

小船渡河问题的拓展

孟 勇

(合肥北辰教育培训学校有限公司, 安徽 合肥 230041)

摘 要 在考虑河水流速与距河岸距离的平方成正比条件下, 首先详细地分析了当小船渡河角度一定时的渡河过程, 给出了若干运动学方程, 然后通过求极值的方式解决了最短过河时间与最小过河位移问题。同时还考虑小船渡河时船头始终指向定点的运动情况, 求得了其轨迹方程与过河时间。并且得出了无论船速大小都最终会行驶到定点的结论。此外还结合 Maple 软件绘制出以上两种情况下的小船渡河动画, 从而以定性分析与定量计算相结合的方式对该问题进行较为完整的诠释。

关键词 河水变速; 渡河角度; 数学推导; 仿真动画

EXPANSION OF THE SMALL BOAT CROSSING THE RIVER PROBLEM

MENG Yong

(Hefei Beichen Education Training School Co. Ltd., Hefei, Anhui 230041)

Abstract Under the condition that the river velocity is proportional to the square of the distance from the river bank, the process of crossing the river when the boat is crossing the river at a certain angle is analyzed in detail, and several kinematic equations are given. Then the shortest crossing time and the smallest crossing displacement are solved by finding the extremum. At the same time, the motion of the boat's bow always pointing to the fixed point is considered, and the trajectory equation and crossing time are obtained. It is concluded that no matter the speed of the ship, it will eventually travel to a fixed point. In addition, Maple software is used to draw the animation of boat crossing in the above two situations, so as to explain the problem in a more complete way by combining qualitative analysis and quantitative calculation.

Key words river speed change; river crossing angle; mathematical derivation; simulation animation

小船渡河模型因其运动的等时性、等效性、独立性等特征, 不仅一直作为高中物理教师在讲解二维情况中运动的合成与分解的经典题目而被广泛使用着, 而且在大学物理里讲解绝对速度、相对

速度与牵连速度的相关知识中也作为例题使用^[1]。在文献[2]中运用了矢量分析的方法求解出最短渡河时间与最小渡河位移问题, 而在文献[3]中通过数学中求极值的方法也求得了该类问题的

收稿日期: 2021-10-21; 修回日期: 2021-11-16

作者简介: 孟勇, 男, 机构物理教师, 主要从事非线性物理研究与物理教学的工作, wanguozhifu@yeah.net。

引文格式: 孟勇. 小船渡河问题的拓展[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 95-104.

Cite this article: MENG Y. Expansion of the small boat crossing the river problem[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 95-104. (in Chinese)

解。但同时注意到很少有学者在河水流速是非均匀分布的情况下对小船渡河问题进行探究。自然界中的流体具有黏滞性,由牛顿黏性定律^[4]以及河岸的阻碍作用可知河中游的水流速度最快,而越靠近岸边水流速度越慢。在文献[5]中笔者考虑了河水各点的流速与较近河岸的距离成正比时船头垂直河岸的渡河情况,得到其运动学方程与轨迹方程。作为对河水非均匀流速下的小船运动的进一步分析,本文以文献[6],文献[7]中所指出的明渠横向流速成抛物线分布规律为依托,探究了假定河水流速近似与距河岸距离的平方成正比情况下的渡河模型。首先考虑了船头固定角度时的最短过河时间与最小过河位移问题,同时还探究了小船回程时船头始终指向对岸定点时的渡河过程,并从轨迹方程中得到了小船以不同速率渡河时,最终都会到达船头所指向定点的所在位置的结论。此外还利用 Maple 软件^[8-9]来模拟制作出小船渡河的视频,从而以生动、形象且富于趣味性的运动可视化方式直观地展现出小船过河的整个运动过程。

1 船头固定角度的运动

如图 1 所示,小河宽度为 d ,同时从河水中的白色波浪密集程度可以看出河水在中流湍急,而在两侧舒缓。因此设河水在中流时速度为 v_0 ,而在岸边时其速度降为 0,并且在河水流速满足与距河岸距离的平方成正比情况下,以小船出发点为坐标原点时,则设水流速度 u 表达式为

$$u = ay^2 + by + c \quad (1)$$

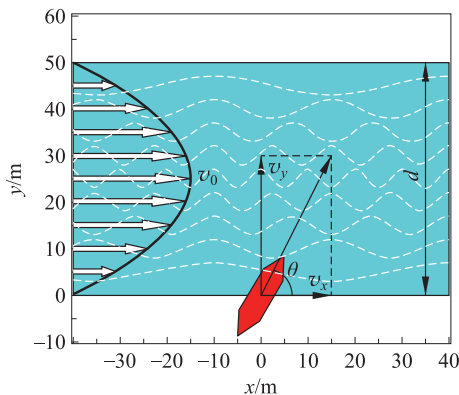


图 1 流速非均匀分布

又由分析可知其方程必过 $(0,0)$ 、 $(d/2, v_0)$ 、 $(d,0)$

三点,则将上述三点坐标代入式(1)可解的其表达式为

$$u = \frac{4v_0 y}{d} \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (2)$$

再设小船船头方向与下游夹角为 θ ,并由于分运动具有独立性可将小船相对静水的速度如图 1 所示分解为沿河岸方向和垂直于河岸的速度,即

$$v_x = v \cos \theta \quad (3)$$

$$v_y = v \sin \theta \quad (4)$$

因此再根据矢量的叠加性可知小船相对地面的速度为

$$V_x = v \cos \theta + \frac{4v_0 y}{d} \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (5)$$

$$V_y = v \sin \theta \quad (6)$$

由式(6)可得到小船的垂直于河岸的位移公式为

$$y = vt \sin \theta \quad (7)$$

由上式可知小船的过河时间为

$$t = \frac{d}{v \sin \theta} \quad (8)$$

从式(8)可以看出,当 $\sin \theta = 1$,即船头垂直于河岸 ($\theta = \pi/2$) 行驶时小船过河时间最短

$$t_{\min} = \frac{d}{v} \quad (9)$$

同时再将式(7)代入式(5)得到

$$V_x = v \cos \theta + \frac{4v_0 vt \sin \theta}{d} \left(1 - \frac{vt \sin \theta}{d}\right) \quad (10)$$

由上式积分可得到小船沿河岸的水平位移公式为

$$x = vt \cos \theta + \frac{2v_0 vt^2 \sin \theta}{d} \left(1 - \frac{2vt \sin \theta}{3d}\right) \quad (11)$$

并且通过对式(6)和式(10)求关于时间 t 的导数可加速度的表达式为

$$a_x = \frac{4v_0 v \sin \theta}{d} \left(1 - \frac{2vt \sin \theta}{d}\right) \quad (12)$$

$$a_y = 0 \quad (13)$$

从式(12)中加速度为单调递减的函数可知小船在 x 方向上先做加速度逐渐减小的加速运动,再做加速度逐渐增大的减速运动。而式(6)~式(7)以及式(13)可知小船在 y 轴方向上做匀速运动。再由式(7)与式(11)可得其运动的轨迹方程

$$x = y \cot \theta + \frac{2v_0 y^2}{dv \sin \theta} - \frac{4v_0 y^3}{3d^2 v \sin \theta} \quad (14)$$

从轨迹方程可知小船的运动轨迹呈现三次方曲线。再对上式对 θ 进行求导并化简为

$$x'(\theta) = -\frac{y\left(2yv_0\left(d - \frac{2y}{3}\right)\cos\theta + d^2v\right)}{d^2v\sin^2\theta} \quad (15)$$

然后令上式 $x'(\theta)=0$ 得到

$$\theta = \pi - \arccos\left(\frac{3d^2v}{2v_0y(3d - 2y)}\right) \quad (16)$$

再将式(16)代入式(14)得到小船渡河轨迹的包络线方程为

$$x = \frac{y}{d^2v} \sqrt{(4(d - 2/3y)^2y^2v_0^2 - d^4v^2)} \quad (17)$$

最后将小船的渡河时间式(8)代入式(11)得到小船渡河完成时的水平位移为

$$X = d\left(\cot\theta + \frac{2v_0}{3v\sin\theta}\right) \quad (18)$$

由上式可得小船过河位移为

$$L = \sqrt{X^2 + d^2} = \frac{d\sqrt{4v_0^2 + 12vv_0\cos\theta + 9v^2}}{3v\sin\theta} \quad (19)$$

然后对上式中 θ 求导并化简可得

$$L'(\theta) = -\frac{d(2v_0\cos\theta + 3v)(3v\cos\theta + 2v_0)}{3v\sin^2\theta\sqrt{4v_0^2 + 12vv_0\cos\theta + 9v^2}} \quad (20)$$

再令式(20)中 $L'(\theta)=0$, 得到

$$\theta = \begin{cases} \arccos\left(-\frac{3v}{2v_0}\right) & (v < \frac{2}{3}v_0) \\ \arccos\left(-\frac{2v_0}{3v}\right) & (v > \frac{2}{3}v_0) \end{cases} \quad (21)$$

最后再将式(21)代入式(19)中得到两种情况下的最小渡河位移为

$$L_{\min} = \begin{cases} \frac{2v_0}{3v}d & (v < \frac{2}{3}v_0) \\ d & (v > \frac{2}{3}v_0) \end{cases} \quad (22)$$

下面通过 Maple 软件制作出船头以不同角度行驶的画面。

在图 2 中可以看出小船船头的箭头代表船头的朝向,其颜色对应的角度在图中下方给以标注。进而从动态图中能够发现船头垂直于河岸的红色小船($\theta=\pi/2$)最先达到河岸对面,同时船头与下河岸夹角 $2\pi/3$ 的蓝色小船渡河位移最小,并且还能观察到所有小船都在黑色的包络线的右边进行运动,这些现象都与上述的讨论相符合。此外在

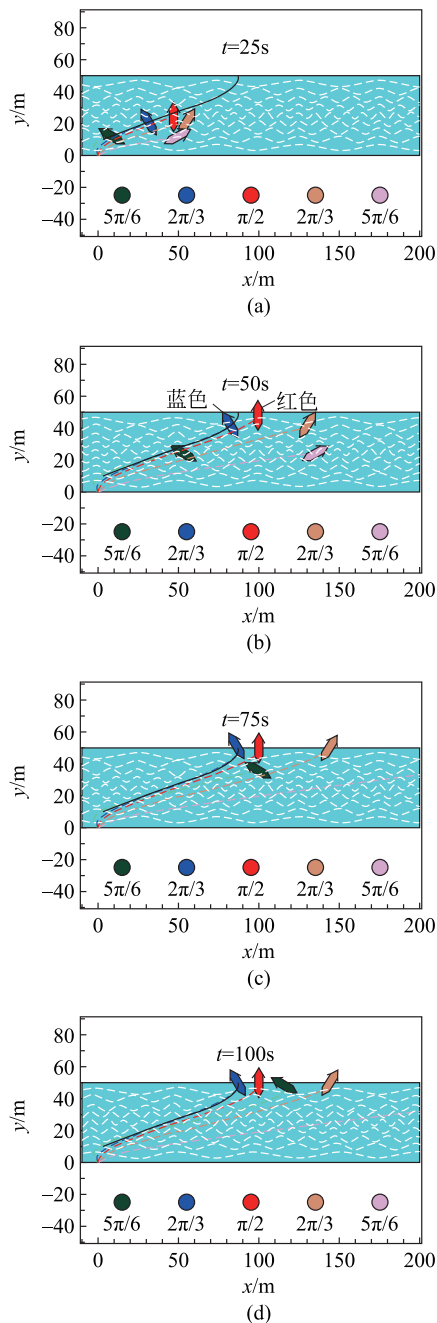


图 2 固定船头角度的渡河动画
($d=50\text{m}$, $v_0=3\text{m/s}$, $v=1\text{m/s}$)

图中因小船运动而留下的虚线段可以清楚地反映出小船因水速的变化而呈现出曲线运动的轨迹,以及图中的计时器能清楚地显示出各个小船在任意时刻的位置。

2 船头指向对岸定点的运动

我们再考虑小船返航时,船头始终指向对岸

出发点时的渡河运动,如图3所示。

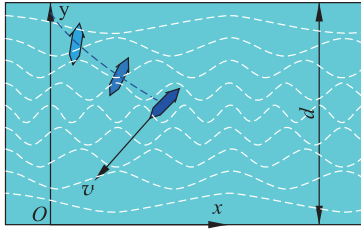


图3 指向对岸出发点的过河运动

则小船相对于静水的速度为

$$\mathbf{v} = -\frac{xv}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{e}_x - \frac{yv}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{e}_y \quad (23)$$

再将上式与式(2)相结合可得小船相对于地面的速度为

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4v_0y}{d}\left(1 - \frac{y}{d}\right) - \frac{xv}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (24)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{yv}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (25)$$

然后将以上两式对时间 t 进行求导可得小船相对于地面的加速度为

$$a_x = \frac{4v_0vy(3y^3 - (d-2y)x^2 - 2dy^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}d^2} \quad (26)$$

$$a_y = \frac{4(d-y)v_0vxy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}d^2} \quad (27)$$

在式(25)和式(27)中可判断出 $v_y < 0, a_y > 0$, 则可知小船在返航过程中竖直方向上做减速运动。此外, 由式(24)~式(25)可得描述小船轨迹的微分方程为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{4v_0\sqrt{x^2+y^2}}{d^2v}\left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (28)$$

再通过求解该微分方程得到小船渡河的轨迹方程

$$x = y \sinh\left(\frac{2v_0(d-y)^2}{d^2v}\right) \quad (29)$$

从轨迹方程中可以看出无论小船的速度多少, 当渡河完成时 ($y=0$), 小船一定会运动到船头指定的定点 ($x=0$) 的位置。并且由上式及式(24)可绘制出小船水平速度 V_x 与竖直位移 y 的关系图。

由图4可知不同船速的小船在返航过程中在 x 方向上都会先顺流做加速运动, 然后再做减速运动, 最后在不同位置处开始反向加速逆流而行。并且还可以发现当船速越小, 折返点的纵坐标越靠近原点。

此外由式(25)与式(29)可得

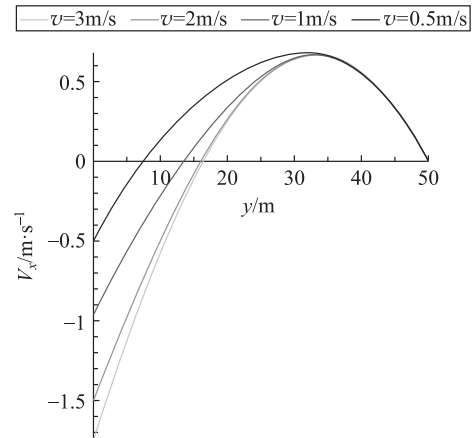


图4 V_x - y 的关系

($d=50\text{m}, v_0=1\text{m/s}$)

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{\sqrt{\left(y \sinh\left(\frac{2v_0(d-y)^2}{d^2v}\right)\right)^2 + y^2}}{yv} \quad (30)$$

然后求解该微分方程可得小船渡河时间为

$$t = \frac{d}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{vv_0}} \left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2v_0}{v}}\left(1 - \frac{y}{d}\right)\right) + i \operatorname{erf}\left(i \sqrt{\frac{2v_0}{v}}\left(\frac{y}{d} - 1\right)\right) \right) \quad (31)$$

其中 $\operatorname{erf}(x)$ 为误差函数^[10]。最后再用 Maple 软件制作出小船的行驶动画。

从图5中可以观察到不同速度的小船在行驶过程中船头均指向对岸的原点。而且速度最大的红色小船最先行驶到对岸, 这说明船速越大的小船运动时间越短。同时还发现无论是船速是否大于中流流速, 小船都会行驶到对岸原点所在位置, 而不会被水冲到下河岸。这是因为随着小船通过中流后靠近河岸时, 水速也会逐渐减少, 当水速降低到比船速的水平分量小时, 本该被冲到下河的小船将逆流而上行驶到上流的原点。此外, 从运动轨迹可以看出随着小船速度的降低, 小船的水平方向的最大位移逐渐变大。

3 结论

本文从流速与河岸距离的平方成正比角度出发来研究小船渡河问题。首先指出了当船头角度固定时, 其垂直过河时渡河时间最短, 这与河水流速均匀时的渡河问题讨论一致。但是有所不同是

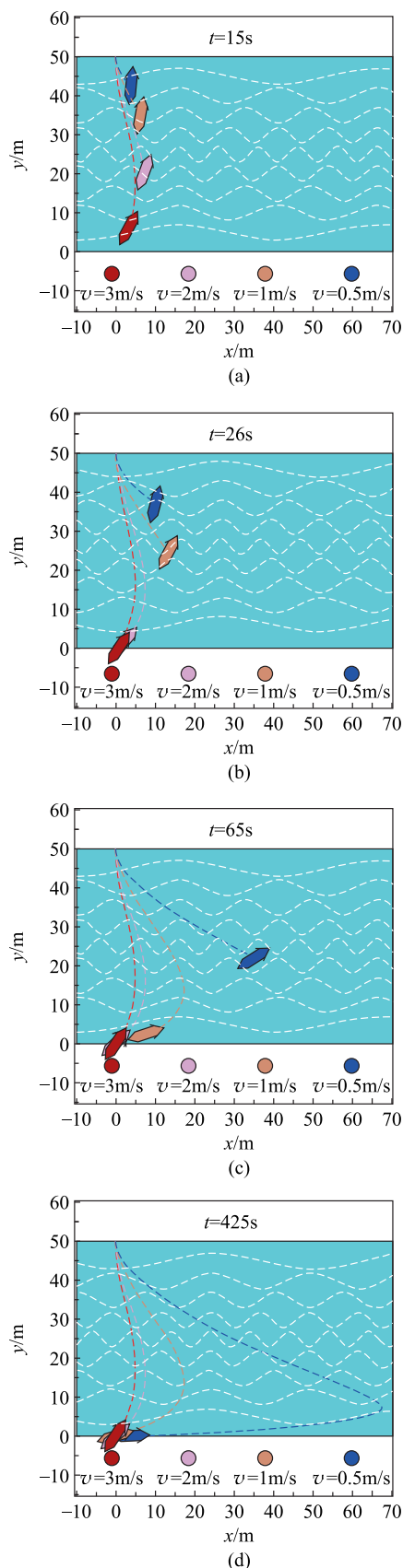


图5 船头指向定点的渡河动画
($d=50\text{m}$, $v_0=1\text{m/s}$)

在渡河船头角度必须满足式(21)时其位移最小,并且通过计算求出了小船运动的包络线方程。此外本文区别于以往文献中讨论小船渡河角度一定时的运动而探究了当小船船头始终指向定点的过河问题。求得其渡河时间与轨迹方程,并且得到了无论小船速度多少都会运动回到对岸原点的结论。因而这对丰富小船渡河模型,以及拓展对其研究方法都具有重要意义。同时通过 Maple 制作出来的小船渡河动画也可供教师进行可视化教学的使用。

参 考 文 献

- [1] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 2009:22-23.
- [2] 牛红标. 活用矢量运算法则解决小船渡河问题[J]. 教学考试, 2018(31): 54-56.
NIU H B. Using vector algorithm to solve the problem of boat crossing[J]. Journal of Teaching, 2018(31): 54-56. (in Chinese)
- [3] 刘梅. 小船渡河极值问题探讨[J]. 物理教师, 2015(6): 94-95.
LIU M. Discussion on extremum problem of boat crossing river[J]. Physics Teacher, 2015(6): 94-95. (in Chinese)
- [4] 刘鹤年,刘京. 流体力学[M]. 3版. 北京:中国建筑工业出版社, 2016:8-10.
- [5] 孟勇. 小船渡河问题的动态分析[J]. 中学物理教学参考, 2020,49(15):60-62.
MENG Y. Dynamic analysis of boat crossing problem[J]. Physics Teaching In Middle School, 2020, 49(15): 60-62. (in Chinese)
- [6] 韩金旭,黄福贵,卞艳丽,等. 明渠水流流速横向分布抛物线律及其应用[J]. 人民黄河, 2013,35(5):83-85.
HAN J X, HUANG F G, BIAN Y L, et al. Parabolic law for lateral distribution of flow velocity and its application in open channel[J]. Yellow River, 2013, 35(5): 83-85. (in Chinese)
- [7] 杨楠,衣巍,崔丹,等. 带流速自校正的智能明渠流量测量装置[J]. 江西水利科技, 2017,43(2):93-97+116.
YANG N, YI W, CUI D, et al. The intelligent flow measuring device with velocity of self calibration[J]. Jiangxi Hydraulic Science & Technology, 2017, 43(2): 93-97+116. (in Chinese)
- [8] 张晓丹,堵秀凤,李祥林. Maple 的图形动画技术[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2005:106-116.
- [9] 孟勇. Maple 动画在力学教学中的应用[J]. 物理通报, 2019(6): 8-12.
MENG Y. Application on maple animation in mechanics teaching[J]. Physics Bulletin, 2019(6): 8-12. (in Chinese)
- [10] 卢礼萍,鲁希锋,平加伦. 误差函数及相关函数的新表达[J]. 长春师范学院学报, 2002(5):15-17.
LU L P, LU X F, PING J L. A new representation of error function and related function[J]. Journal of Chang Chun Teachers College, 2002(5):15-17. (in Chinese)