

铅球运动最佳抛射角和最大射程的理论研究

麻志君 杨 颖 付响云 陆振烟

(湖南科技大学物理与电子科学学院;

智能传感器与新型传感材料湖南省重点实验室, 湖南 湘潭 411201)

摘 要 从力学运动公式出发, 假设运动员抛出物体时输出能量固定, 应用能量守恒定律研究以一定高度和角度抛出物体的运动规律, 详细定量分析运动员输出能量、肩膀高度和手臂长度对抛射速度、最佳抛射角和最大射程的影响。研究表明, 对铅球成绩影响最大的是抛射速度和抛射角, 而 50 厘米的肩膀高度或手臂长度差别对铅球成绩的影响分别为分米和厘米量级。另外, 理论计算结果与三名铅球运动员实际投掷数据的比较说明理论计算结果的可靠性高, 研究结果对投掷类运动具有一定指导和借鉴意义。

关键词 抛体运动; 铅球; 抛射角; 最大射程

THEORETICAL STUDY ON OPTIMAL THROW ANGLE AND MAXIMUM RANGE OF PROJECTILE MOTION

MA Zhijun YANG Ying FU Xiangyun LU Zhenyan

(School of Physics and Electronics, Hunan University of Science and Technology;

Hunan Provincial Key Laboratory of Intelligent Sensors and Advanced Sensor Materials, Xiangtan, Hunan 411201)

Abstract Starting from the mechanical motion formula and assuming that the athlete's output energy is fixed when throwing an object, we study the movement law of projectile with the consideration of the law of energy conservation. The effects of athlete's output energy, shoulder height, and arm length on the initial velocity, optimal throw angle, and maximum range of the projectile motion are quantitatively discussed in detail. It is found that various factors that influence the shot put are dominated in turn by the initial velocity and projecting angle, while 50 cm differences in shoulder height and arm length will result in the change of results in order of decimeters and centimeters, respectively. In addition, the comparison between theoretical calculations and actual throwing data of the shot putter shows that the results are in good agreement with each other, and the obtained results are expected to provide useful advice and guidance to the training of the sports like shot put.

Key words projectile motion; shot put; projecting angle; maximum range

收稿日期: 2021-08-29; 修回日期: 2021-09-18

基金项目: 湖南省自然科学基金(2020JJ4284, 2021JJ40188); 湖南省教育厅科学研究项目(19C0772, 20C0787); 湖南科技大学博士科研启动基金(E52059); 湖南科技大学教学改革研究项目(G32117)。

作者简介: 麻志君, 女, 讲师, 主要从事物理教学和理论物理研究工作, 研究方向为原子与分子物理及高能物理, mazhijun@hnust.edu.cn。

通讯作者: 陆振烟, 男, 讲师, 主要从事物理教学和理论物理研究工作, 研究方向为高能物理及天体物理, luzhenyan@hnust.edu.cn。

引文格式: 麻志君, 杨颖, 付响云, 等. 铅球运动最佳抛射角和最大射程的理论研究[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 29-35.

Cite this article: MA Z J, YANG Y, FU X Y, et al. Theoretical study on optimal throw angle and maximum range of projectile motion[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 29-35. (in Chinese)

抛体运动是生活、科学研究和体育运动中常见的运动现象。依据运动效果分解抛体运动,其可分为以下几种类型:竖直上抛运动、竖直下抛运动、平抛运动和斜抛运动。其中,斜抛运动是最具代表性的抛体运动,而其他类型的抛体运动可以看成特殊的斜抛运动。最简单也是最常见的斜抛运动模型为:忽略空气阻力、抛射速度保持不变且抛出点与落地点在同一水平线时,最佳抛射角为 45° 。抛体运动的轨迹是一条关于最高点所在的竖直线对称的抛物线。此类研究在忽略空气阻力的前提下,将抛射物体视为质点,结果表明抛射物体运动轨迹与物体本身的质量没有关系。同时,最佳抛射角也不受物体质量和抛射速度的影响。

铅球运动是田径运动的投掷项目之一,也是奥运会等重要体育赛事的项目之一。由于铅球的质量较重且飞行速度较慢,铅球飞行过程中所受空气阻力可忽略不计^[1]。另外,由于铅球运动属于一种抛射点高于落地点的斜抛运动^[2,3],铅球运动最佳抛射角并不是抛出点与落地点在同一水平线上的无阻力抛体运动模型得到的 45° 。文献[4]利用两种不同方法探讨了抛射点高于落地点的斜上抛运动最佳抛射角的问题,得到最佳抛射角总是小于 45° 的结论。文章还指出:当抛射点高度与落地点高度趋于一致时,最佳抛射角趋于 45° 。但是我们知道,铅球脱手时的抛射速度并不是固定不变的,而是与抛射角度紧密相关:抛射角度越大,铅球抛射速度必然越小。除此之外,运动员力量的大小、肩膀高度和手臂长度也在不同程度上影响着铅球的抛射速度以及射程。因此,鉴于铅球重量的大小以及个人力量和身高等客观条件方面的差异,每个人都有自己的最佳抛射角度。本文对铅球运动进行数学建模,并定量地研究运动员力量大小、肩膀高度(或身高)、手臂长度和抛射角对铅球成绩的影响。但是,需要说明的是本文不讨论推铅球技术以及根据生理特点如何获得最大推力等技术性问题^[5-9],仅重点研究与最佳抛射角和最大射程相关的力学问题。理论计算结果与世界著名铅球运动员的实际投掷数据相符,说明本文的理论计算结果是可信赖的,相关研究结果也可作为投掷类运动训练提供参考。

1 铅球运动建模

铅球运动是运动员将人体全身的力量尽可能地转化为铅球重力势能和动能的田径运动项目之一。但是,运动员有个体差异,比如身高、臂长、力量大小等不尽相同,而这种个体差异会在不同程度上影响运动成绩。通常来说,一段不太长的时间内一个人可使出的最大力量是不变的。因此,为了方便研究铅球运动的最佳抛射角和最大射程问题,我们假设运动员在投掷铅球时可以输出的能量是固定的,记为 W ,而其他相关参量:运动员肩膀高度为 h (定义为脚底到肩峰点的竖直高度),手臂长度为 l (定义为单只手臂肩峰点到手掌心的距离),物体脱离手时的抛射速度为 v_0 。如图1所示,我们将肩峰点处设定为坐标轴原点 O ,铅球抛出点坐标为 $(x_0, y_0) = (l\cos\theta, l\sin\theta)$,铅球落地点坐标则为铅球运动轨迹与 $y = -h$ 交点坐标。如上所述,假定每一次投掷过程中,运动员输出的能量全部转化为铅球的动能和重力势能,则有

$$W = mgl\sin\theta + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

其中 m 为铅球质量, θ 为抛射角, v_0 为铅球脱手时的抛射速度,而 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 为重力加速度。对上式进行反解,得到铅球抛射速度为

$$v_0 = \sqrt{2(W - mgl\sin\theta)/m} \quad (2)$$

从式(1)或式(2)可知,铅球抛射速度与运动员输出能量、铅球质量、手臂长度和抛射角均直接相关,且当运动员输出能量 W 保持不变时,铅球质量、手臂长度和抛射角这三个物理量中的任意一个或多个变大时,都会使铅球抛射速度减小。

铅球运动属于斜抛运动,而斜抛运动是一类经典的运动类型,我们一般将其抛射速度在水平

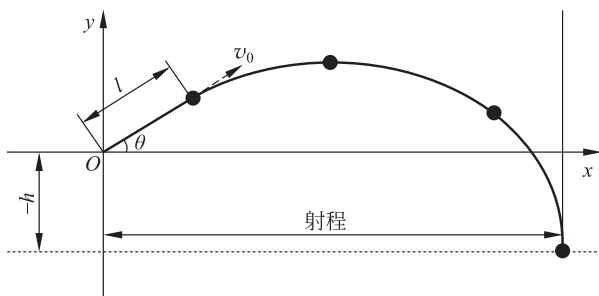


图1 铅球运动示意图

和竖直方向进行分解。将铅球运动分解成水平方向上的匀速直线运动和竖直方向上的匀变速直线运动,则 x 轴和 y 轴方向的位移分别为

$$\begin{cases} x = l \cos \theta + (v_0 \cos \theta) t \\ y = l \sin \theta + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (3)$$

利用代入法消掉式(3)中的时间 t 之后,得到铅球运动的轨迹方程

$$y = l \sin \theta + (x - l \cos \theta) \tan \theta - \frac{mg(x - l \cos \theta)^2}{4(W - mgl \sin \theta) \cos^2 \theta} \quad (4)$$

因为根据我们的设定,推铅球所用手臂的肩峰点定为坐标原点 O ,所以铅球运动的落地点应该为上面铅球运动的轨迹方程与直线 $y = -h$ 的交点。将 $y = -h$ 代入式(4),且根据一元二次方程求根公式,我们得到铅球的射程与抛射角度 θ 满足的关系式为

$$x = l \cos \theta + 2 \left(\frac{W}{mg} - l \sin \theta \right) \cos^2 \theta \times \left(\tan \theta + \sqrt{\tan^2 \theta + \frac{mg(l \sin \theta + h)}{(W - mgl \sin \theta) \cos^2 \theta}} \right) \quad (5)$$

极值方程 $dx/d\theta = 0$ 决定了抛体运动最佳抛射角以及最大射程。但由于公式比较冗长和繁杂,这里不列出具体的表达式。另外,由于很难得到抛射角与射程之间的显性表达式,因此本文采用数值计算的方式研究最佳抛射角和最大射程问题。当我们对式(5)取 $l, h \rightarrow 0$ 的极限时,落地点与抛出点处在同一水平线上。此时,式(5)变成 $x = 2W \sin 2\theta$,对应的最佳抛射角为 45° 。很明显,该角度与抛射速度无关,这正好与抛出点与落地点在同一水平线上的无阻力抛体运动结果相符。

2 数值计算结果及讨论

在讨论数值计算结果之前,这里交代一下铅球运动中所涉及参数的取值。严格意义上说,肩膀高度 h 和手臂长度 l 对于不同级别赛事以及不同年龄段乃至不同的运动员,是有差别的。但为了方便讨论,除非特别说明,以下数值计算中我们将肩膀高度和手臂长度分别固定为 $h = 1.5\text{m}$, $l = 0.6\text{m}$ 。这两个参数的取值有一定代表性和合理性,原因有二:(1) $h = 1.5\text{m}$ 和 $l = 0.6\text{m}$ 为正常人

肩膀高度和手臂长度的典型值;(2)数值计算表明:肩膀高度和手臂长度的差异对铅球运动成绩的影响较小,甚至可以忽略不计,具体分析可见表6。目前,成年男子铅球比赛用球的质量为 7.26kg ,而青少年男子和女子组铅球比赛常用铅球质量分别为 6kg 和 4kg 。因此,本文的数值计算以铅球质量 $m = 4\text{kg}, 6\text{kg}, 7.26\text{kg}$ 为例。在肩膀高度 h 和手臂长度 l 固定的前提下,运动员输出能量 W 、抛射速度 v_0 、最佳抛射角和射程均为一一对应关系。当运动员输出能量 W 、肩膀高度 h 和手臂长度 l 均给定时,利用 Mathematica 软件的 FindMaximum 命令,我们可以从式(5)求解出抛射速度和最佳抛射角。当然,直接求解极值方程 $dx/d\theta = 0$ 也能给出相同数值结果。

为了直观表示不同抛射角对射程的影响,图2给出三个典型抛射角下的铅球抛射曲线,其中计算参数运动员输出能量 $W = 300\text{J}$,铅球质量 $m = 6\text{kg}$,手臂长度 $l = 0.6\text{m}$ 和肩膀高度 $h = 1.5\text{m}$ 。该参数组给出的最佳抛射角为 38.65° 。由图2分别表示抛射角为 20.00° 、 38.65° 和 60.00° 的点虚线、实线和虚线,可以看到三条曲线在射高处由下到上依次排列,结果与经验相符:对于同一个运动员来说,抛射角越大,射高也越大。另外,可以明显看到表示以最佳抛射角抛出物体的实线所对应的射程最大。换句话说,不论是以小于(点虚线)还是大于(虚线) 38.65° 的角度抛出铅球时,对应射程均小于以最佳抛射角(38.65°)抛出铅球时所得到的最大射程。

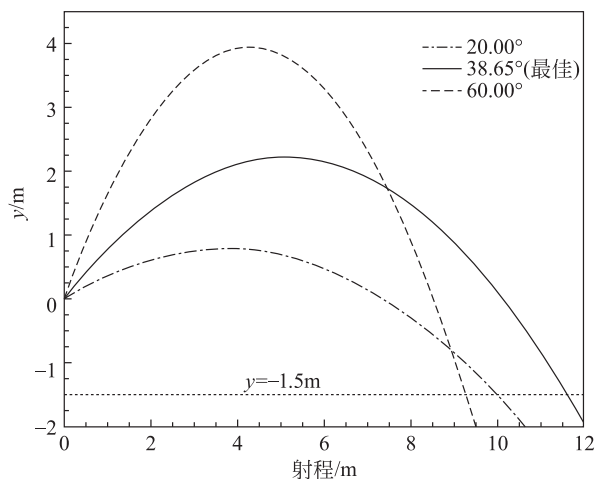


图2 三个典型抛射角给出的抛体轨迹图,其中实线表示以最佳抛射角抛出所得到的抛射曲线

2.1 运动员输出能量对抛射速度、最佳抛射角和射程的影响

运动员输出能量 W 是度量运动员力量大小的物理量,其直接决定运动员对铅球做功的大小。图 3 实线给出铅球质量分别为 4kg、6kg、7.26kg 时抛射速度 v_0 随运动员输出能量 W 的变化关系。可以看到:随着输出能量 W 的增加,铅球抛射速度随之近似线性增加。严格地说,曲线斜率逐渐减小,说明抛射速度随输出能量的增加而速度有所放缓,但不是特别明显。当然,铅球质量越轻,抛射速度上升的速度越快,这一点也可以从公式(1)看出来。这里需要说明的是该图展示的输

出能量 W 和铅球抛射速度的关系是假设运动员以最佳抛射角抛出铅球的前提下得到的。

图 3 虚线还给出了铅球质量分别为 4kg、6kg、7.26kg 最佳抛射角随运动员输出能量 W 的变化关系。随着运动员输出能量 W 的增大,最佳抛射角单调且快速增大,随后趋于饱和。同一输出能量下,铅球质量越大,最佳抛射角越大。换句话说,对于同一个运动员,若抛射的物体越重,则应该适当加大抛射角。在文章开头,我们提到当抛体运动与抛射物体质量和抛射速度无关时,最佳抛射角为 45° ,而从这个图可以得到一个信息:不管输出能量或抛射速度如何增加,最佳抛射角只能无限接近但始终小于 45° 。

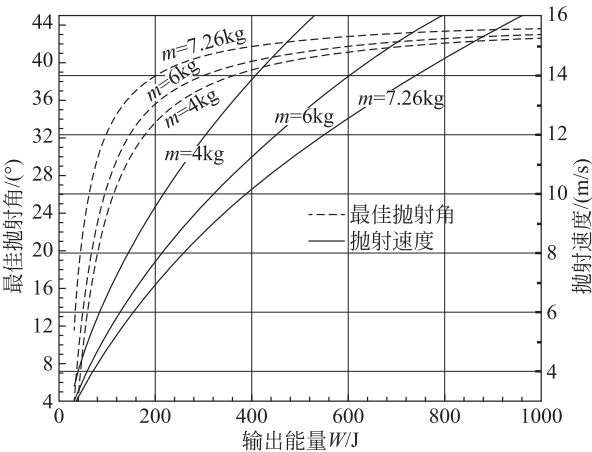


图 3 铅球抛射速度 v_0 (右侧纵轴)和最佳抛射角 (左侧纵轴)随运动员输出能量 W 的变化关系

图 4 实线给出铅球质量分别为 4kg、6kg、7.26kg 时最大射程(实线,右侧纵轴)和最佳抛射角(虚线,左侧纵轴)随输出能量的变化关系。当铅球抛射速度较小时,最佳抛射角随抛射速度的

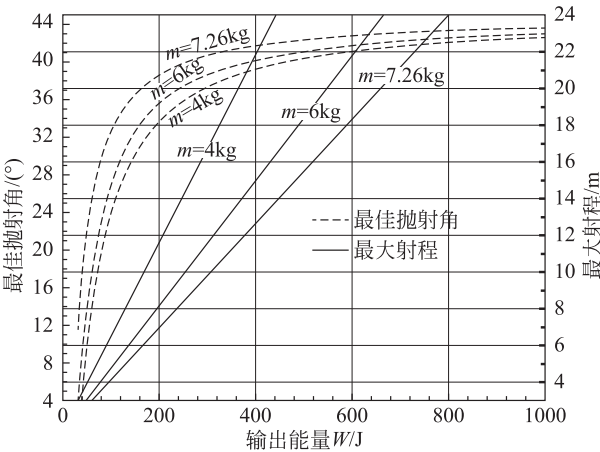


图 4 最大射程和最佳抛射角随输出能量的演化关系

增加而从零开始快速增加,之后最佳抛射角的增速明显放缓。当抛射速度趋于无穷大时,最佳抛射角也无限接近 45° 。最大射程与抛射速度几乎呈线性关系。该图给出的一个重要信息是:铅球抛射速度越大,最佳抛射角也越大。

为了直观表示抛射速度与射程和最佳抛射角之间的关系,表 1 给出不同抛射速度与射程和最佳抛射角的对应关系,其中计算参数手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$ 。理论数值计算表明,铅球质量的差别并不会改变表格中的数据,所以这里并未列出铅球质量。随着抛射速度的增大,射程和最佳抛射角均单调增加。当抛射速度处在 $6.26\sim 8.21\text{m/s}$ 时,射程和最佳抛射角分别处在 $6\sim 9\text{m}$ 和 $31.48^\circ\sim 36.55^\circ$ 之间;当抛射速度处在 $8.21\sim 12.43\text{m/s}$ 时,射程和最佳抛射角分别处在 $9\sim 18\text{m}$ 和 $36.55^\circ\sim 41.03^\circ$ 范围内,而当抛射速度处在 $12.43\sim 13.55\text{m/s}$ 时,射程和最佳抛射角分别处在 $18\sim 21\text{m}$ 和 $41.03^\circ\sim 41.63^\circ$ 之间。这些数据是典型参数手臂长度 $l=0.6\text{m}$ 和肩膀高度 $h=1.5\text{m}$ 下得到的,运动员肩膀高度、手臂长度等差异会对上述结果有影响,但影响较小,详情可见表 6。

表 1 不同抛射速度所对应的射程和最佳抛射角
其中计算参数手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

抛射速度/(m/s)	射程/m	最佳抛射角/($^\circ$)
6.26	6	31.48
8.21	9	36.55
9.81	12	38.86
11.19	15	40.18
12.43	18	41.03
13.55	21	41.63

由于不同级别赛事的比赛用球质量不一样,在表 2~4 中,我们给出分别对应于青少年女子组、青少年男子组和成年男子组铅球比赛用球质量 4kg、6kg、7.26kg 时,输出能量 W 、抛射速度 v_0 、最佳抛射角和最大射程之间的对应关系。明显可以看到:这几个物理量呈正相关,即某个量单调增加时,其他量也随之单调增加。

表 2 铅球质量 $m=4\text{kg}$ (青少年女子组)
手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

输出能量 W/J	抛射速度 $/(m/s)$	最佳抛射角 $/(^{\circ})$	最大射程 $/m$
100	6.61	32.66	6.48
150	8.25	36.61	9.06
200	9.63	38.65	11.63
250	10.84	39.88	14.19
300	11.93	40.72	16.75
350	12.93	41.32	19.31

表 3 铅球质量 $m=6\text{kg}$ (青少年男子组),
手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

输出能量 W/J	抛射速度 $/(m/s)$	最佳抛射角 $/(^{\circ})$	最大射程 $/m$
200	7.73	35.61	8.20
300	9.63	38.65	11.63
400	11.21	40.20	15.05
500	12.61	41.14	18.46
600	13.86	41.77	21.87

表 4 铅球质量 $m=7.26\text{kg}$ (成年男子组)
手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

输出能量 W/J	抛射速度 $/(m/s)$	最佳抛射角 $/(^{\circ})$	最大射程 $/m$
200	6.97	33.74	7.01
300	8.69	37.36	9.85
400	10.14	39.22	12.67
500	11.41	40.35	15.50
600	12.55	41.11	18.32
700	13.60	41.65	21.13

2.2 理论计算结果与运动员实际投掷数据的比较

为了检验理论计算结果的可靠性,我们把运

动员实际抛射速度选为理论计算的抛射速度,在表 5 中比较了三名铅球运动员投掷数据与理论计算结果,其中理论计算取手臂长度 $l=0.6\text{m}$,肩膀高度 $h=1.5\text{m}$ 。为了避免概念混淆,这里需要强调的是:本文所指的抛射高度并不直接等于运动员身高,也不等于运动员的肩膀高度,而是等于运动员肩膀高度和手臂长度在竖直方向上的投影之和,即抛射高度 $H = |-h| + l\cos\theta$ 。假定运动员各自以表 5 中的第三列所示的抛射速度及最佳抛射角抛出时,由公式 $H = |-h| + l\cos\theta$ 计算得到的抛射高度均约为 1.90m(运动员实际抛射高度与此值的轻微差别所导致的铅球成绩差别很小,具体可见 2.3 小节的分析),此即为表 5 第二列小括号内数据的由来。可以看到,三名运动员实际抛射角均在不同程度上偏离于各自最佳抛射角,而运动员的实际成绩也都比理论预测的最大射程要小。更具体地说,前两名运动员的实际抛射角与最佳抛射角非常接近,而实际成绩虽然与理论预测的最大射程相差不大,但均都小于理论最大射程;最后一名运动员实际抛射角与最佳抛射角相差较大,而其实际成绩也与理论预测的最大射程要小不少。

表 5 三位著名铅球运动员投掷参数与理论计算结果的比较
理论计算取铅球质量 $m=6\text{kg}$,手臂长度 $l=0.6\text{m}$,
肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

姓名	抛射 高度 $/m$	抛射 速度 $/(m/s)$	抛射角 (最佳 抛射角) $/(^{\circ})$	实际成绩 (理想 最大射程) $/m$
隋新梅	1.96 (1.90)	13.40 (13.40)	41 (41.56)	20.25 (20.57)
黄志红	2.06 (1.90)	13.35 (13.35)	42 (41.53)	20.24 (20.44)
李梅素	1.98 (1.90)	13.27 (13.27)	35 (41.49)	19.46 (20.22)

注:(1)小括号内的数值为理论计算结果,而小括号前面的数值表示运动员实际投掷参数真实值;(2)运动员数据摘自文献^[10,11]。

总结起来说,在抛射高度和抛射速度均各自相同的前提下,三位铅球运动员的实际抛射角均与理论计算出的最佳抛射角有一定偏差,而她们的实际投掷成绩也如预期的小于各自的理论最大射程。另外,三位铅球运动员与理论计算结果的

比较同样说明:运动员实际抛射角偏离最佳抛射角越多,则运动员铅球成绩偏离理论最大射程也越大;反之,则越趋近于理论最大射程。从这一点来看,本文对铅球运动最佳抛射角和最大射程的理论描述可信度高,对投掷类运动具有一定的参考和指导意义。

2.3 肩膀高度和手臂长度对抛射速度、最佳抛射角和射程的影响

表 6 给出同一输出能量 $W=300\text{J}$ 以及铅球质量为 $m=6\text{kg}$ (青少年男子组)时,四组不同肩膀高度和手臂长度,即 $(h, l) = (1.5, 0.6)$, $(1.5, 1.1)$, $(2, 0.6)$, $(2, 1.1)$, 所对应的抛射速度、最佳抛射角和最大射程的比较。从表中第一行和第二行数据可以看到(在输出能量相同的前提下),手臂长度的差别对抛射速度以及最佳抛射角有一定影响:手臂越长,抛射速度以及最佳抛射角越小,但射程越大。但从最后一列数据来看,手臂长度的差别对最大射程的影响非常小,近似可以忽略。而如果我们比较第二行和第四行数据,发现肩膀高度越高,最佳抛射角越小,而最大射程越大。总体而言,抛射点的位置越高,最佳抛射角越小,这与文献^[12]的结果相符。

表 6 在同一输出能量 $W=300\text{J}$ 以及铅球质量为 $m=6\text{kg}$ 时,四组不同肩膀高度和手臂长度所对应的抛射速度、最佳抛射角和最大射程的比较

肩膀高度 /m	手臂长度 /m	抛射高度 /m	抛射速度 /(m/s)	最佳抛射角 /($^{\circ}$)	最大射程 /m
1.5	0.6	1.87	9.63	38.65	11.63
1.5	1.1	2.15	9.34	36.23	11.67
2	0.6	2.37	9.63	37.57	12.06
2	1.1	2.63	9.36	35.13	12.10

2.4 抛射角对抛射速度和射程的影响

表 7 给出抛射高度、抛射速度和射程对抛射角的依赖行为。计算参数选为铅球质量 $m=6\text{kg}$, 手臂长度 $l=0.6\text{m}$, 肩膀高度 $h=1.5\text{m}$, 而该参数组对应的最佳抛射角为 40.20° 。可以看到,随着抛射角的增加,抛射高度和抛射速度均单调减小,而射程则呈现先增大后减小的类抛物线行为。当抛射角偏离最佳抛射角为 $\pm 2^{\circ}$ 时,射程与最大射程相差约四厘米,而当抛射角偏离最佳抛射角为 $\pm 4^{\circ}$ 时,射程与最大射程相差约十厘米。从这一

点来看,抛射角对抛体运动射程有一定影响,但只要保持在最佳抛射角附近,则对射程的影响较小。

表 7 不同抛射角对抛射高度、抛射速度和射程的影响,其中计算参数选为铅球质量 $m=6\text{kg}$, 手臂长度 $l=0.6\text{m}$, 肩膀高度 $h=1.5\text{m}$

抛射角 /($^{\circ}$)	抛射高度 /m	抛射速度 /(m/s)	射程 /m
34.00	1.84	11.26	14.78
36.00	1.85	11.24	14.92
38.00	1.87	11.23	15.01
40.20	1.89	11.21	15.05
42.00	1.90	11.20	15.02
44.00	1.92	11.19	14.94

注:该参数组对应的最佳抛射角为 40.20° 。

3 结语

抛体运动规律与力学知识密切相关。本文对斜上抛运动进行数学建模,借助 Mathematica 软件及运用力学知识详细研究铅球运动中运动员输出能量、肩膀高度、手臂长度和抛射角如何影响铅球运动成绩的问题。如表 5 所示,理论计算结果与铅球运动员实际投掷数据的比较表明:在抛射高度和抛射速度均各自相同的前提下,铅球运动员的实际抛射角均偏离于理论计算得到的对应最佳抛射角,而运动员的实际投掷成绩也如预期的小于理论最大射程。更进一步,运动员实际抛射角偏离最佳抛射角越多,则运动员铅球成绩比理论最大射程小得越多;反之,则越接近理论最大射程。这说明理论计算的可靠性较高。得到如下主要结论:

(1) 抛射点高于落地点的斜抛运动,随着抛射速度的增大,最佳抛射角单调增加,但始终小于理想情形的 45° ;

(2) 运动员肩膀高度的差异对抛射速度的影响非常小,但对最大射程有一定影响,差别约为几十厘米,且肩膀高度越高,最佳抛射角越小而最大射程越大;

(3) 当运动员肩膀高度相同时,手臂长度的差别同样对铅球运动成绩的影响非常小,差别仅约为几厘米;

(4) 在抛体运动中,当抛射角偏离最佳抛射角 $\pm 2^{\circ}$ 时,实际射程比最大射程小约 4cm ,而当抛

射角偏离最佳抛射角 $\pm 4^\circ$ 时,实际射程比最大射程小约 10cm。

(5) 当抛射速度为 6.26~8.21m/s 时,对应的射程和最佳抛射角分别处在 6~9m 和 $31.48^\circ \sim 36.55^\circ$ 之间;当抛射速度为 9.81~11.19m/s 时,对应的射程和最佳抛射角分别处在 12~15m 和 $38.86^\circ \sim 40.18^\circ$ 范围内,而当抛射速度为 12.43~13.55m/s 时,对应的射程和最佳抛射角分别处在 18~21m 和 $41.03^\circ \sim 41.63^\circ$ 。

综上所述,影响铅球运动成绩的最主要因素是抛射速度的大小,其次是抛射角度和肩膀高度,最后是手臂长度。但是运动员在投掷铅球时,应该尽量结合技术特点使抛射角度处在最佳抛射角附近,而不能为了追求抛射速度而盲目降低抛射角度。本文研究结果对其他投掷类型运动,比如掷铁饼,也具有一定指导和借鉴意义。

参 考 文 献

- [1] 杜和平. 铅球运动项目发展的回顾与展望[J]. 井冈山学院学报(自然科学版), 2006, 27: 50-52.
DU H P. Retrospection and prospect of shot putting development[J]. Journal of Jinggangshan University(Natural Sciences), 2006, 27: 50-52. (in Chinese)
- [2] 蔡志东. 铅球最佳投掷角的精确方程及数值解[J]. 大学物理, 2005, 24(8): 16-18.
CAI Z D. The radiation law of tow types of particles in black-body radiation[J]. College Physics, 2005, 24(8): 16-18. (in Chinese)
- [3] 杨立志, 杨蒲英. 铅球的最佳抛射角是 45° 吗? —浅议优秀铅球运动员的真实最佳抛射角[J]. 物理教学, 2016, 38(1): 59-61.
YANG X Z, YANG P Y. Is the optimal throw angle for the shot put at 45° ? A brief discussion on the real optimal throw angle of excellent shot putter[J]. Physics Teaching, 2016, 38(1): 59-61. (in Chinese)
- [4] 董刚. 例谈铅球的最佳抛射角[J]. 中学物理, 2017, 35: 60-61.
DONG G. Discussion on the optimal throw angle of shot put [J]. Middle School Physics, 2017, 35: 60-61. (in Chinese)
- [5] 解晓娟, 李承家, 刘光宇. 投掷运动中手臂的数学建模[J]. 杭州电子科技大学学报, 2013, 33: 124-127.
XIE X J, LI C J, LIU G Y. The mathematical modeling of the arm in the throwing motion[J]. Journal of Hangzhou Dianzi University, 2013, 33: 124-127. (in Chinese)
- [6] 崔胜利, 秦雄. 世界优秀女子铅球选手技术动作生物力学分析——以 2017 年伦敦田径世锦赛女子铅球决赛为例[J]. 体育科学研究, 2019, 23: 56-62.
CUI S L, QIN X. Biomechanical analysis of the technical movements of the world's outstanding women shot putter—Take the women's shot put finals of the 2017 World athletics championships for an example[J]. Sports Science Research, 2019, 23: 56-62. (in Chinese)
- [7] 阳剑. 我国优秀男子铅球运动员推铅球技术动作的运动学研究[J]. 北京体育大学学报, 2010, 33: 55-58.
YANG J. The kinematical research of China's elite men shot putter about shot put technique[J]. Journal of Beijing Sport University, 2010, 33: 55-58. (in Chinese)
- [8] 李建臣, 冯国群, 陈强. 第 11 届全运会女子铅球冠、亚、季军推铅球技术三维运动学研究[J]. 首都体育学院学报, 2012, 24(5): 463-467.
LI J C, FENG G Q, CHEN Q. Three-dimensional kinematic mechanism research on women's shot put technique of medalist in the Jinan national games[J]. Journal of Capital University of Physical Education and Sports, 2012, 24(5): 463-467. (in Chinese)
- [9] 刘永浩. 背向滑步式掷铅球的三维运动学分析[J]. 西安工业大学学报, 2016, 36: 394-400.
LIU Y H. Three-dimensional kinematic analysis of back gliding shot Put[J]. Journal of Xi'an Technological University, 2016, 36: 394-400. (in Chinese)
- [10] 宗华敬. 中国优秀田径运动员技术图片选集[M]. 北京: 人民教育出版社, 2000: 285-294.
- [11] 蔡浩刚. 影响推铅球远度因素的生物力学分析[J]. 商丘师范学院学报, 2007, 23: 123-126.
CAI H G. Biomechanical researches on the influencing factors of the distance of shot putting[J]. Journal of Shangqiu Teachers College, 2007, 23: 123-126. (in Chinese)
- [12] 廖旭, 任学藻, 周自刚. 非理想抛体的最佳抛射角[J]. 大学物理, 2007, 26: 20-22.
LIAO X, REN X Z, ZHOU Z G. The best projecting angle of non-ideal projectile[J]. College Physics, 2007, 26: 20-22. (in Chinese)