

基于 Mathematica 对磁力搅拌器搅拌粘性流体时出现的 搅拌子磁悬浮现象再分析

张 晓 吴小志 蒲贤洁 柴一晟 王少明
(重庆大学物理学院, 重庆 401331)

摘 要 磁力搅拌器在搅拌粘滞流体的过程中, 存在一种搅拌子上跳并且磁悬浮的现象, 一论文对该现象的机械运动给出了解释, 使用了磁偶极子假设和单倍周期关系, 而磁偶极子假设可以使用更接近实际情况的具有厚度的环形磁铁计算; 通过将搅拌器的环形磁铁拆分成一组电流环再积分, 可以给出更为精确的结果。同时基于 Mathematica 的数值计算也找到了支持单倍周期关系的理论依据。该现象对存在磁场时的角速度测量装置和复杂的磁悬浮装置给出了可替代方案, 而解析的磁场能用于厚环形磁铁磁场的计算。

关键词 磁力搅拌器中的磁悬浮; 磁场修正; 角速度补证; MMA 数值计算

FURTHER ANALYSIS OF THE MAGNETIC LEVITATION OF THE STIR BAR IN MAGNETIC STIRRER WHEN MIXING VISCOUS FLUID BASED ON MATHEMATICA

ZHANG Xiao WU Xiaozhi PU Xianjie CHAI Yisheng WANG Shaoming

(College of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331)

Abstract The mechanical motion of magnetic levitation of magnetic stirrer when stirring viscous fluid has been explained in one paper, using the magnetic dipole hypothesis and the haploid period relationship. The magnetic dipole hypothesis can be calculated by using a ring magnet with thickness closer to the actual situation. More accurate results can be obtained by dividing the ring magnet of the agitator into a group of current rings and integrating them. Meanwhile the numerical calculation based on Mathematica also found theoretical basis supporting the haploid period relationship. This phenomenon provides an alternative scheme for the angular velocity measurement device and the complex magnetic levitation device in the presence of a magnetic field, and the analytical magnetic field can be used to calculate the magnetic field of a thick circular magnet.

Key words magnetic levitation in magnetic stirrer; modification of magnetic field and angular velocity; numerical calculation based on MMA

收稿日期: 2020-11-10; 修回日期: 2021-08-12

基金项目: 国家级新工科研究与实践项目(E-SXWLHXLX20202605), 重庆市高等教育教学改革研究重点项目(202046), 教育部高等学校大学物理课程教指委教学研究项目(DJZW202037xn), 重庆大学教学改革研究项目(2020Y48)。

通讯作者: 吴小志, 男, 副教授, 重庆大学本科生院副院长, 主要从事缺陷物理方面的理论研究工作, xiaozhiwu@cqu.edu.cn。

引文格式: 张晓, 吴小志, 蒲贤洁, 等. 基于 Mathematica 对磁力搅拌器搅拌粘性流体时出现的搅拌子磁悬浮现象再分析[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 83-88.

Cite this article: ZHANG X, WU X Z, PU X J, et al. Further analysis of the magnetic levitation of the stir bar in magnetic stirrer when mixing viscous fluid based on Mathematica[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 83-88. (in Chinese)

磁力搅拌器搅拌粘滞流体,如甘油、蓖麻油等时,如图1所示,当搅拌速度缓慢增大,搅拌子会在某个大小的驱动角速度 ω_d 下跳起,并且稳定悬浮在流体中。文献[1]给出了该现象的解释。然而Baldwin在文章中的理论存在两个点可以进一步分析:其一,文献[1]的式(3)使用了磁偶极子假设,但真实装置和远场条件有偏差。通过拆解磁力搅拌器,我们发现驱动磁子是两个厚的环形磁铁,我们将环形磁铁拆分成一系列电流环,对每个电流环计算磁场,再积分得到驱动磁子的磁场,发现两种模型最终得到的运动结果存在差别,说明对厚环形磁铁的解析有一定的必要性;其二,推导运动中三个角速度大小的关联公式时,使用的是单倍周期的关系,文献[1]的实验结果验证了是单倍周期,但是涉及周期变化的物理过程,我们一般考虑是只要满足整数倍周期则成立,本文中我们结合数值计算得到了该公式的理论支持。

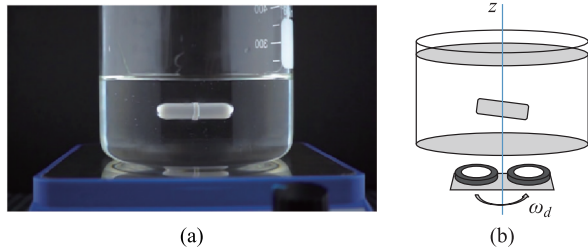


图1 磁力搅拌器的磁悬浮现象(甘油中)

(a) 达到磁悬浮时的实验装置;(b) 驱动磁子达到磁悬浮时示意图

1 运动方程建立

将文献[1]给出的运动方程写成

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} = M(z, \varphi) - D\dot{\theta} \\ m\ddot{z} = F(z, \varphi) - k_f \dot{z} - mg - F_{\text{fluid}} \end{cases} \quad (1)$$

其中 I 表示搅拌子绕短轴的转动惯量, m 是搅拌子质量, M 和 F 分别是磁相互作用的转动矩和竖直方向的作用力, D 和 k_f 分别是阻力矩和平动阻力的阻力系数,在液体中低速运动时二者分别和角速度、速度一次方成正比, F_{fluid} 是包含浮力和流体其他冲击力等来自流体的作用力。

2 磁场解析和受力

如图2所示,磁力搅拌器的驱动磁子由两个

具有一定厚度的环形磁铁组成,两个环形磁铁磁矩取向相反,建立图示坐标系。实验中发现驱动磁子和搅拌子之间的距离不满足远场条件,使用磁偶极子模型得到的 M 和 F 可能出现误差,下面做出较完全的解析。

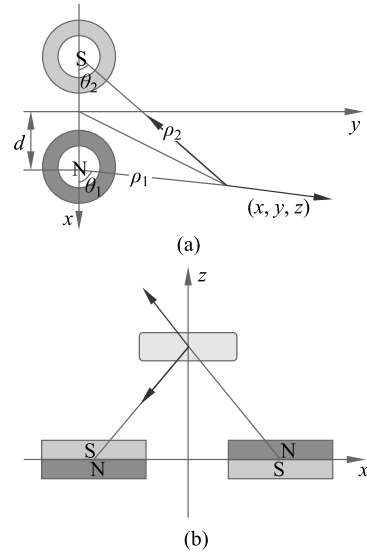


图2 磁力搅拌器的驱动磁子示意图

(a) 俯视图;(b) 侧视图

我们考虑一个具有一定厚度的环形磁铁是多个电流环叠加成类似螺线管的磁场,环形磁铁的磁场性质由三个量唯一确定:等效电流环的半径 a 、环形磁铁的厚度 h 和环形磁铁的磁偶极矩 m_d ,其中可以把环形磁铁的宽度影响用 a 描述。文献[2]给出单个电流环在柱坐标下全空间的磁场

$$\begin{cases} B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho [z^2 + (\rho + a)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[-K + \frac{z^2 + \rho^2 + a^2}{z^2 + (\rho - a)^2} E \right] \\ B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[z^2 + (\rho + a)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[K + \frac{a^2 - z^2 - \rho^2}{z^2 + (\rho - a)^2} E \right] \end{cases} \quad (2)$$

式中 a 是电流环半径, K 和 E 分别是第一、二类完全椭圆积分

$$\begin{cases} K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 k^4 + \dots \right\} \\ E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right\} \end{cases}$$

其中,

$$k = \frac{4Ra \sin \theta}{R^2 + a^2 + 2Ra \sin \theta} \sim \frac{4a^2}{2a^2 + a^2 + 2a^2} \sim \frac{4}{5} \quad (3)$$

这里用了关系 $R \sin \theta = a$, 在磁悬浮状态下即 $\theta \approx 45^\circ$ 时估计式(3)中 k 的量级, 发现 K 和 E 中第二项舍去会造成约 15% 的误差, 考虑到如果保留, 则会显著增加积分的复杂度, 仍然舍去。虽然存在误差, 但是使用的模型比较磁偶极子模型, 还是会产生数值计算的区别。

将磁铁磁偶极矩 m_d 切分为 $\frac{m_d}{h}$ 单位, 每个电流环的电流 I 即为

$$\delta I = \frac{m_d}{h \times \pi a^2} dt$$

式中 t 是对于厚度从 $-\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$ 的积分变量, 将式(2)中的 z 替换为 $z-t$, 对 t 进行积分, 得到一个厚环形磁铁在全空间的磁场为

$$B_\rho = \frac{\mu_0 m_d \rho}{8h} \times \left[\frac{1}{\rho^2 + (z-t)^2 + a^2} \right]_{-h}^h$$

$$B_z = \frac{\mu_0 m_d}{4h} \times \left\{ \frac{z-t}{(a^2 + \rho^2)^2 \sqrt{a^2 + \rho^2 + (z-t)^2}} \right|_{-h}^h - \frac{3}{2} \rho^2 \frac{(z-t) [3(a^2 + \rho^2) + 2(z-t)^2]}{3(a^2 + \rho^2)^{\frac{7}{2}} \left[1 + \frac{(z-t)^2}{a^2 + \rho^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \right|_{-h}^h \quad (4)$$

然后如图 2(a)所示, 两个厚环形磁铁磁场矢量合成

$$\begin{cases} B_x = B_1(\rho_1) \cos \theta_1 - B_2(\rho_2) \cos \theta_2 \\ B_y = B_1(\rho_1) \sin \theta_1 - B_2(\rho_2) \sin \theta_2 \\ B_z = B_1(z) - B_2(z) \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\rho_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y}{\rho_1}, \quad \sin \theta_2 = \frac{y}{\rho_2}$$

将式(4)代入式(5)合成即可得到最终的磁场形式 $B(x, y, z)$ 。最后除等效电流环的半径 a 、环形磁铁的厚度 h 和环形磁铁的磁偶极矩 m_d 外, 还有两环形磁铁中心间距 d , 共四个量需要确定。由于等效电流环的半径 a 无法测量, 实验中采取了用特斯拉计测量 $x=d$ 处环形磁铁竖直轴线上的 B_z 进行拟合, 得到四个量的数值。

磁矩为 m_f 的磁子在外磁场中的响应是

$$\begin{cases} \mathbf{F} = (m_f \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \mathbf{M} = m_f \times \mathbf{B} \end{cases} \quad (6)$$

代入测量数据 $m_f = 0.16 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, $a = 15 \text{ mm}$, $d = 15 \text{ mm}$, $h = 3.5 \text{ mm}$, $z = 12.8 \text{ mm}$, 得到 M 和 F 的具体形式

$$\begin{cases} F(\varphi) = -0.42 \cos \varphi \quad (\text{N}) \\ M(\varphi) = 8.82 \times 10^{-5} \sin \varphi \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \end{cases} \quad (7)$$

发现其形式依然形如论文^[1]使用磁偶极子模型后, 式(2)和式(3)给出的

$$\begin{cases} F(z, \varphi) = F_0(z) \cos \varphi \\ M(z, \varphi) = M_0(z) \sin \varphi \end{cases} \quad (8)$$

图 3(a)给出了图 1 中烧杯底部 xOy 平面的磁场分布, (b)给出了 xOz 平面的磁场分布, 结合式(7) M 和 F 的具体形式, 发现相比较磁偶极子的磁场, 理论推导的修正没有使磁力和磁力矩的最终形式, 比式(8)复杂化, 也没有破坏其在两个方向上的轴对称性, 其原因是类似

$$F(z, \varphi) = F(z) \cos \varphi$$

这种分离变量形式的本质来自公式(6)的关系, 在该部分所做的解析, 只是将 $F(z)$ 从论文^[1]的式(3)的 $F(z) \sim z^{-4}$ 做了进一步分析, 会对结果

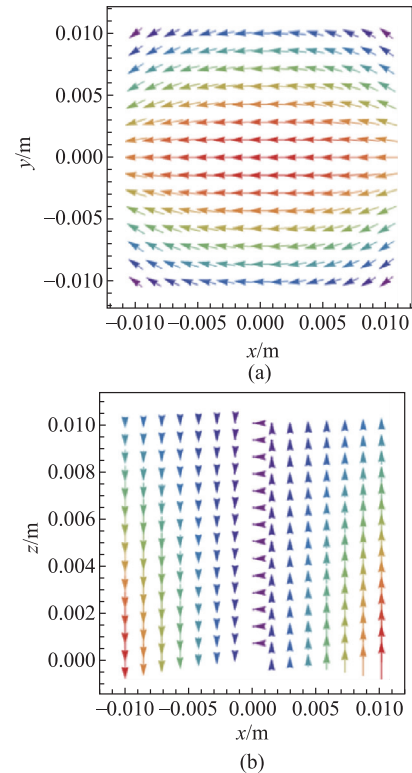


图 3 修正后磁场 xOy 和 xOz 剖面示意图
(a) xOy 剖面; (b) xOz 剖面

产生数值大小的影响,但不会影响其运动的行为。

3 三个角速度关联补证

文献[1]中认为稳定悬浮时,图4中搅拌子长轴(灰色)和驱动磁子轴线(即图2中的X轴)夹角的变化具有周期性,给出的公式为

$$\frac{2\pi}{\omega_w}\omega_d = 2\pi + \frac{2\pi}{\omega_w}\omega_s \quad (9)$$

即每次搅拌子长轴摆动一周,驱动磁子恰好比搅拌子长轴多转动一圈。文献[1]中得到的数据和此公式一致,但是在最初考虑时,多转动任意整数倍的圈数应该都满足稳定性要求,所以此式应暂时写为

$$\frac{2\pi}{\omega_w}\omega_d = 2n\pi + \frac{2\pi}{\omega_w}\omega_s, \quad n=1,2,3,4\cdots \quad (10)$$

我们从受力角度出发分析这个问题,文献[1]角方向运动方程给出如下试探解

$$\theta = \omega_s t + A \sin \omega_w t + \arcsin\left(\frac{D\omega_s}{M_0}\right) + \omega_s \tau_0 \quad (11)$$

后两项分别对应跳起前和跳起时积累的角度差,但是因为其不含 t ,计算平均冲力的时候不会产生作用,所以不关心其具体数值。

那么角度差写成

$$\varphi = \omega_d t - \theta = n\omega_w t - A \sin \omega_w t + \varphi_0 \quad (12)$$

根据式(7)磁场力的形式,搅拌子受力为

$$\bar{F} = \frac{\int_0^T |F_0 \cos(n\omega_w t - A \sin \omega_w t)| dt}{T} \quad (13)$$

此平均斥力应和 $mg + F_{\text{fluid}}$ 相平衡。通过测量悬

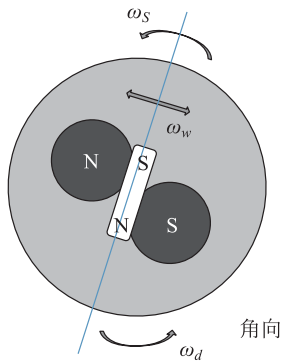


图4 磁悬浮过程中装置俯视图

ω_d 为驱动磁铁角速度, ω_s 为磁子长轴转动的角速度, ω_w 为磁子长轴摆动的角速度

浮高度可以由式(6)计算 F_0 , T 为一段较长时间, A 和 ω_w 为测量值,即可通过式(13)计算搅拌子受到的平均力。代入一组测量数据 $\omega_w = 226.3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $A = 1.1$, $F_0 = 0.039 \text{ N}$ (2.8cm 高悬浮处),做出受磁场力的绝对值图像如图5所示。

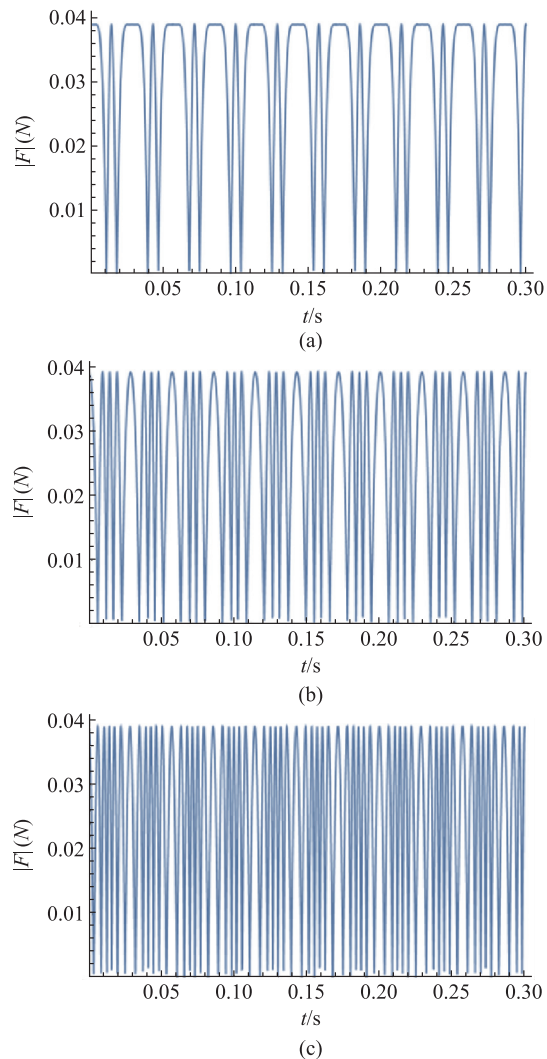


图5 不同 n 下,磁场力大小随时间的演化

(a) $n=1$; (b) $n=2$; (c) $n=3$

图5中,较宽部分和 t 轴围成面积对应斥力冲量,发现随着 n 增大,一个周期内磁场力处于斥力的时间随之减小,最终平均斥力过小而不能和 $mg + F_{\text{fluid}}$ 相平衡,具体大小如表1所示。

表1 不同 n 下磁场力大小数值

n	1	2	3	4	5
$F/(\times 10^{-2} \text{ N})$	1.84	0.53	0.10	0.01	0.001

实验使用磁子质量 $m = 1.5378 \text{ g}$, 重力 0.015 N ,

由于液体冲击力的存在,平均斥力必须略大于重力,发现只有 $n=1$ 时可以提供足够的重力,所以式(10)简化为

$$\omega_d = \omega_s + \omega_w$$

即文献[1]给出的式(9)。

4 运动过程数值计算

4.1 磁子跳起过程数值计算

文献[3]对旋转圆柱采用了斯托克斯近似计算阻力(式(1)), Table 1 说明实际阻力是斯托克斯公式计算的 0.42~0.54 倍,本文取 0.5 倍修正公式得到

$$\begin{aligned} k_f &= 0.5 \times 6\pi\eta l = 0.5 \times 6\pi \times 1.5 \times 0.015 \\ &= 0.21(\text{N} \cdot \text{S}/\text{m}) \end{aligned} \quad (14)$$

液体作用力和重力和等于磁场作用力,取略大值 0.019N;

极限情况下,角度差 $\varphi=\pi$ 时恰好跳起;

将上述三个参数代入式(1)的竖直运动方程,得到

$$0.00155\ddot{z} = -0.21\dot{z} - 0.019 + F(z) \quad (15)$$

初始条件 $z(0)=0.0128\text{m}$, $z'(0)=0$, 分别取式(6)得到的磁场力 $F(z)$ 和经典磁偶极子间相互作用力^[4]

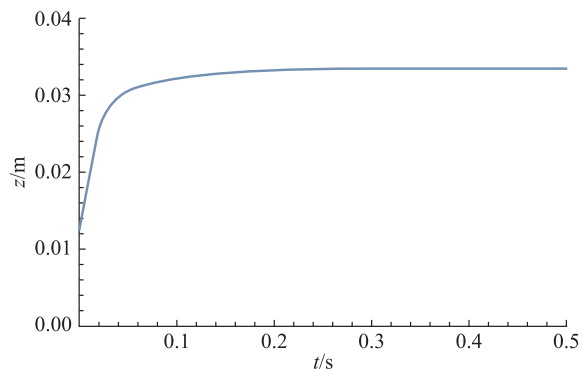
$$F(z) = \frac{6\mu_0 m_d m_f}{4\pi z^4}$$

数值求解该方程。

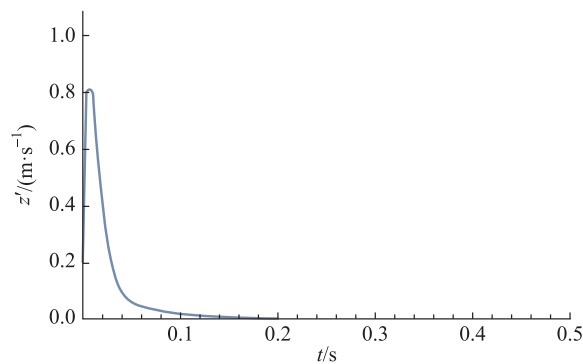
图 6 展示了数值计算结果,跳起过程极为短暂(均小于 0.1s),最后悬浮高度均趋于稳定。但是环形磁铁磁场比磁偶极子模型下悬浮高度更低,跳起速度更慢,这是合理的,因为具有厚度的环形磁铁相当于将磁偶极矩在空间竖直方向进行了展开,其相互作用由此减弱导致悬浮高度降低和跳起速度减慢。

4.2 不同黏滞性下跳起数值计算

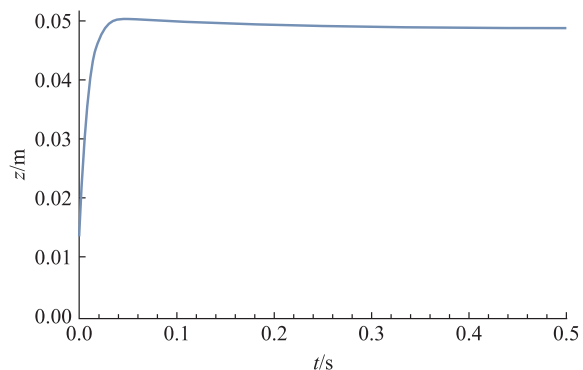
图 7 通过更改黏滞系数进行数值计算得到了一组运动结果,不同黏滞性在修正磁场下得到了相同的悬浮高度,这说明式(14)采用的斯托克斯近似对于悬浮高度没有显著影响。同时观察到,液体黏滞性较弱时,会出现类似阻尼振动的形式,而图 6 数值计算的结果(c)中,发现同样条件在磁偶极子模型下,出现类似的趋势,进一步说明未修正的磁偶极子间相互作用力要强于修正后磁场



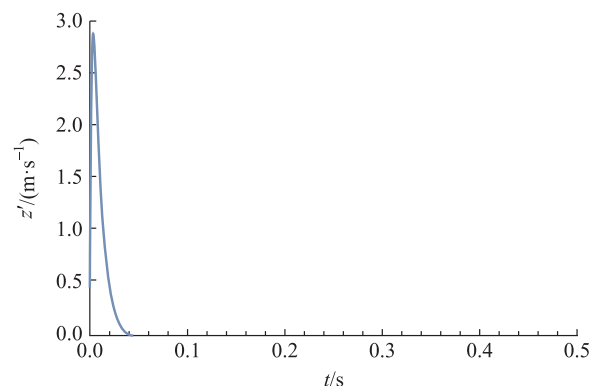
(a) 修正磁场 $z-t$



(b) 修正磁场 $z'-t$



(c) 磁偶极磁场 $z-t$



(d) 磁偶极磁场 $z'-t$

图 6 跳起过程高度和速度随时间的变化

(a)和(b) 环形磁铁磁场运动高度和速度;
(c)和(d) 磁偶极子磁场运动高度和速度

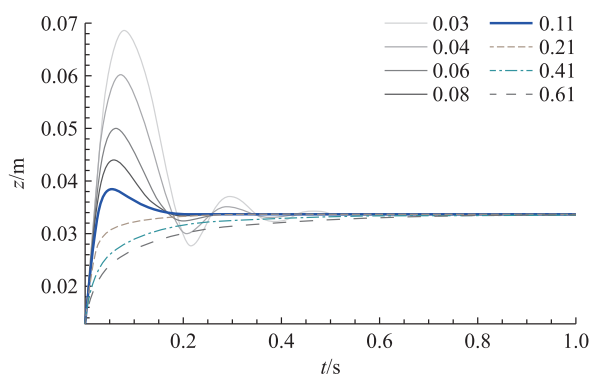


图7 不同黏滞性下跳起过程

提供的作用力。

5 结语

在研究磁力搅拌器磁悬浮现象中,文献[1]使用了磁偶极子模型,而本文通过解析厚环形磁铁的磁场,首先,得到了作用力更弱、形式更接近真实情况的磁场,并且保持了形式简单的磁相互作用式(8)和对称性;其次,借助修正的磁场,给出了角速度公式 $\omega_d = \omega_s + \omega_w$ 的证明;最后,通过基于MMA的数值计算和比较,给这种磁场提供了更多的讨论空间。

本文最终得到的磁场形式可以用于具有一定厚度的环形磁铁的一般数值计算,同时角速度关联公式的证明也为存在角速度测量需求时的工业或生产提供了论证思路,即从平均受力角度分析。但是,本文没有考虑复杂的耦合运动和液体的不

稳定性等因素,而且根据文献[5],磁悬浮在一个方向上的稳定性是牺牲其他方向稳定性的,所以必然有流体的作用保证所有方向的稳定性,本文分析也没有体现流体对稳定性的贡献。但是本文的工作为进一步研究复杂情况做出了初步工作,对流体的分析可能会使得磁力搅拌中的磁悬浮得到更广泛的应用。

参考文献

- [1] BALDWIN K A, DE FOUCHIER J B, ATKINSON P S, et al. Magnetic levitation stabilized by streaming fluid flows [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121, 064502.
- [2] 李永平, 张帆. 环形电流的磁场分布[J]. *济南大学学报*, 1998, 8(4): 61-64.
LI Y P, ZHANG F. Magnetic field distribution of ring current[J]. *Journal of University of Jinan*, 1998, 8(4): 61-64. (in Chinese)
- [3] KONG D, LIN W, PAN Y X, et al. Swimming motion of rod-shaped magnet otactic bacteria: The effects of shape and growing magnetic moment [J]. *Frontiers in Microbiology*, 2014, 5: 1-11.
- [4] 何济洲, 缪贵玲. 两个磁偶极子间的相互作用[J]. *南昌大学学报(工程技术版)*, 1996(3): 96-98.
HE J Z, MIAO G L. The interaction between two magnetic dipoles[J]. *Journal of Nanchang University (Engineering & Technology)*, 1996(3): 96-98. (in Chinese)
- [5] 孙道智. 关于 Earnshaw 定理与磁悬浮问题[J]. *东北大学学报*, 1979, (1): 63-68.
SUN D Z. Earnshaw's theorem and the problem of magnetic levitation[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 1979, (1): 63-68. (in Chinese)