

非完全弹性碰撞能量损耗及恢复系数的实验探究

王恒通 高健智

(陕西师范大学¹物理学与信息技术学院;²跨学科 x -物理实验教学示范中心,陕西 西安 710119)

摘 要 碰撞是物体(或粒子)间极短时间相互作用的物理现象。生活中,“碰撞现象”十分普遍并且伴随能量损耗。为了响应“停课不停学”,探索物理实验教学不依赖实验室条件的新模式,本文引导学生利用智能手机传感器和计算机设备设计实验,对非完全弹性碰撞过程中小球的能量损耗和恢复系数进行探究。实验表明,能量损失率会随着小球初始下落高度的而增加,而在同一初始高度下,能量损失率则随着碰撞次数的增加而减小。恢复系数随着小球初始下落高度的增加而减小,但在同一初始高度下,恢复系数随着碰撞次数的增加而增加。另外,进一步引导学生从理论分析和实验探究两方面讨论空气阻力对本实验的影响。

关键词 碰撞;能量损耗;恢复系数;智能手机

EXPERIMENTAL STUDY ON ENERGY LOSS AND RESTITUTION COEFFICIENT OF INCOMPLETE ELASTIC COLLISION

WANG Hengtong GAO Jianzhi

(¹ School of Physics and Information Technology;

² National Demonstration Center for Experimental x -physics Education, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710119)

Abstract Collision is a physical phenomenon, in which objects (or particles) interact in a very short time. In our daily life, “collision phenomenon” is very common and accompanied by energy loss. In order to respond to the “suspended class, ongoing learning”, a new mode of physics experiment teaching that does not rely on laboratory conditions is explored. This paper guides students to design experiments using smart phone sensors and computer equipment to explore the energy loss and restitution coefficient of a small ball in the process of incomplete elastic collision in which a ball falls freely to the ground. Experiments show that the energy loss rate increases with the initial falling height of the ball, but decreases with the increase of the number of collisions for the same initial falling height. The coefficient of restitution decreases with the increase of the initial falling height, but increases with the number of collisions at the same initial falling height. In addition, students are further guided to discuss the influence of air resistance on the experiment from two aspects of theoretical analysis and experimental exploration.

Key words collision; energy loss; restitution coefficient; smart phone

收稿日期: 2020-03-23

基金项目: 陕西师范大学实验教学改革项目(16SY16)。

通讯作者: 王恒通,男,副教授,主要从事物理教学及科研工作,研究方向为统计物理与复杂系统, wanghengtong@snnu.edu.cn。

引文格式: 王恒通,高健智. 非完全弹性碰撞能量损耗及恢复系数的实验探究[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 89-94, 104.

Cite this article: WANG H T, GAO J Z. Experimental study on energy loss and restitution coefficient of incomplete elastic collision[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 89-94, 104. (in Chinese)

“碰撞”表现为两个或以上物体(或粒子)间发生极短暂时间的相互作用,并迅速改变各自运动状态的物理现象,是大学物理教学的重点内容之一。碰撞前后,各参与物体的速度、动量或能量(动能)会发生改变。通常大学物理中讨论的碰撞问题主要分为:完全弹性碰撞、完全非弹性和非完全弹性碰撞。完全弹性碰撞指碰撞前后系统总动能不发生变化的碰撞,恢复系数 $e=1$;完全非弹性碰撞指碰撞后两物体具有相同的速度,相对速度为零动能损耗最大,恢复系数 $e=0$;非完全弹性碰撞是指在碰撞后物体间的相对速度减小,能量有一定损耗的碰撞,恢复系数 $0 < e < 1$ 。日常生产、生活中所发生的碰撞现象均伴随着能量的损耗。人们很清楚这些现象中的存在能量的损耗,但是如何量化碰撞中损失多少比例的能量,却需要实验探究。恢复系数既能够反映碰撞过程中系统恢复形变的能力,也能反映碰撞过程中能量的损失情况。在很多材料研究、工程和工业应用中,恢复系数也是重要的物理参量^[1,2]。

传统物理实验教学中,对碰撞研究大多都在实验室条件下采用气垫导轨、数字毫秒计和滑块等来完成。本文利用智能手机传感器和计算机,结合学生居家学习的条件,设计“落球法”实验,对小球与地面非完全弹性碰撞过程中的能量损耗和恢复系数进行实验探究。

1 测量原理

1.1 实验描述

图1给出了小球下落碰撞过程示意图。质量为 m 小球在距离地面 h_0 处自由下落,接触地面发生第0次非完全弹性碰撞。第0次碰撞前瞬间速度为 $v_{(0)\text{down}}$ (碰前速度方向向下故用脚标_{down}表示),碰撞后以速度 $v_{(1)\text{up}}$ (碰后速度方向向上故用脚标_{up}表示)为初速度反弹至最大高度 h_1 。在重力作用下再次下落与地面发生第1次非完全弹性碰撞(碰撞前后速度分别为 $v_{(1)\text{down}}$ 和 $v_{(2)\text{up}}$)后反弹至最大高度 h_2 。这样小球反复与地面发生 n 次非完全弹性碰撞(碰撞前后速度分别为 $v_{(n)\text{down}}$ 和 $v_{(n+1)\text{up}}$),并且每一次能量都会有所损耗 $E_n^{\text{损}}$,直至能量耗尽停止运动。本实验利用智能手机和

计算机完成实验数据测量,探讨小球碰撞过程中能量损耗以及恢复系数。

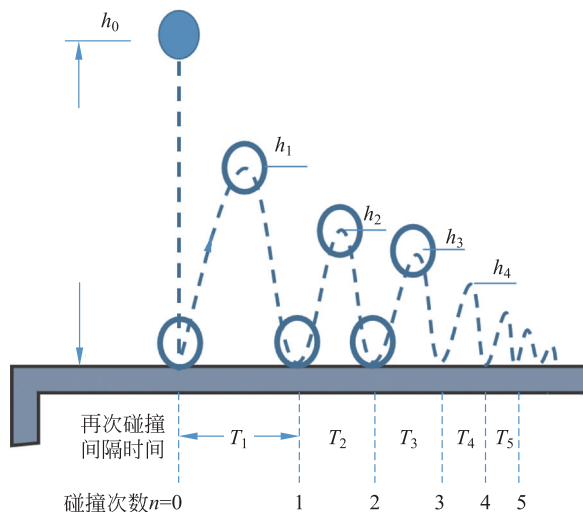


图1 落球法碰撞实验示意图

理想状态小球的反弹是竖直向上的,这里为了方便标记变量将小球运动轨迹横向拉伸表示

1.2 理论分析

小球质量为 m ,起初位于相对地面 h_0 的高度。则小球具有初始总能量

$$E = mgh_0 \quad (1)$$

下落后与地面发生反复碰撞,首次碰撞记为第0次碰撞。第 n 次碰撞前后瞬间小球的速度别为 $v_{(n)\text{down}}$ 和 $v_{(n+1)\text{up}}$,那么碰撞前后的能量分别为

$$E_{(n)\text{down}} = \frac{1}{2}mv_{(n)\text{down}}^2 \quad (2)$$

$$E_{(n+1)\text{up}} = \frac{1}{2}mv_{(n+1)\text{up}}^2 \quad (3)$$

不考虑空气阻力作用,小球下落到静止过程中能量损失来自于非完全弹性碰撞。第 n 次碰撞的能量损失为

$$\begin{aligned} E_n^{\text{损}} &= E_{(n)\text{down}} - E_{(n+1)\text{up}} \\ &= \frac{1}{2}mv_{(n)\text{down}}^2 - \frac{1}{2}mv_{(n+1)\text{up}}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

上式表明得到能量损耗需要知道碰撞前后的速度。下面我们分析第 $n-1$ 次碰撞后瞬间到第 n 次碰撞前瞬间过程。第 $n-1$ 次碰撞后瞬间,小球以 $v_{(n)\text{up}}$ 向上运动,仅受重力作用运动至最高点 h_n 后自由落体运动,直到发生第 n 次碰撞前速度加速到 $v_{(n)\text{down}}$ 。由于两次碰撞之间小球仅受重力作用,所以

$$v_{(n)\text{up}} = v_{(n)\text{down}} = v_{(n)} \quad (5)$$

若在这两次碰撞之间所经历时间为 T_n , 则根据牛顿运动定律, 可得

$$v_{(n)} = g \frac{T_n}{2} \quad (6)$$

将式(6)带入式(4)可得

$$\begin{aligned} E_n^{\text{损}} &= \frac{1}{2} m \left(\left(g \frac{T_n}{2} \right)^2 - \left(g \frac{T_{n+1}}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{16} m g^2 (T_n^2 - T_{n+1}^2) \end{aligned} \quad (7)$$

定义 γ_n 为第 n 次碰撞前后的能量损耗率, 则

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{E_n^{\text{损}}}{E_{(n)\text{down}}} \\ &= 1 - \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2} \end{aligned} \quad (8)$$

恢复系数定义为相互碰撞的两物体碰撞前后相对速度之比^[3]。小球在第 n 次碰撞过程中的恢复系数可以表示如下

$$\begin{aligned} e &= \frac{v_{(n+1)}}{v_{(n)}} \\ &= \frac{T_{(n+1)}}{T_{(n)}} \end{aligned} \quad (9)$$

根据式(7)、式(8)和式(9)测得每一次碰撞间隔间的时间和小球质量, 既可以求出能量损耗率和恢复系数。

由于居家实验条件, 很多同学没有测量质量工具, 所以式(7)给出的具体能量损耗量暂时不予考虑。

2 实验仪器及测量方法

2.1 实验仪器选择

本实验需要实验仪器, 包括: 小球、智能手机、计算机(选用)、米尺。对实验仪器选择要求如下:

小球可以选择居家能够找到的乒乓球(篮球、足球)、玻璃球、小钢球甚至是药丸均可。

(1) 智能手机, 安卓、苹果均可, 用来记录时间, 有三种方案。(1)选择手机秒表功能记录多个时间。(2)选择安装 PhyPhox、Physics Toolbox Sensor Suite 或者其他手机传感器 app 测量时间。(3)录制音频, 然后在计算机中分析音频得到时间。

(2) 计算机选用: 如果选择手机录音, 则需要

用到计算机并安装 GoldWave、Adobe Audition 或其他音频分析软件。

(3) 米尺选用: 家用卷尺即可。

2.2 测量方法

本实验需要测量小球与地面连续碰撞的时间间隔。利用智能手机以及电脑, 有如下三种测量方案:

(1) 利用智能手机的秒表功能记录多个时间点时间。

打开手机秒表功能(以小米手机为例)如图 2 左图所示。点击三角按钮开始计时, 每听到一次小球与地面碰撞声响, 迅速点击手机计时屏幕下的“蓝底旗状”按钮记录对应碰撞的时间。

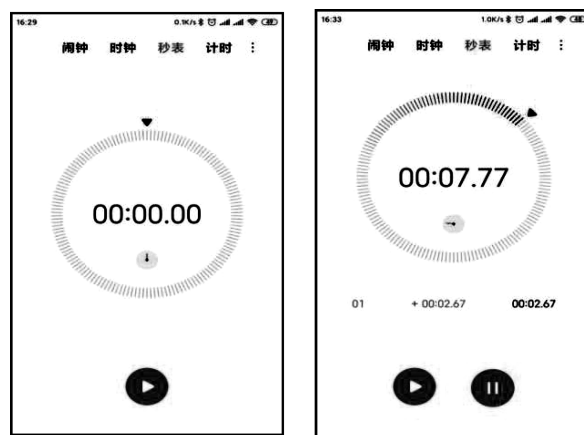


图 2 小米手机秒表功能记录多个时间点

(2) PhyPhox 和 Physics Toolbox Sensor Suite 都是利用智能手机传感器进行测量或实验的一类手机 app。

我们可利用 PhyPhox 的声学秒表功能测量两次碰撞之间的时间(也可以直接利用其非弹性碰撞模块)。如图 3 左图所示, PhyPhox 打开界面选择声学秒表功能。在声学秒表功能界面选择序列, 然后点击右上角“三角”按钮开始测试(见图 3 右图)。当小球与地面发出第 0 次碰撞开始计时, 第一次碰撞发生时间 1 计时完成, 同时开始时间 2 计时。依次 PhyPhox 只可以完成 5 个时间段(共 6 次碰撞)的记录。

利用 Physics Toolbox Sensor Suite (PTSS) 的音频分析功能, 如图 4 所示。在相对安静环境中, 假设下落小球与地面碰撞的瞬间音频强度是最大的。根据这一点, 可以在找到碰撞时刻对应时间, 计算两次碰撞的间隔时间。PTSS 音频采集图像的单位是秒, 两次碰撞间隔时间较短则无法给出

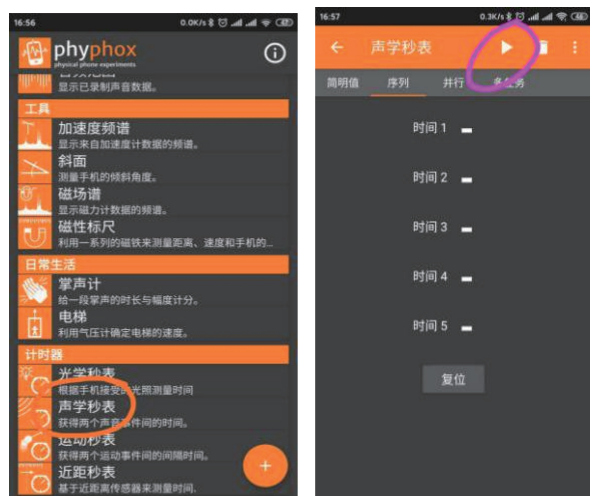


图3 PhyPhox 声学秒表功能测量多个间隔时间

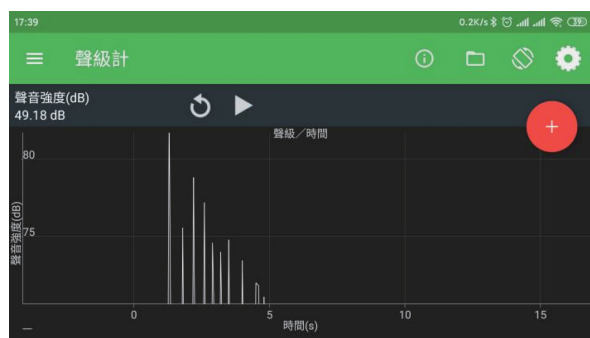


图4 Physics Toolbox Sensor Suit 的音频分析功能

精确的结果。

(3) 对小球落地往复弹起下落碰撞过程,通过手机录音导入计算机(或直接用电脑录音)进行音频分析。

这里所用到的思想和前一方法类似:小球碰撞发声的时刻对应的声音强度在安静背景下是最大的,通过音频分析软件找到最大声音强度对应时间即为碰撞时刻。这里以 GoldWave 为例进行说明。如图 5 所示,GoldWave 导入乒乓球自由下落后与地面反复发生碰撞全过程的音频信息的展示。红色和白色线分别是左右声道的音频信息,对界面最下端应标尺上表示时间刻度。通过鼠标滚轮以及 ctrl 键实现对图片的选择放大,可以找出最大音频强度对应的时间(精确到 10^{-3} s)。图中也可以清晰地看到乒乓球与地面的碰撞间隔时间越来越短,最终静止。该测量方案优点是可以测量碰撞次数多,而且精度较高。

2.3 实验要求

本实验实验的实验装置和实验步骤没有特殊

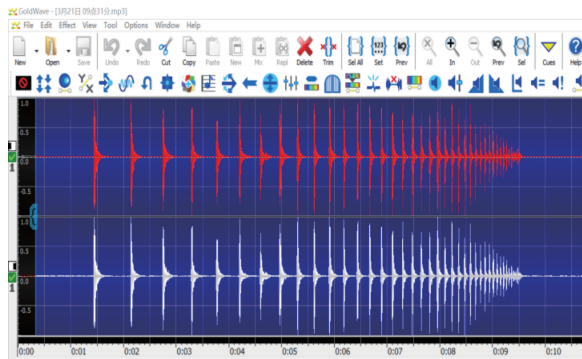


图5 GoldWave 处理乒乓球落地往复弹起、下落碰撞过程全过程音频数据左右声道的音量波形信息

要求,学生可以根据居家条件学生自行设计和选择搭建。但是需要试验中探究两个问题:(1)同一高度释放小球后,每次碰撞能量损失率都是否相同?恢复系数如何?(2)不同高度释放小球,同一碰撞顺序(同为第 n 次),不同高度的能量损耗率相同吗?与那些因素有关?恢复系数如何?

3 实验数据及结果

根据实验的两个探究问题数据及结果处理可分为:同一高度释放小球和不同高度释放小球两个方面。学生可以根据居家条件自行选择实验器材和测量方法。初始释放小球高度 h_0 。要结合所选球的尺寸进行选择。以下实验结果是以乒乓球为例,利用 PhyPhox 声学秒表功能测量连续 6 次碰撞得到的。

3.1 同一高度释放小球

选择初始下落高度 $h_0 = 60\text{cm}$ 处静止释放乒乓球,通过智能手机和计算机,任选一种记录测量方式,获得乒乓球下落后与地面反复碰撞的时间间隔。表 1 给出了 PhyPhox 声学秒表功能测量 6 次连续碰撞得到的时间间隔。

表 1 高度 $h_0 = 60.0\text{cm}$, 5 次重复实验碰撞时间间隔

No.	T_1/s	T_2/s	T_3/s	T_4/s	T_5/s
1	0.605	0.534	0.484	0.437	0.400
2	0.609	0.541	0.485	0.440	0.403
3	0.606	0.536	0.481	0.436	0.400
4	0.614	0.544	0.487	0.442	0.405
5	0.609	0.539	0.484	0.441	0.406

根据表 1 测量数据结果,通过式(8)和式(9)分别计算每一次碰撞前后的能量损耗率 γ_n 以及恢复系数 e_n 。表 2 和表 3 分别为这 5 次重复实验的能量损失率和恢复系数。可以看到,同一碰撞序列中,随着碰撞次数增加能量损失率减小,而恢复系数随着碰撞次数增加略有增加。

表 2 高度 $h_0=60.0\text{cm}$, 5 次重复实验碰撞前后的能量损失率

No.	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1	0.2209	0.1785	0.1848	0.1622
2	0.2108	0.1963	0.1770	0.1611
3	0.2177	0.1947	0.1784	0.1583
4	0.2150	0.1986	0.1763	0.1604
5	0.2167	0.1937	0.1698	0.1524

表 3 高度 $h_0=60.00\text{cm}$, 5 次实验碰撞的恢复系数

No.	e_1	e_2	e_3	e_4
1	0.8826	0.9064	0.9029	0.9153
2	0.8883	0.8965	0.9072	0.9159
3	0.8845	0.8974	0.9064	0.9174
4	0.8860	0.8952	0.9076	0.9163
5	0.8851	0.8980	0.9112	0.9206

3.2 不同高度释放小球

选择高度 $h_0=30.00\text{cm}$ 、 40.00cm 、 50.00cm 、 60.00cm 、 70.00cm 处静止释放乒乓球,通过智能手机和计算机,任选一种记录测量方式,获得乒乓球在下落后与地面反复碰撞的时间间隔。表 4 给出了 PhyPhox 声学秒表功能测量不同初始高度下落乒乓球连续 6 此碰撞的时间间隔。

表 4 不同高度释放小球,碰撞时间间隔 单位/s

$h_0(\text{cm})$	T_1/s	T_2/s	T_3/s	T_4/s	T_5/s
30.00	0.446	0.408	0.375	0.347	0.322
40.00	0.500	0.454	0.414	0.380	0.351
50.00	0.554	0.497	0.449	0.409	0.376
60.00	0.614	0.544	0.488	0.443	0.405
70.00	0.652	0.574	0.512	0.463	0.422

根据表 4 测量数据结果,通过式(8)和式(9)分别计算每一次碰撞前后的能量损耗率 γ_n 以及恢复系数 e_n ,其结果分别见图 6 和图 7 所示。

从图 6(a)中可以看到,能量损失率在同一碰撞序列中,随着碰撞顺序 n 的增加而减小,而对不同的初始高度 h_0 ,能量损失率也会随着 h_0 的增加而增加。从图 6(b)中可以看到,恢复系数随着初始释放高度 h_0 的增加而减小,但是在同一初始高

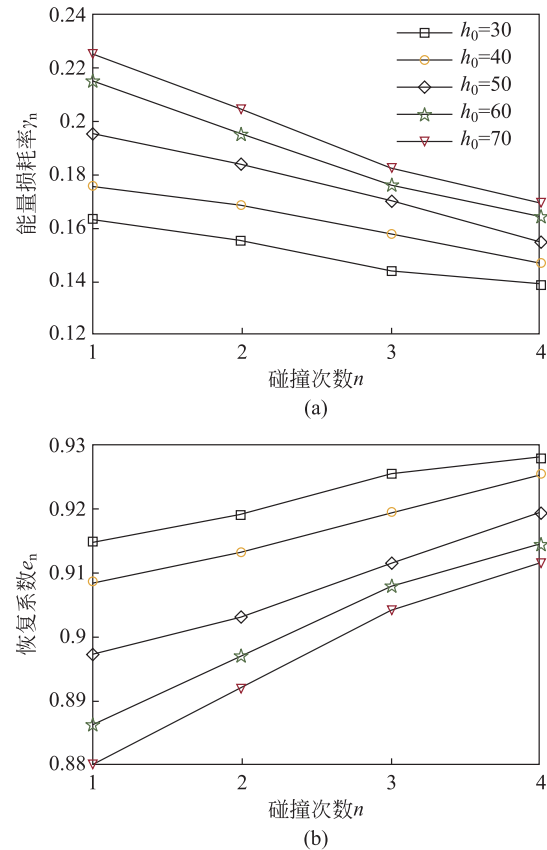


图 6 不同初始高度下,乒乓球的能量损耗(图(a))和恢复系数(图(b))随碰撞次数的变化

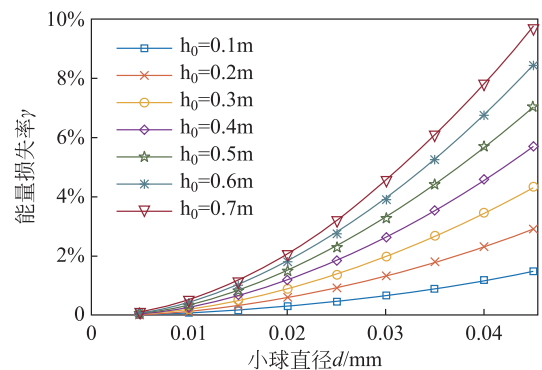


图 7 不同初始下落高度下,空气阻力产生的能量损耗随小球直径的变化

度下,恢复系数则随着碰撞次数的增加而增加。

4 实验提升

4.1 实验内容拓展

本实验中,空气阻力对实验的影响并没有考虑在其中。但是,实验过程中空气阻力确实存在,

并且始终做负功耗散系统能量。这里我们也可以根据理论进行一些简单的理论分析,例如根据参考文献[4],小球在空气中所受到的阻力可以近似的写成

$$F_d = \frac{C_d \rho A V^2}{2}$$

其中, C_d 是阻力系数, ρ 是空气密度, A 为受空气阻力的最大横截面积, v 是小球运动速度。考虑空气阻力和浮力时,小球下落过程的运动方程可以表示为

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \rho g V - \frac{C_d \rho A v^2}{2}$$

通过求解上述方程上述方程可以得到小球下落速度和位移随时间的变化。这样我们也可以进一步计算不同尺寸小球和小球的初始下落高度情况下,空气阻力产生的能量损耗率。

图8给出了不同初始高度下,空气阻力作用所产生的能量损耗率随小球直径的变化。随着高度初始高度减小,小球在空气中运动的时间减小,相对的速度变化也减小,空气阻力的损耗也就相应的减小。对比乒乓球的结果可以发现,空气阻力对实验结果有一定影响,可以通过减小小球直径、增加小球质量以及减小初始下落高度的方法来减小空气阻力影响。

参照以上理论分析,学生可以进一步,(1)讨论如何空气阻力耗散的能量以及对恢复系数的影响;(2)尝试思考如何对理论部分进行改进、设计新实验消除空气阻力对本实验影响。

4.2 测量方法拓展

本实验设计给出了三种方法完成对碰撞时间间隔的测量。这里学生可以在有余力的情况下尝试视频追踪软件 Tracker 完成碰撞时间间隔测量^[5,6]。对实验中小球往复弹起过程进行视频拍摄,然后导入 Tracker,对小球的运动轨迹进行追踪,可以得到小球在竖直方向的高度随时间变化。通过计算小球运动轨迹最低端的时间间隔可以得到碰撞的时间间隔。图8给出了 Tracker 追踪小球运动过程中高度随时间的变化结果,初始高度 $h_0 = 60\text{cm}$ 。

4.3 实验思考

(1) 第三部分数据结果表达有无错误? 为什么? (提示:有效数字、单位等易于忽视的细节问题)。

(2) 对比几种不同测量方法得到结果,进行

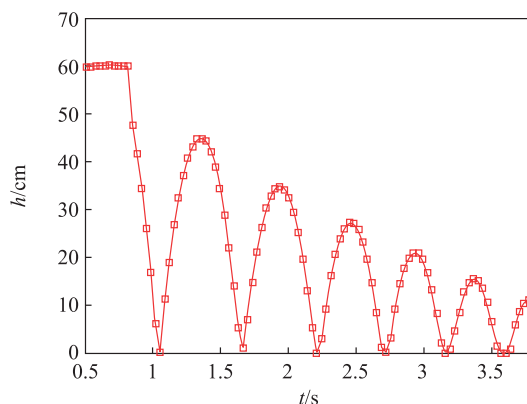


图8 Tracker 追踪小球轨迹高度随时间变化图

误差分析。对实验的精确测量进行深入的思考,提出改进实验策略。

5 总结

碰撞是生活中普遍的物理现象,并且伴随能量损耗。其中的能量损耗和碰撞物体的恢复系数也是一个非常值得探究的问题。我们从理论上根据能量守恒与转化关系得到了小球下落至地面时恢复系数与能量损耗的表达式,为实验的测量提供了指导。本实验表明,在同一实验条件下的恢复系数基本不变,能量损失率在同一碰撞序列中,随着碰撞序次的增加而减小,下落高度越高能量损失越大。通常实验室条件下探究碰撞现象,大多选择气垫导轨上滑块之间碰撞实验。但是对实验器材、测量工具依赖程度较高。一方面,利用智能手机和计算机,充分利用 PhyPhox、Physics Toolbox Sensor Suite、GoldWave、Adobe Audition、Tracker 等软件,学生在居家环境中可以顺利完成实验。本实验也提供多种可选择的测量方法,有利于学生根据实际情况选择进行实验。另一方面,将智能手机传感器、计算机音频分析测量声音间隔等应用到普通物理实验教学,有利于培养学生利用现代科技改进实验传统测量方法和自主设计实验,激发学生实验兴趣,从而达到培养学生创新意识和创新能力的目标。

参 考 文 献

- [1] 鞠碧玉,秦建敏,王桂萱. 高架桥在地震作用下的碰撞反应研究[J]. 大连大学学报, 2017, 38(6):38-41.

(下转第 104 页)

目前市面上基于排水法原理的装置并不多,本文所设计的排水法装置仅仅是提供一个思路,在仪器装置的结构设计和应用上不局限于此,稍加改进原有装置或者重新设计出一个新的基于排水法的杨氏模量测量装置将可能有效减小现有装置的缺点,总体而言基于排水法的金属丝的杨氏模量测量实验装置存在实验研究价值和科学意义。

参 考 文 献

- [1] 姜悦,吴官东.基于迈克耳孙干涉仪与线阵 CCD 的金属丝杨氏模量测量方案[J].物理与工程,2019,29(4):93-96.
JIANG Y, WU G D. A method of measuring Young's modulus of wire based on Michelson interferometer and linear CCD[J]. Physics and Engineering, 2019,29(4):93-96. (in Chinese)
- [2] 胡飘,宋艳艳,董殿敏,等.脉冲激振法测试耐火材料杨氏模量的原理与应用[J].耐火材料,2020,54(3):253-255+259.
HU P, Song Y Y, DONG D M, et al. Principle and application of pulse excitation method to test Young's modulus of refractories[J]. Refractories, 2020, 54(3):253-255+259. (in Chinese)
- [3] 邱一富,牛秦洲,邱岩,等.基于 Labview 的高温弹性模量测试装置[J].理化检验(物理分册),2014,50(3):186-190.
QIU Y F, NIU Q Z, QIU Y, et al. Testing equipment for high temperature elastic modulus based on Labview[J]. Physical Testing and Chemical Analysis (Part A: Physical Testing), 2014,50(3):186-190. (in Chinese)
- [4] 江佩师,张颖,白翠珍,等.基于中间层原理杨氏模量测量系统[J].中国新技术新产品,2016(8):7.
JIANG P S, ZHANG Y, BAI C Z, et al. Young's modulus measurement system based on intermediate layer principle [J]. New Technology & New Products of China, 2016(8): 7. (in Chinese)
- [5] 段阳,杨浩林,伍泓锦,等.杨氏弹性模量测量实验综述[J].物理与工程,2020,30(3):89-102.
DUAN Y, YANG H L, WU H J, et al. Review of the experiments of Young's modulus measurement [J]. Physics and Engineering, 2020,30(3):89-102. (in Chinese)
- [6] 史立平.杨氏弹性模量实验中不确定度的评定[J].新课程(教研),2010(12):178-179.
SHI L P. Evaluation of uncertainty in Young's modulus of elasticity experiment [J]. New curriculum (research), 2010(12):178-179. (in Chinese)
- [7] 段坤杰,王亮.杨氏模量实验的优化研究[J].许昌学院学报,2011,30(2):35-38.
DUAN K J, WANG L. Research and improvement of Young's modulus experiment [J]. Journal of Xuchang University, 2011,30(2):35-38. (in Chinese)
- [8] 马航海.简明工程流体力学[M].武汉:武汉大学出版社,2016:102-108.
- [5] 史振宇,丁益民,张余梦,等.利用 Tracker 研究气垫导轨上弹簧振子运动[J].物理与工程,2018, 05: 78-81.
SHI Z Y, DING Y M, ZHANG Y M, et al. Using tracker to study the mechanical motion of spring oscillator on the air cushion guide [J]. Physics and Engineering, 2018, 05: 78-81. (in Chinese)
- [6] 范颖玺,陈东生,王莹.利用 Tracker 软件实现动量守恒定律的验证[J].大学物理实验,2020, 01:96-99.
FAN Y X, CHEN D S, WANG Y. Verification of conservation law of momentum by using tracker software [J]. College Physics Experiment, 2020, 01 :96-99. (in Chinese)

(上接第 94 页)

- JU B Y, QIN J M, WANG G X. Study on collision response of viaduct under earthquake [J]. Journal of Dalian University, 2017, 38(6): 38-41. (in Chinese)
- [2] 周又和.离散单元法的颗粒接触模型(即软球正碰撞模型)的研究进展[C].颗粒材料计算力学研究进展,2012.
- [3] 吴俊林.基础物理实验[M].北京:科学出版社,2010.
- [4] 周雨青,叶兆宁,吴宗汉.球类运动中空气阻力的计算和分析[J].物理与工程,2002, 12(1): 55-59.
ZHOU Y Q, YE Z N, WU Z H. Calculation and analysis of air resistance in ball games [J]. Physics and Engineering, 2002, 12(1): 55-59. (in Chinese)