

物理实验



一种简易的自组混沌摆装置

王烁皓¹ 王廷振¹ 张培正¹ 王 瑾^{1,2} 惠王伟^{1,2} 王晓杰^{1,2}(南开大学¹物理科学学院; ²基础物理国家级实验教学示范中心, 天津 300071)

摘 要 混沌现象是非线性系统的经典行为,其相关研究至今仍属于前沿领域。本文设计并实现了一套可变参数的外力驱动自组混沌摆实验装置。相关研究包括:建立此实验装置的简化动力学方程,改变实验参数并通过图像识别的方法进行实验数据处理及绘制相图,最后将动力学方程的数值模拟结果与实验数据进行比较,验证了装置的可靠性。此外,实验过程中进一步探究与分析混沌现象。该装置提供了一种低成本的对混沌现象的直观化研究方法,可以作为本科生的非线性物理或计算物理课程的实践内容,加深学生对混沌现象及其原理的认识。

关键词 混沌;混沌摆;非线性物理;数值模拟;IYPT

A SIMPLE SELF-ORGANIZING CHAOTIC PENDULUM

WANG Shuohao¹ WANG Tingzhen¹ ZHANG Peizheng¹ WANG Jin^{1,2} HUI Wangwei^{1,2} WANG Xiaojie^{1,2}(¹ School of Physics; ² National Demonstration Center for Experimental Physics Education, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract Chaos is the classic behavior of nonlinear system, and its related research is still in the forefront. In this paper, a self-organizing chaotic pendulum driven by external force with variable parameters is designed and implemented. We set up the simplified dynamic equation of the experimental device, change the experimental parameters in the experiment, process the experimental data and draw the phase diagram by the method of image recognition, and finally compare the numerical simulation results of the dynamic equation with the actual experimental data to verify the reliability of the device. Besides, in this process, the chaos phenomenon is further explored and analyzed. The device provides a low-cost intuitive research method of chaos phenomenon, which can be used as the practice content of nonlinear physics or computational physics course for undergraduates, and deepen students' understanding and understanding of chaos phenomenon and principle.

Key words chaos; chaos pendulum; nonlinear physics; numerical simulation; IYPT

混沌现象是非线性系统中经典的行为,是非线性系统的固有特性。对混沌现象的理解与动力学的发展是密不可分的。最初在将牛顿的微分方

程解析方法推广到三体问题时,就发现了三体问题的显式解析解的不可解的现象^[1]。19世纪晚期,庞加莱提出着重引入定性而非定量研究问题

收稿日期: 2021-05-29; 修回日期: 2021-08-16

基金项目: 2020 高等学校教学研究项目(DJZW202010hb); 国家基础科学人才培养基金项目(J1210027); 南开大学物理基地能力提高项目(J1103208)。

通讯作者: 王瑾,女,高级实验师,主要研究方向是基础物理实验教学、仪器仪表及生物医学光子学, wangjin8208@nankai.edu.cn。

引文格式: 王烁皓,王廷振,张培正,等. 一种简易的自组混沌摆装置[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 71-78.

Cite this article: WANG S H, WANG T Z, ZHANG P Z, et al. A simple self-organizing chaotic pendulum[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 71-78. (in Chinese)

的新观点,通过引入庞加莱平面的方法,首次窥见存在混沌的可能性。20 世纪中叶电子计算机的高速发展为微分方程的求解提供了数值求解方法,使得人们对非线性系统进行更直观的研究。1963 年,气象学家洛伦兹(LORENZ E N)在研究简化的大气对流模型时发现了混沌系统的初值敏感性,做出了混沌吸引子的相图图像并将其描述为“蝴蝶效应”^[2]。1975 年,美籍华裔数学家李天岩和他的导师 YORKE J A 在论文中首次提出了“混沌”(Chaos)一词,并给出了混沌的严格数学定义^[3]。

国际青年物理学家竞赛(International Young Physicists' Tournament, IYPT) 涉及到非常多走向混沌的物理现象。如 2014 年“自己创造”(Invent yourself), 2016 年“滞后的摆”(Lagging Pendulum), 2018 年“方位径向摆”(Azimuthal-Radial Pendulum) 和 2020 年绳上球(Ballsona string)^[4]。除此之外许多物理系统均会产生混沌现象,如双摆系统、非线性电路等。

1) 非线性电路中的混沌现象

蔡氏电路是一种较为简单的能够直观演示混沌现象的非线性电子电路设计案例。在蔡氏电路中可以使用两个电容和一个电感作为储能元件,并使用两个电阻作为耗散元件。图 1 为 2014 年南开大学 CUPT 代表队蔡杨颢同学的实验图片。

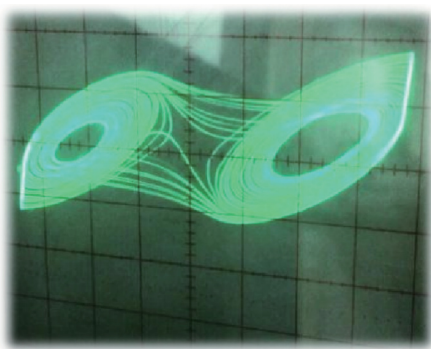


图 1 测量的蔡氏电路双混沌吸引子相图

2) 绳上球系统中的混沌现象

2020 年 IYPT 绳上球题目中,如图 2(a)原理图,可以通过实验得到如图 2(b)的上下球轨迹图。

在本科学习阶段,通过实验向学生可视化地展示混沌现象很有必要。目前市场上有的混沌摆主要为美国 PASCO scientific 公司的混沌摆实验装置套件,教学实验与论文一般也基于此装置开

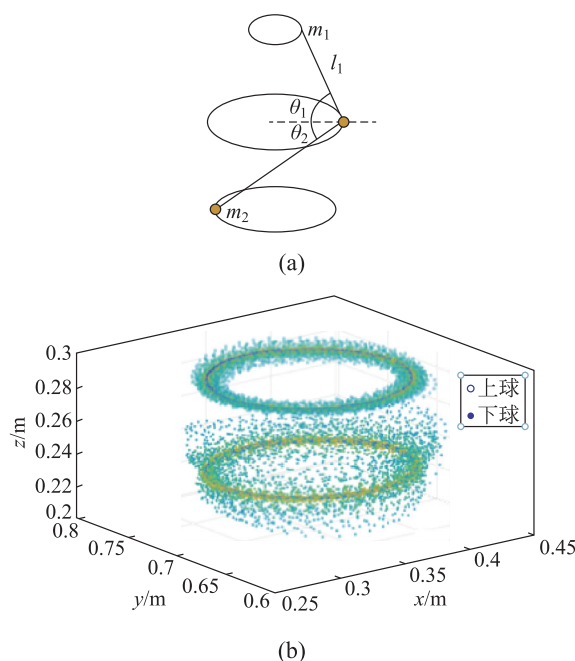


图 2 绳上球

(a) 2020 IYPT 绳上球原理图;

(b) 利用运动捕捉系统得到上球和下球运动轨迹图

展^[5-9]。该实验装置采用了转速传感器进行数据采集,可调实验参数较少,并且售价较为昂贵。国产仪器中并未发现类似实验装置。本文设计的建议自组混沌摆装置实验易于组装,利用图像处理方法进行数据采集,并可以实现在实验中驱动振幅、驱动频率、铝盘转动惯量等多参数调节,成本低廉,适于推广。

我们采用控制变量法在实验中对混沌摆的行为进行描述,建立模型的动力学方程,并将图像识别实验结果与动力学方程的数值模拟相图进行比较,验证了实验装置的可靠性。

1 混沌摆实验装置设计与原理

1.1 自组混沌摆实验装置

本文设计的外力驱动的混沌摆实验装置和组件如图 3 所示。图 3(a)为实验装置图。核心组件包括如图 3(b)所示的连接在固定转轴上的匀质铝盘、如图 3(c)的绕线轴。固定在铝盘边缘的铜柱可以为混沌摆摆动时提供一个偏心重力。在混沌摆摆动时,铝盘与绕线轴一同转动。如图 3(d),我们将两个弹簧用细线连接,跨绕在绕线轴上,右侧弹簧下侧用细线穿过如图 3(e)的引线杆上的引线

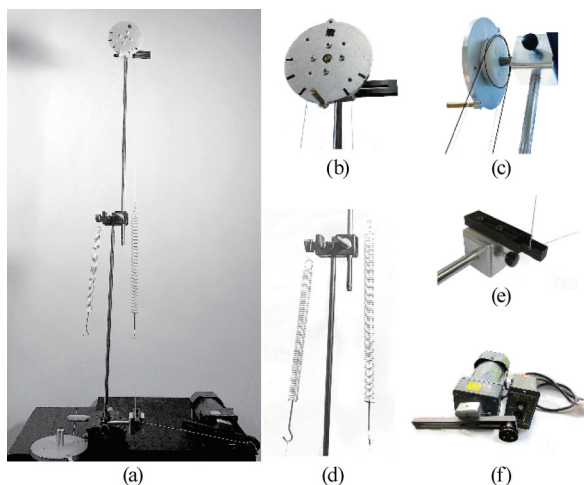


图3 实验装置图

(a) 混沌摆装置图; (b) 铝盘; (c) 绕线盘; (d) 弹簧;

(e) 引线杆; (f) 电机

孔,连接到图3(f)的电机上,并将左侧弹簧下端用细线连接一个固定点。仪器设计上,驱动振幅可以通过活动的引线杆长度调节。驱动频率可以通过调节电机频率实现。铝盘也设计为可替换装置,可以加工不同尺寸铝盘以改变其转动惯量。

为了使得在运动过程中混沌摆时刻满足运动方程,在运动中需要满足:

(1) 在驱动臂从最近端到最远端的运动过程中,两个弹簧均在弹性限度范围内,并且保证细线上持续受力,不出现松弛现象;

(2) 正常运动时弹簧等运动主要为沿细线方向径向运动,铝制圆盘及绕线轴等物件不碰撞;

(3) 驱动臂与其他物件相互不发生碰撞。

1.2 混沌摆的动力学方程

我们通过简化模型,对混沌摆的运动方程进行数学推导。实验参数取值见表1。混沌摆示意图见图4。

表1 实验参数与初始状态

物理意义	符号	数值
电机轴与引线孔之间的距离/m	D	0.2130
即驱动振幅/m	A	0.1028
铝制圆盘半径	R/m	0.0500
弹簧劲度系数/(N/m)	k	2.0
驱动初始角位置/rad	ϕ_0	0
驱动臂转速角频率/(rad/s)	ν_0	2π
摩擦阻尼系数/($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)	μ_1	0.000035

续表

物理意义	符号	数值
磁阻尼系数/($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)	μ_2	0
铝制圆盘半径/m	R	0.0500
绕线半径/m	r	0.0200
铝制圆盘质量/kg	M	0.12060
铝盘转动惯量/($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	I	1.5075×10^{-4}
铜柱质量/kg	m	7.61×10^{-3}
重力加速度/(m/s^2)	g	9.8
装置连接产生的初始相位角/rad	θ_1	0
人为调整产生的初始相位角/rad	θ_2	0

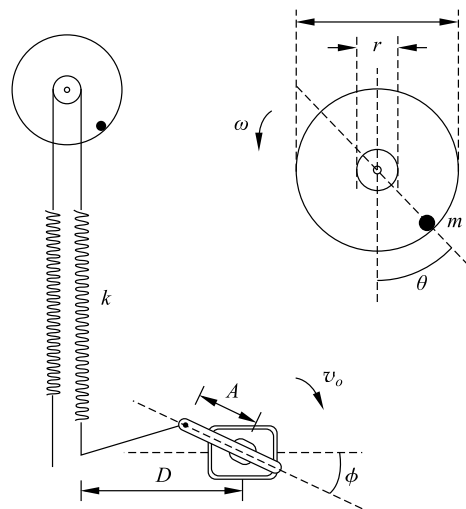


图4 混沌摆示意图

设电机轴与引线孔之间的距离为 D ,驱动臂上系线处与电机轴之间距离(即驱动振幅)为 A ,驱动臂和电机轴与引线孔之间的初始连线夹角为 ϕ_0 ,驱动臂转速角频率为 ν_0 。根据三角关系,因电机转动引起的弹簧形变量为 $L(t)$ 可以表示为

$$L(t) = \sqrt{D^2 + A^2 - 2AD \cos(\nu_0 t + \phi_0)} - \sqrt{D^2 + A^2 - 2AD \cos(\phi_0)} \quad (1)$$

设偏心铜柱与圆盘中心连线与竖直方向夹角为 θ ,且当铜柱处于最底端时 $\theta = 0$ 。设圆盘的半径,即铜柱的转动半径为 R ,绕线轴半径为 r ,则当圆盘旋转一个角度 θ 时,对应的左右两根弹簧的伸长量分别为 θr 与 $-\theta r$ 。如在初始情况下 $\theta \neq 0$,设初始角度为 θ_1 ,初始形变量为 ΔL ,则有力矩平衡

$$\Delta L = \frac{mgR \sin \theta_1}{kr} \quad (2)$$

其中 m 为铜柱质量, g 为重力加速度, k 为弹簧的劲度系数。

我们假设在混沌摆的转动过程中受到摩擦阻尼作用, 且此阻尼与角速度成正比, 设阻尼系数为 μ_1 , 根据刚体的定轴转动定律, 得到动力学方程

$$\ddot{\theta} = [krL(t) - mgR(\sin\theta - \sin\theta_1) - 2kr^2\theta - (\mu_1 + \mu_2)\dot{\theta}]/I \quad (3)$$

其中 I 为转动惯量为 $I = 1/2MR^2$, M 为铝制圆盘的质量。在求出动力学方程之后, 我们使用 python 代码编写程序进行数值求解, 我们令 $\dot{\theta} = \omega$, 将式(3)整理成一阶常微分方程组的形式, 可以得到

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = [krL(t) - mgR(\sin\theta - \sin\theta_x) - 2kr^2\theta - (\mu_1 + \mu_2)\omega]/I \end{cases} \quad (4)$$

我们将(4)无量纲化处理后, 可以得出在以上各参数均可调的情况下的 $\omega-\theta$ 相图, $\omega-t$ 关系图与 $\theta-t$ 关系图。

混沌摆的运动状态与实验装置的参数设置和初始状态有着密切的联系。在实验中我们在其余参数固定的情况下使用控制变量法进行实验, 实验参数如表 1 所示。

在实验中使用 sony 公司生产的 $\alpha 7m3$ 微单进行拍摄, 分辨率为 1080p, 帧速率为 100fps, 即每隔 0.01 秒记录一次。在拍摄时也可以使用手机摄像进行替代。实验过程中用黑色胶带粘贴在铝盘上, 作为追踪点, 使用 tracker 软件对追踪点的位置变化进行追踪, 记录该点相对于混沌摆转轴轴心的坐标(见图 5)。采用反三角函数求出此点与轴心的连线同竖直方向的夹角, 即为 θ 。同时角速度 ω 满足

$$\omega = \dot{\theta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (5)$$

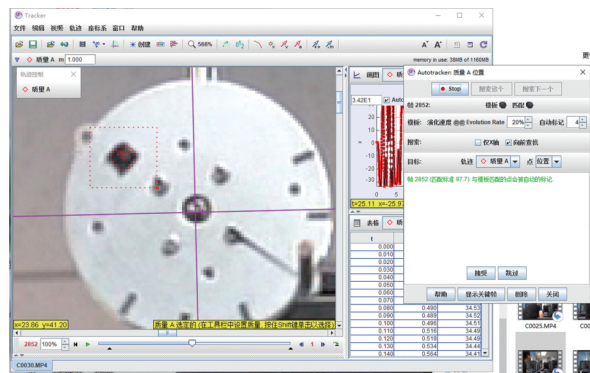


图 5 使用 tracker 软件进行追踪

可以通过 $\omega = (\theta_{t+\Delta t} - \theta_t)/\Delta t$ 求出 ω 。并且使用软件绘出 $\omega-\theta$ 的相图。

2 实验结果与分析

2.1 混沌摆相图随驱动振幅的变化

我们将驱动臂的振幅 A 作为可调参数, 如表 2 所示, 不改变其他实验参数, 在 4~17cm 的区间内逐步改变振幅。进行实验分析与数据处理之后, 得到 $\omega-\theta$ 相图, 并与数值模拟结果相比较, 如图 6 所示。

表 2 驱动振幅变化取值表

	长度/cm
A_1	4.49
A_2	6.59
A_3	8.61
A_4	10.56
A_5	13.47
A_6	16.87

混沌摆的运动情况如图 6 中右侧(b)(d)(f)(h)(j)(l)所示, 分别对应的数值模拟图像为左侧(a)(c)(e)(g)(i)(k)。我们发现在驱动振幅较小时, 如图 6(a)(b)(c)(d), 混沌摆的运动近似为一周期运动。驱动振幅增大时, 如图 6(e)(f)(g)(h)(i)(j), 混沌摆的运动由周期运动向混沌运动过渡, 此时会得到有两个吸引子的混沌运动相图。当驱动振幅进一步增大到如图 6(k)(l)所示, 混沌运动的相图会呈现从两个吸引子向一个吸引子过渡的情形, 理论和实验趋势一致。

2.2 混沌摆相图随驱动力周期的变化

保持表 1 中的其他参数不变, 改变驱动臂转速, 如表 3 所示, 进行实验, 根据实验结果绘制实验相图和相应的数值模拟相图, 结果如图 7 所示。

表 3 驱动频率变化取值表

	转速/(rad/s)
ν_1	$0.50 \times 2\pi$
ν_2	$0.67 \times 2\pi$
ν_3	$0.81 \times 2\pi$
ν_4	$0.96 \times 2\pi$
ν_5	$1.19 \times 2\pi$
ν_6	$1.32 \times 2\pi$
ν_7	$1.41 \times 2\pi$
ν_8	$1.59 \times 2\pi$
ν_9	$1.82 \times 2\pi$

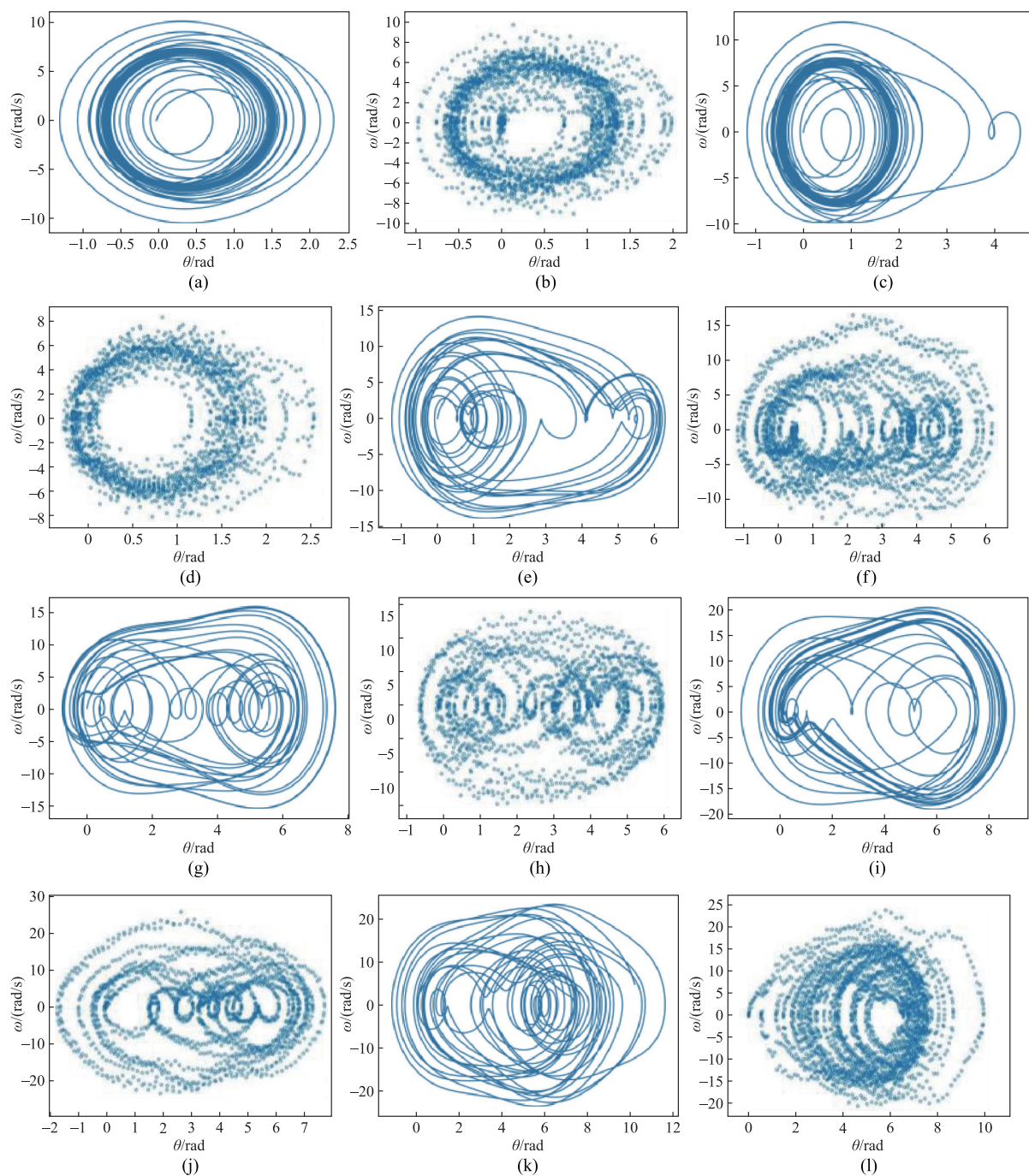


图6 在变驱动振幅情况下相图的比较

其中(b)(d)(f)(h)(j)(l)分别为在驱动振幅取值为 $A_1 \sim A_6$ 时实验得出的图像,图(a)(c)(e)(g)(i)(k)为相应的数值模拟图像

根据相图对应的实验数据与数值求解比较,可以发现,如图7(a)(b)(c)(d),当驱动角频率较小时,铝制圆盘和铜棒组成的混沌摆会在初始位置两侧随着驱动频率进行摆动,且由于有摩擦阻尼的存在,这种摆动的幅度会随着时间趋向于一个较为稳定大小。此时可以近似认为是一个非混沌解。

当驱动角频率不断增大,如图7(e)(f)(g)(h)

(i)(j),摆动振幅会随着驱动振幅的增大而不断增大。当驱动振幅超过 π ,即混沌摆转动超过半圈的时候,由于偏心重量的存在,此时系统的摆动状况变得较为复杂。混沌摆的运动逐渐从非混沌解向混沌解情况转变。洛伦兹吸引子的几何特征为含有两个涡旋,涡旋的中心点即为微分方程组决定的平衡点。

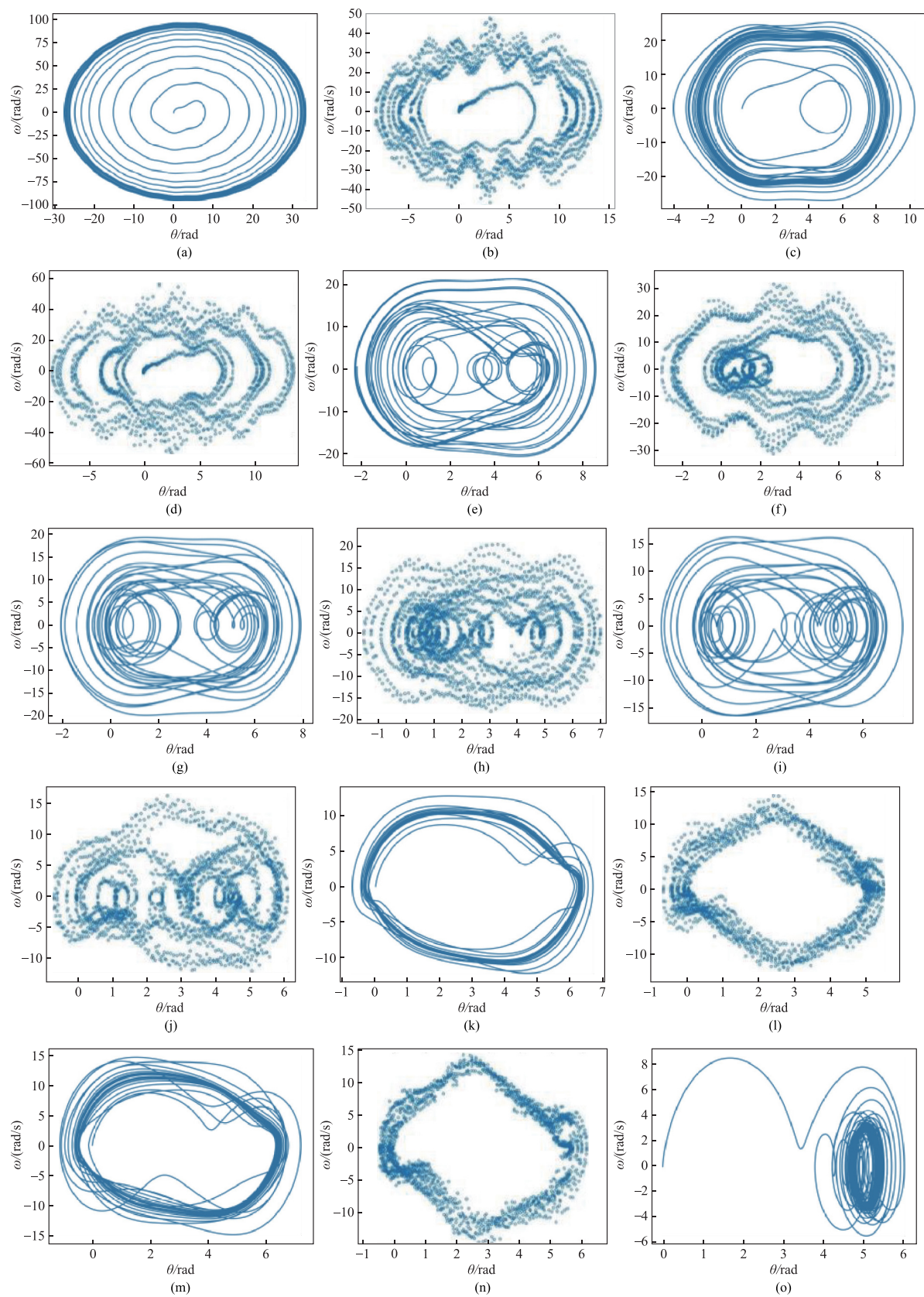


图7 在变驱动角频率情况下相图的比较

其中(b)(d)(f)(h)(j)(l)(n)(p)(r)分别为在角频率为 $\nu_1 \sim \nu_9$ 时实验得出的图像,图(a)(c)(e)(g)(i)(k)(m)(o)(q)为相应的数值模拟图像

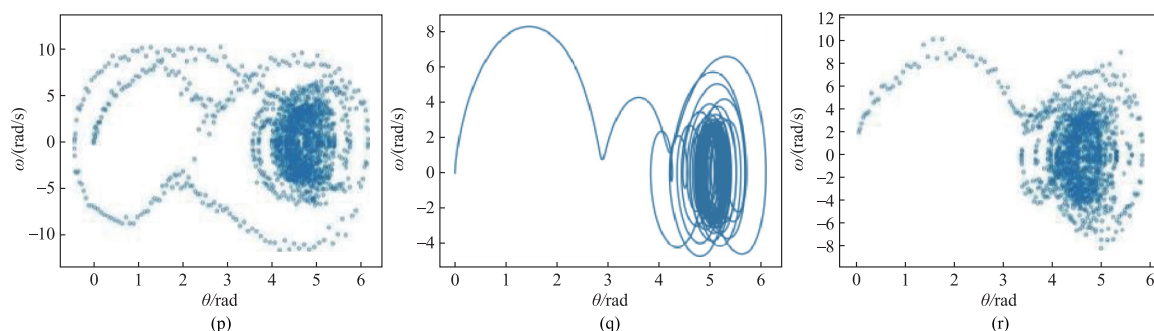


图7 (续)

当驱动频率继续增大,如图7(k)(l)(m)(n)和图7(o)(p)(q)(r),系统会重新回归到较稳定的近似周期运动情况和单个吸引子的混沌运动情况。其中图7(k)(l)(m)(n)表现的近似周期的运动情况是由于系统存在摩擦阻尼,使准周期解产生了变形。在使用数值模拟时发现,此情况下如不存在阻尼,则系统体现出的即为准周期解。

2.3 讨论与分析

混沌运动的特征之一即为系统对实验参数与初始值的异常敏感。在此混沌摆实验中即能体现。如图8所示,当在其余参数不变的条件下调

整驱动频率有一较小的波动,即驱动频率分别为 ν 和 $\nu + \Delta\nu$ 时,系统体现出的运动情况具有较大差别。其中 $\Delta\nu = 1 \times 10^{-6} \times 2\pi \text{ rad/s}$ 。

我们在进行数值模拟的过程中同样发现,在有些特定的实验参数的情况下,系统的运动会随着参数在一小区间内的变化而产生较大的变化。我们发现在如图9(a)和(d)的单吸引子混沌解所确定的驱动频率区间中,会出现如图9(b)所示的另一种单吸引子混沌解情况与图9(c)所示的双吸引子的混沌解情况。

实验中误差主要来源于驱动电源的电压波动、质量分布的区域不均匀性、弹簧在径向运动过程中不可避免的横向运动和初始参数的微小差别等。因此数值模拟结果与实际实验结果有可能在某些特定范围中具有一定差别。

3 结语

21世纪以来,混沌现象已经涉及自然科学和社会科学的各个领域,对于混沌现象和非线性系统的进一步研究,有助于人们去理解自然科学和社会科学中的一系列问题,也对研究复杂的生命现象研究有着重要的启示作用。

这种自主设计的一种具有非线性特性的混沌摆系统成本低,不需要转速传感器。实验可以作为本科生的非线性物理或计算物理课程的实践内容。学生们可以根据对应的微分方程编写混沌摆运动方程的数值求解程序,并将实验和理论进行对比分析。实验装置中多个参数均可以进行调节,通过改变不同参数以进行实验结果的观测与比较分析,与数值模拟的方式对系统在不同状

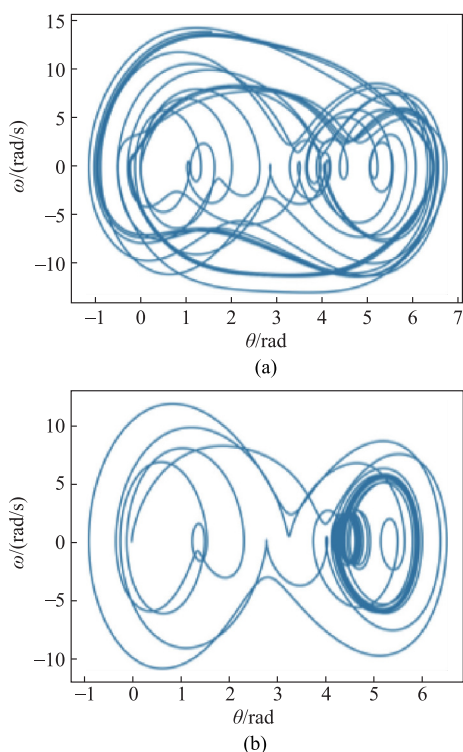


图8 混沌摆运动对初值的敏感性

(a) $\nu = 1.347123 \times 2\pi \text{ rad/s}$; (b) $\nu + \Delta\nu = 1.347124 \times 2\pi \text{ rad/s}$
二者之差 $\Delta\nu = 1 \times 10^{-6} \times 2\pi \text{ rad/s}$

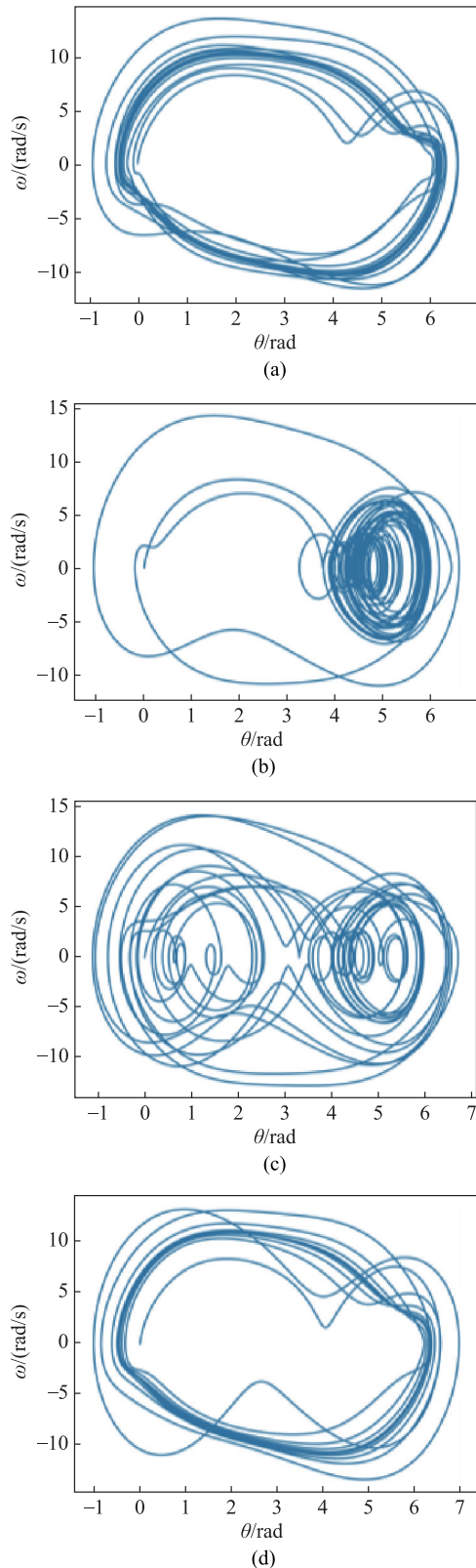


图9 混沌摆运动在驱动频率属于较小区间内的变化

(a) $\nu'_1 = 1.282 \times 2\pi \text{ rad/s}$; (b) $\nu'_2 = 1.299 \times 2\pi \text{ rad/s}$;
(c) $\nu'_3 = 1.315 \times 2\pi \text{ rad/s}$; (d) $\nu'_4 = 1.333 \times 2\pi \text{ rad/s}$

态下的混沌现象进行对比,丰富对物理图像的认识。

致谢: 本文实验工作在南开大学物理科学学院公能创新实验室完成。感谢曾宪泓、沈逸、张辰洋同学为本文提供的绳上球实验图片。

参 考 文 献

- [1] VALTONEN M, KARTTUNEN H, GUTZWILLER M C. The three-body problem[J]. Physics Today, 2007, 60(4): 59.
- [2] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. J. Atmos. Sci., 1963, 20(1): 130-141.
- [3] LI T, YORKE J A. Period three implies chaos[J]. Amer. Math. Mon., 1975, 82(10): 985-992.
- [4] Ilya Martchenko. Problems of IYPT [DB/OL]. (1999) [2021-05-22]. <https://archive.iypt.org/problems/>
- [5] 韩晓茹,傅筱莹,彭可鑫,等.基于PASCO系统的混沌摆实验[J].物理实验,2011,31(11):5-9.
HAN X R, FU X Y, PENG K X, et al. Research of the chaotic pendulum experiment based on PASCO system[J]. Physical Experiment, 2011, 31(11): 5-9. (in Chinese)
- [6] 邹元奕,王莹.外力驱动的混沌摆实验仪在研究混沌效用上的应用[J].大学物理实验,2013,26(4):13-15.
ZOU Y Y, WANG Y. Application of chaos pendulum experimental instrument driven by external force to study chaos utility[J]. Physics Experiment College, 2013, 26(4): 13-15. (in Chinese)
- [7] 朱桂萍,王健.混沌摆系统的动力学分析和数值模拟[J].扬州大学学报(自然科学版),2008(3):27-30, 34.
ZHU G P, WANG J. Dynamic analysis and numerical simulation of chaotic pendulum system[J]. Journal of Yangzhou University (NATURAL SCIENCE EDITION), 2008(3): 27-30, 34. (in Chinese)
- [8] 李明达,董乔南,杨亚利,等.利用非线性动力学系统研究混沌现象[J].物理与工程,2019,29(6):77-84, 88.
LI M D, DONG Q N, YANG Y L, et al. Study of chaos using nonlinear dynamical systems[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(6): 77-84, 88. (in Chinese)
- [9] 李明达,袁哲诚,罗骥斌.一种非线性动力学系统混沌现象的深入研究[J].大学物理,2020,39(1):33-37, 60.
LI M D, YUAN Z C, LUO J B. In depth study on chaos in a nonlinear dynamical system[J]. College Physics, 2020, 39(1): 33-37, 60. (in Chinese)