中小学生阶段开展的STEM综合素质教育目标有同工之处。这

也是目前多数低年级大学生所欠缺,有待努力培养的一项重要综合素质。

4 结语

拓扑思想在设计性实验中可有丰富的体现和应用。作为设计性实验的重要素材,海伦喷泉适用范围广泛,可用于从小学到大学的不同学段、不同知识基础的教育对象,有助于培养学生包括实验设计、加工、操作等能力在内的综合素质。对于海伦喷泉实验,基于拓扑思想,向简化设计的方向拓扑演化,可将多种结构和设计形式的海伦喷泉实物,简化成最基本的U形管模型,从而便于从中提炼出简单的物理原理,便于教学过程中理论演示和理论理解。在基本模型的基础上,向实用化和功能化的方向演化,也可以拓展为多种具体结构的实验装置图,便于激发学生的制作创造性和参与积极性。对于教学,基于拓扑功能不变下的几何变换,也便于教师就地取材,开展丰富多彩的实验设计与教学工作。

参 考 文 献

- [1] 王敬庚. 直观拓扑[M]. 北京:北京师范大学出版社,2010.
- [2] BALCOMBE J, BYLAND S, CHERNIKOV N, et al. Problems for the 31st IYPT 2018[Z/OL]. (2017-07-13) [2021-03-01]. <https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-31st-iypt-2018/>
- [3] 陈文毅,李想,李晓天,等. 海伦喷泉实验探究[J]. 教育教学论坛,2019,13:276-277.
CHEN W Y, LI X, LI X T, et al. The experimental exploration of Heron's fountain[J]. Education Teaching Forum, 2019, 13: 276-277. (in Chinese)
- [4] 彭亮滔,陈婷,姚真瑜. 希罗喷泉动力学分析[J]. 大学物理, 2020,39(2):56-61.
PENG L T, CHEN T, YAO Z Y. Dynamics analysis of Heron's fountain[J]. College Physics, 2020, 39(2): 56-61. (in Chinese)
- [5] 毕瑛洁,白赫,段瑞梦,等. STEM教育在CUPT中的体现及创新能力培养模式初探[J]. 物理实验,2018,38(5):32-36.
BI Y J, BAI H, DUAN R M, et al. Embodiment of STEM education in CUPT and the training mode of innovation ability[J]. Physics Experimentation, 2018, 38(5): 32-36. (in Chinese)
- [6] YAAKOB Y, IBRAHIM D, AWALLUDIN M A, et al. Solar-powered cooling system for residential building[J]. IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci., 2019,268: 012165.
- [7] 赵近芳. 大学物理学(上)[M]. 北京:北京邮电大学出版社, 2006.