

基于排水法的金属丝杨氏模量测量研究

李忠遇¹ 程琳²

(浙江理工大学¹启新学院;²理学院,浙江 杭州 310018)

摘要 杨氏模量是描述固体材料抵抗弹性形变能力的重要力学参数,对它的精确测量在科学研究和技术应用中都具有重要意义。本研究经过深入调研和实践,在测量仪器上改进创新,通过排水法来取代大学物理实验课中常用的光杠杆法,实现了对金属丝拉升长度变化量的间接测量。本装置实验器材结构简单、使用方便、廉价、易拆卸和组装、不易损坏、读数精准稳定,具有较高的推广价值,适用于学生进行金属丝杨氏模量测量的实验探究。

关键词 金属丝杨氏模量;排水法;逐差法;微小变化量

STUDY ON MEASUREMENT OF YOUNG'S MODULUS OF METAL WIRE BASED ON DRAINAGE METHOD

LI Zhongyu¹ CHENG Lin²

(¹Qixin College; ²College of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, Zhejiang 310018)

Abstract Young's modulus is an important mechanical parameter to describe the elastic deformation resistance of solid materials, and its accurate measurement is of great significance in scientific research and technical application. Through in-depth research and practice, this study improves and innovates on measuring instruments, replaces the optical lever method commonly used in college physics experimental courses by drainage method to realizes indirect measurement of metal wire drawing length variation. The experimental equipment of this device is simple in structure, convenient operation, cheap, not easy to be damaged, easy to disassembly and assembly, accurate and stable reading, and has high promotion value. It is suitable for students to carry out experimental research on the measurement of Young's modulus of metal wire.

Key words Young's modulus of wire; drainage method; successive differential method; small changes

杨氏模量是固体材料的一个十分重要的性能参数,是材料抵抗弹性形变能力大小的标志^[1]。当一条长度为 L , 平均横截面积为 S 的金属丝在

外力 F 的作用下伸长 ΔL , $\frac{F}{S}$ 的物理量叫应力,其物理意义是金属丝单位截面积所受到的外力;而

收稿日期: 2021-08-31; 修回日期: 2021-11-12

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(LQ20E010009); 浙江理工大学育人示范课程建设项目《普通物理实验》(YRKC0902); 国家级大学生创新创业训练计划项目(202010338032)。

通讯作者: 程琳, 女, 实验师, 研究方向为大学物理实验教学, chenglin@zstu.edu.cn。

引文格式: 李忠遇, 程琳. 基于排水法的金属丝杨氏模量测量研究[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 00-00.

Cite this article: LI Z Y, CHENG L. Study on measurement of Young's modulus of metal wire based on drainage method[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 00-00. (in Chinese)

$\frac{\Delta L}{L}$ 的物理量叫做应变,其物理意义是单位长度所对应的伸长量,其中 ΔL 为微小变化量;而应力与应变之比被叫做弹性模量。杨氏模量衡量的是一个各向同性弹性体的刚度,其定义为在胡克定律适用范围内,单轴应力与单轴应变之间的比值,即

$$Y = \frac{F}{S} / \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

现如今大学物理实验课程中对杨氏模量的测量主要通过光杠杆放大法,将微小变化量 ΔL 放大至光标尺上来间接得到微小变化量 ΔL 。光杠杆放大法原理如图 1 所示。其中右侧为尺读望远镜, b 为光杠杆的杆长, D 为光杠杆平面镜到尺的距离。当加减砝码时,金属丝的变化量为 ΔL ,同时金属丝带动光杠杆转动,从而使光杠杆上的平面镜转过 θ 角度,尺读望远镜中读数改变为 $n_2 - n_1$,利用几何关系即可推导出金属丝 L 的微小伸长量 ΔL ,达到测量的目的。

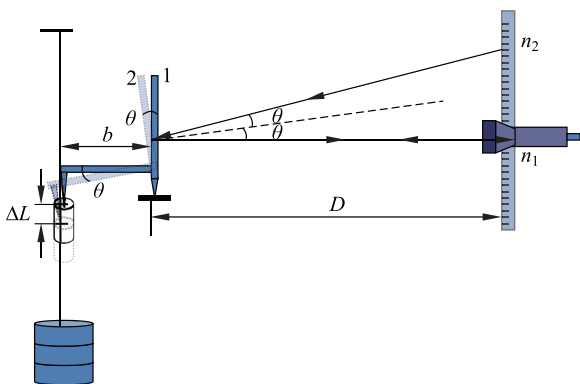


图 1 光杠杆放大法原理图

光杠杆法测量金属丝杨氏模量的优点在于简单准确地将微小形变放大,测量和读数也很简单,但是在实践过程中,由于托盘和槽码较难保持平稳,会导致投影的光标上下左右飘忽不定,难以做到精确读数,使得在直尺上的测量数据存在较大偏差。虽然现在也有许多方法测量金属丝的杨氏模量,如脉冲激振法^[2]、声频共振法^[3]、声速法^[4]和弯曲法^[5]等,但这些方法原理复杂、操作性强、测量仪器昂贵,不适合大面积教学推广。

基于上述实验仪器的技术问题,本研究设计提供一种基于排水法测量金属丝杨氏模量的装置,它可以在提高实验测量的精准性的同时,降低实验成本,非常适合走近大学物理实验课堂,提高教学效率。

1 基于排水法的实验装置及原理

基于排水法测量金属丝杨氏模量的实验装置结构图如图 2 所示。主要实验装置包括圆柱棒、量筒、测量支架、砝码、托盘、待测金属丝等。如图 2 所示,其底座与支架固定连接,可以调节底座上下位置和水平位置以保证装置水平。圆柱棒悬挂在托盘底部,将圆柱棒伸入内壁直径略大于圆柱棒的盛水量筒,并浸入水中。在托盘上添加砝码,金属丝会因所加砝码重力的作用向下拉伸,圆柱棒也会向下移动从而导致水面上升,通过测量水面上升的距离,便可间接得到金属丝拉伸的长度,实现对微小变化量测量的目的。

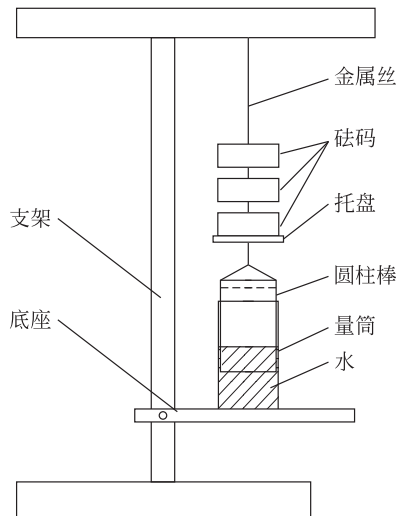


图 2 实验装置结构图

基于排水法测量金属丝杨氏模量实验装置的重点在于加减砝码时金属丝的微小变化量与水面上升高度之间的关系。如图 3 所示,圆柱棒的直

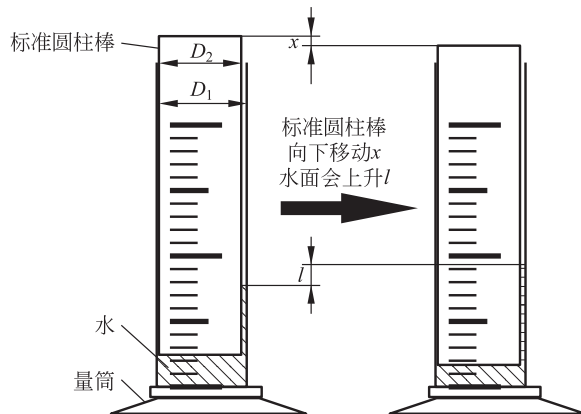


图 3 排水法原理图

径为 D_2 , 量筒内壁直径为 D_1 。

当圆柱棒底部在水面以下时, 向托盘添加砝码, 圆柱棒向下移动 x , 水面就会上升 l , 有

$$\pi \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \cdot x = \left[\pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \right] \cdot l$$

即

$$l = \frac{D_2^2}{D_1^2 - D_2^2} \cdot x = \frac{1}{\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 - 1} \cdot x \quad (2)$$

通过式(2)可以看出, 水面上升的高度 l 与圆柱棒向下移动的距离 x 是正比例关系, 如果令 $k =$

$\frac{1}{\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 - 1}$, 称 k 为放大倍数。将 k 代入到式(2)

可得

$$D_1 - D_2 = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1 \right) \cdot D_2 \quad (3)$$

由式(3)可知, $D_1 - D_2$ 随 k 的增大而减小, 即放大倍数要求越高, 则 D_1 与 D_2 之间相差应越小。

另一方面, 由 $k = \frac{D_2^2}{D_1^2 - D_2^2}$, 可得放大倍数的不确定度

$$\begin{aligned} |\Delta k| &\approx |dk| = \left| \frac{\partial k}{\partial D_1} \Delta D_1 + \frac{\partial k}{\partial D_2} \Delta D_2 \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial k}{\partial D_1} \Delta D_1 \right| + \left| \frac{\partial k}{\partial D_2} \Delta D_2 \right| \\ &= \frac{2D_1 D_2^2}{(D_1^2 - D_2^2)^2} |\Delta D_1| + \\ &\quad \frac{2D_1^2 D_2}{(D_1^2 - D_2^2)^2} |\Delta D_2| \end{aligned} \quad (4)$$

k 的相对不确定度

$$\begin{aligned} u(k) = \frac{|\Delta k|}{k} &\leq \frac{2D_1}{D_1^2 - D_2^2} |\Delta D_1| + \\ &\quad \frac{2D_1^2}{D_2(D_1^2 - D_2^2)} |\Delta D_2| \end{aligned} \quad (5)$$

为了更加直观地了解 $D_1 - D_2$ 与 k 的关系, 代入假设的数据进行分析。取圆柱棒的直径 $D_2 = 100\text{mm}$, 再取放大倍数 $k = 40$, 则由式(3)可解得 $D_1 \approx 101.24\text{mm}$ 。设 $|\Delta D_1| \approx |\Delta D_2|$, 由式(5)可得放大倍数 k 的相对不确定度 $u(k) = \frac{|\Delta k|}{k} \leq 1.63 |\Delta D_1|$ 。选用 $\Delta D_1, \Delta D_2 \leq 0.03\text{mm}$ 的圆柱棒和圆柱量筒, 则放大倍数 k 的相对误差可以控制在 5% 以内。

金属丝杨氏模量测量实验中, 还应该考虑水

的浮力的影响, 则杨氏模量

$$Y = \frac{mg - \rho g x \cdot \frac{D_2^2}{4} \pi}{S} \bigg/ \frac{x}{L} \quad (6)$$

将金属丝的横截面积 $S = \frac{d^2}{4} \pi$ 和式(2)代入式(6)

得排水法测量杨氏模量的计算公式

$$Y = \frac{LD_2^2}{(D_1^2 - D_2^2)l} \cdot \frac{4mg - \rho g l (D_1^2 - D_2^2) \pi}{d^2 \pi} \quad (7)$$

还可以写成

$$Y = \frac{4mgkL}{d^2 l \pi} - \frac{\rho g L D_2^2}{d^2} \quad (8)$$

式中, l 可结合逐差法取平均值替代, 以减小实验误差。

2 实验验证及结果分析

2.1 实验演绎及数据计算

(1) 用游标卡尺多次测量量筒内壁直径和圆柱棒的直径, 取平均值后得 $D_1 = 93.60\text{mm}$, $D_2 = 92.48\text{mm}$ 。同样地, 用千分尺多次测量金属丝平均直径 $d = 0.482\text{mm}$, 用米尺测量金属丝长度 $L = 989.3\text{mm}$ 。

(2) 在量筒内装入适量密度为 ρ 的水, 将圆柱棒悬挂在托盘下方, 置入到量筒内, 适当调节量筒位置, 使圆柱棒底部没入水面, 调整底座, 固定好量筒的位置, 大致保证量筒和圆柱棒的轴线重合。在托盘上预加一块砝码并记录此时的水位 l_0 。

(3) 依次在托盘上添加砝码, 并依次记录添加砝码后平稳水面的位置 $l_1, l_2, l_3 \dots$ 增加到第 5 块砝码时, 记录好 l_5 后, 逐一减少砝码, 并记录减少砝码后的平稳水面位置 $l'_4, l'_3, l'_2 \dots$ 减少到只剩下预加的砝码时, 记录好 l'_0 的水位。

(4) 将圆柱体移出量筒, 将实验装置复原为做实验前的状态。以 l_0 为标记原点量取 l_i 和 l'_i 到 l_0 之间的距离。整理记录实验数据, 利用逐差法计算 Δl 的平均值为 22.0mm , 数据处理见表 1。

已知砝码质量: $m = 2.000\text{kg}$, 室温下水的密度 $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 统一单位后代入到式(7)得

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{LD_2^2}{(D_1^2 - D_2^2)l} \cdot \frac{4mg - \rho g l (D_1^2 - D_2^2) \pi}{d^2 \pi} = \\ &1.98 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

表 1 实验数据处理

加载砝码质量/kg	与 l_0 位置的距离/mm						$\Delta l_i = \frac{\overline{l_{i+3}} - \overline{l_i}}{3}$		Δl_i 的绝对误差	
	拉伸力增加		拉伸力减小		平均值 $\bar{l} = \frac{l_i + l'_i}{2}$				$\Delta_{\Delta l_i} = \Delta l_i - \overline{\Delta l} $	
							/mm		/mm	
0	l_0	0.0	l'_0	0.9	$\overline{l_0}$	0.45	$\frac{\overline{l_3} - \overline{l_0}}{3}$	21.72	$\Delta_{\Delta l_1} = \Delta l_1 - \overline{\Delta l} $	0.23
2	l_1	21.2	l'_1	21.7	$\overline{l_1}$	21.45	$\frac{\overline{l_4} - \overline{l_1}}{3}$	22.23	$\Delta_{\Delta l_2} = \Delta l_2 - \overline{\Delta l} $	0.28
4	l_2	42.5	l'_2	44.1	$\overline{l_2}$	43.30	$\frac{\overline{l_5} - \overline{l_2}}{3}$	21.90	$\Delta_{\Delta l_3} = \Delta l_3 - \overline{\Delta l} $	0.05
6	l_3	65.3	l'_3	65.9	$\overline{l_3}$	65.60	$\overline{\Delta l} = \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta l_i}{3} = 22.0$ $\overline{\Delta_{\Delta l}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta_{\Delta l_i}}{3} = 0.2$			
8	l_4	87.9	l'_4	88.4	$\overline{l_4}$	88.15				
10	l_5	109.0	l'_5	109.0	$\overline{l_5}$	109.00				

2.2 不确定度的计算

金属丝长度用米尺单次测量,故 $u(L) = \Delta_{\text{尺}} = 0.5\text{mm}$;金属丝直径使用千分尺多次测量,经计算 $u(d) = 0.004\text{mm}$;量筒内壁直径和圆柱棒的直径都使用游标卡尺多次测量所得,经计算 $u(D_1) = 0.03\text{mm}$, $u(D_2) = 0.03\text{mm}$;水面位置的误差由表 1 知 $u(l) = 0.2\text{mm}$;实验给出砝码质量误差为 $\pm 0.001\text{kg}$ 。由于各直接测量量彼此独立,由不确定度传递公式^[5]得不确定度的计算公式,利用 MATLAB 代入统一单位后的数据计算可得相对不确定度 $\frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln Y}{\partial d}\right)^2 u^2(d) + \dots + \left(\frac{\partial \ln Y}{\partial l}\right)^2 u^2(l)} = 0.047 = 4.7\%$ 。

故标准不确定度 $u(Y) = \frac{u(Y)}{Y} \cdot Y \approx 9 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 。

2.3 实验结果分析

综上,使用排水法测得到金属丝杨氏模量的值为 $Y = (1.98 \pm 0.09) \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,对同一金属丝使用光杠杆法测得其杨氏模量值为 $(2.01 \pm 0.11) \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,两者数据相差不大,而且排水法所测数据的不确定度略有减小。后续我们又对此金属丝使用排水法进行了多次实验测量,实验各组所测量的值大都在 $1.97 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 至 $2.03 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 之间,说明用排水法测金属丝杨氏模量具有一定的可行性。

从前文的公式推导以及对多次实验进行分析:钢丝伸长量放大倍数的误差主要取决于圆柱棒和量筒表面的粗糙度,因此,在不改变实验装置的前提下,减小实验误差最有效和直接的办法就

是提高圆柱棒和量筒的精度,选取精度更高的器件势必会有更精确的测量结果,但同时也会增加装置的成本。另一种可行的方法是改进仪器,将装置设计成密封式,可以有效减小因仪器表面粗糙度而产生的误差。

在实验进行水面位置读数时发现:有时可能会出现各处位置的水面不在同一高度的情况,这是由于圆柱棒与量筒的中心轴线位置发生偏离,两壁空隙较窄的一侧出现水的浸润所导致的。实验过程中需细心观察,出现该现象时轻微旋转圆柱棒便可将水面大致控制在同一高度。另外,在减少砝码(水面下降)时,由于水的黏性,会有一层水膜黏附在量筒内壁,而导致读数偏低,但根据工程流体力学的研究^[8],这种水膜极薄,对读数造成的影响甚微。

3 结语

本文设计了一种基于排水法测量微小长度的变化量,运用于大学物理实验中的金属丝杨氏模量测量探究实验,基于排水法的金属丝杨氏模量测量装置其设计原理和操作方式都很简单,占地面积小,易拆卸和组装,生产成本和维护成本也很低,相较于其他的杨氏模量的测量方法和测量仪器在成本与可操作性上更胜一筹,且通过实验验证,数据结果表明该装置测量金属丝的杨氏模量数据和理论值相差不大,获得了较为理想的实验结果,因而适用于学生进行金属丝杨氏模量测量的实验探究,在物理实验教学中具有一定的推广价值。

目前市面上基于排水法原理的装置并不多,本文所设计的排水法装置仅仅是提供一个思路,在仪器装置的结构设计和应用上不局限于此,稍加改进原有装置或者重新设计出一个新的基于排水法的杨氏模量测量装置将可能有效减小现有装置的缺点,总体而言基于排水法的金属丝的杨氏模量测量实验装置存在实验研究价值和科学意义。

参 考 文 献

- [1] 姜悦,吴官东. 基于迈克耳孙干涉仪与线阵 CCD 的金属丝杨氏模量测量方案[J]. 物理与工程, 2019, 29(4): 93-96.
JIANG Y, WU G D. A method of measuring Young's modulus of wire based on Michelson interferometer and linear CCD[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(4): 93-96. (in Chinese)
- [2] 胡飘,宋艳艳,董殿敏,等. 脉冲激振法测试耐火材料杨氏模量的原理与应用[J]. 耐火材料, 2020, 54(3): 253-255+259.
HU P, Song Y Y, DONG D M, et al. Principle and application of pulse excitation method to test Young's modulus of refractories[J]. Refractories, 2020, 54(3): 253-255+259. (in Chinese)
- [3] 邱一富,牛秦洲,邱岩,等. 基于 Labview 的高温弹性模量测试装置[J]. 理化检验(物理分册), 2014, 50(3): 186-190.
QIU Y F, NIU Q Z, QIU Y, et al. Testing equipment for high temperature elastic modulus based on Labview[J]. Physical Testing and Chemical Analysis (Part A: Physical Testing), 2014, 50(3): 186-190. (in Chinese)
- [4] 江佩师,张颖,白翠珍,等. 基于中间层原理杨氏模量测量系统[J]. 中国新技术新产品, 2016(8): 7.
JIANG P S, ZHANG Y, BAI C Z, et al. Young's modulus measurement system based on intermediate layer principle [J]. New Technology & New Products of China, 2016(8): 7. (in Chinese)
- [5] 段阳,杨浩林,伍泓锦,等. 杨氏弹性模量测量实验综述[J]. 物理与工程, 2020, 30(3): 89-102.
DUAN Y, YANG H L, WU H J, et al. Review of the experiments of Young's modulus measurement [J]. Physics and Engineering, 2020, 30(3): 89-102. (in Chinese)
- [6] 史立平. 杨氏弹性模量实验中不确定度的评定[J]. 新课程(教研), 2010(12): 178-179.
SHI L P. Evaluation of uncertainty in Young's modulus of elasticity experiment [J]. New curriculum (research), 2010(12): 178-179. (in Chinese)
- [7] 段坤杰,王亮. 杨氏模量实验的优化研究[J]. 许昌学院学报, 2011, 30(2): 35-38.
DUAN K J, WANG L. Research and improvement of Young's modulus experiment [J]. Journal of Xuchang University, 2011, 30(2): 35-38. (in Chinese)
- [8] 马航海. 简明工程流体力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2016: 102-108.
- [5] 史振宇,丁益民,张余梦,等. 利用 Tracker 研究气垫导轨上弹簧振子运动[J]. 物理与工程, 2018, 05: 78-81.
SHI Z Y, DING Y M, ZHANG Y M, et al. Using tracker to study the mechanical motion of spring oscillator on the air cushion guide [J]. Physics and Engineering, 2018, 05: 78-81. (in Chinese)
- [6] 范颖玺,陈东生,王莹. 利用 Tracker 软件实现动量守恒定律的验证[J]. 大学物理实验, 2020, 01: 96-99.
FAN Y X, CHEN D S, WANG Y. Verification of conservation law of momentum by using tracker software [J]. College Physics Experiment, 2020, 01: 96-99. (in Chinese)

(上接第 94 页)

- JU B Y, QIN J M, WANG G X. Study on collision response of viaduct under earthquake [J]. Journal of Dalian University, 2017, 38(6): 38-41. (in Chinese)
- [2] 周又和. 离散单元法的颗粒接触模型(即软球正碰撞模型)的研究进展[C]. 颗粒材料计算力学研究进展, 2012.
- [3] 吴俊林. 基础物理实验[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [4] 周雨青,叶兆宁,吴宗汉. 球类运动中空气阻力的计算和分析[J]. 物理与工程, 2002, 12(1): 55-59.
ZHOU Y Q, YE Z N, WU Z H. Calculation and analysis of air resistance in ball games [J]. Physics and Engineering, 2002, 12(1): 55-59. (in Chinese)