

关于变形体虚功原理的若干认识

王国砚

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要 变形体虚功原理是变形体力学中的重要基本原理之一, 在结构力学、弹性力学等课程都有广泛应用, 但是关于其表述和理解在不同课程和不同文献并不完全一致。笔者分析了一些主要教科书和相关文献中的内容, 针对变形体虚功原理的两个核心问题: (1) 变形体与质点系之间的关系问题, (2) 内力虚功的定义和计算问题, 给出若干认识; 据此认为质点系虚功原理和变形体虚功原理是辩证统一的; 通过两个算例演示了本文的分析过程。希望本文的认识有助于深化对变形体虚功原理的理解, 并有助于形成从质点系到变形体的一致的虚功原理描述体系。

关键词 虚功原理; 虚位移原理; 质点系; 变形体; 内力虚功

SOME PERSPECTIVES TO THE PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK FOR DEFORMABLE BODIES

WANG Guoyan

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract The principle of virtual work for deformable bodies is one of the important fundamental principles in deformable body mechanics. It is widely used in the courses of structural mechanics, elasticity, and etc. However, the statement and the understanding of it are not consistent among different courses and different references. The relative context in some typical references were analyzed and some perspectives are given in this paper to the two essential problems related to the principle of virtual work for deformable bodies, that is: (1) the relationship between deformable bodies and particle systems, (2) the definition and calculation of the virtual work done by internal force. Based on the analysis of this paper, it can be concluded that there is a dialectical unification between the principle of virtual work for deformable bodies and the principle of virtual work for particle systems. Two examples are given to demonstrate the analysis processes in this paper. Hopefully the perspectives in this paper can help to deepen the understanding of the principle of virtual work for deformable bodies and form a consistent description for the principle of virtual work from particle systems to deformable bodies.

Key words principle of virtual work; principle of virtual displacement; particle systems; deformable body; virtual work done by internal force

收稿日期: 2021-08-31; 修回日期: 2021-10-07

作者简介: 王国砚, 男, 教授, 主要从事结构静动力学教学科研工作, 主要研究方向为结构动力学、结构风工程力学, gywang@tongji.edu.cn。

引文格式: 王国砚. 关于变形体虚功原理的若干认识[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 6-20.

Cite this article: WANG G Y. Some perspectives to the principle of virtual work for deformable bodies[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 6-20. (in Chinese)

变形体虚功原理是变形体力学中最基本、最重要的原理之一。理解变形体虚功原理及其成立的条件,是正确运用变形体虚功原理的基础。

正确理解变形体虚功原理涉及到原理表述和证明、变形体与质点系的关系、内力虚功等基本概念。从近期国内一些主要的结构力学和弹性力学教材以及相关文献来看,关于对变形体虚功原理的认识,针对以上各概念问题,还存在若干理解差异。出现对同一原理有不同理解的这种差异现象,从学术研究方面看有违力学学科的公理化情结,从教学实践方面看也增大了教学成本。因此,如何统一认识,正确理解变形体虚功原理,并形成从质点系到变形体的一致的虚功原理描述体系,是值得深入思考的课题。

本文通过对变形体虚功原理的溯源和对不同文献中虚功原理表述的梳理,针对与变形体虚功原理有关的两个核心问题——变形体与质点系之间的关系、内力虚功的定义和计算,给出作者的若干认识;在此基础上,认为质点系虚功原理和变形体虚功原理是辩证统一的;通过两个算例演示了本文的分析过程。希望能在厘清对变形体虚功原理中若干基本概念的理解、统一对虚功原理的认识、形成贯通一致的虚功原理描述体系等方面,起到抛砖引玉的作用。

1 虚功原理的溯源

关于虚功原理的认识,最早可追溯到公元前267—212年间^[1]。但一般认为,是在1717年,由约翰·伯努利系统性地提出了虚位移原理,只不过当时称为虚速度原理^[2,3]。拉格朗日也以虚速度原理的提法给出了虚位移原理的表述,“如果任何数目的物体或点的某个系统,在每个物体或点受到任何力的作用而处于平衡,如果给这个系统任何小的运动,结果每个点走过无限小路程,即发生虚速度,那么力与每个沿力方向产生的相应路径的乘积之和总等于零”^[2];在此基础上,拉格朗日针对约束质点系提出广义坐标描述法,并据此以质点系虚位移原理为出发点,结合达朗贝尔原理,建立了完整的分析力学体系^[2,3]。在今天我们谈论质点系虚位移原理时,一般都是以拉格朗日的表述为出发点的。大约在19世纪末到20世纪初,阿佩尔(P. T. Appell)又给出了看上去与拉格

朗日不太一样的虚位移原理表述,“系统平衡的充分必要条件是,对为约束允许的任何虚位移,直接作用力的虚功之和等于零”^[2]。阿佩尔的虚位移原理也是以虚速度原理的提法给出的,但将“直接作用力的虚功之和等于零”列为“系统平衡的充分必要条件”,相当于是以充分性和必要性命题的形式给出了虚位移原理。拉格朗日的虚位移原理只陈述了质点系处于平衡状态时其上的主动力虚功之和等于零的命题,因而它只相当于阿佩尔虚位移原理中的必要性命题。

在拉格朗日给出虚位移原理(或虚速度原理)的年代,之所以没有称之为虚功原理,是因为那时还没有功的概念,拉格朗日甚至将“力乘以虚位移”称为“虚力矩”(virtual moment);直到1829年,才由科里奥利(G. G. de Coriolis)将虚速度原理改称为虚功原理^[2,4]。这表明,今天我们所说的虚位移原理与虚功原理实际是一致的。只不过,在理论力学和分析力学领域,仍以称虚位移原理者居多;而在结构力学、弹性力学等领域,以称虚功原理者居多。

关于虚功原理的证明,文献[2]认为“虚位移原理可以不去证明”,其理由是原理无需证明。本文的看法是:(1)拉格朗日的虚位移原理表述中没有明确说“主动力在虚位移上的虚功之和等于零”是“系统处于平衡状态”的充要条件,它只是陈述了“质点系处于平衡状态时其上的主动力虚功之和等于零”这个客观事实(或如实记录了一个物理现象),因而具有公理属性,可不证明(但它是可得到证明的);(2)阿佩尔的虚位移原理表述中明确将“主动力在虚位移上的虚功之和等于零”列为“系统处于平衡状态”的充要条件,建立了这两个简单命题之间的“充要条件”关系,这就具有了定理的属性,因而需要证明。我们通常所说的虚位移原理(或虚功原理)的证明,一般是针对阿佩尔的虚位移原理表述而言的。

虚功原理的证明可分为必要性命题的证明和充分性命题的证明。一般来说,必要性命题的证明比较容易,它只需要从平衡条件出发推导出总虚功等于零的虚功方程即可;需满足的条件也比较弱,一般认为只需要系统受到理想约束即可。但是,充分性命题的证明相对比较困难,它不仅需要满足系统受到双面理想完整定常约束或双面理想非完整齐次约束等条件,还需排除一种称为“自然运动”^[5]的情形,本文对此的理解是:这要求系

统原处于(静力)平衡状态。充分性命题的证明一般采用反证法,即从假设“主动力在虚位移上的虚功之和等于零”但“系统不处于平衡状态”出发,最终推出矛盾的结果,从而使命题得证。文献[2]针对阿佩尔表述的虚位移原理充分性和必要性命题的证明,作了较详细的阐述。

关于虚功原理的表述及证明,涉及到质点系的性质以及与可变形连续体之间的关系问题,还涉及到内力虚功如何定义及计算的问题。因此,本文拟着重讨论这两个核心问题。

2 变形体与质点系之间的关系

目前,在国内有关的力学教材和学术著作中,关于可变形连续体(简称变形体)虚功原理的表述,有不同的观点。其中一个主要问题是,质点系虚位移原理(或虚功原理)能否直接运用于变形体。其核心的问题是,变形体可否被看作质点系——一种特殊的质点系。

有观点认为,变形体的虚功方程不可以直接由质点系虚功方程推导出,理由是:离散质点系和变形连续体这两种力学计算简图有本质的不同^[5]。也就是说,认为质点系是离散系统(甚至是由有限多质点组成的系统),而变形体是连续介质,两者本质不同。也有观点将质点系与刚体系划为一类体系,而将变形体划为另一类体系。

为搞清楚这个问题,笔者试图从历史和现状两方面进行认识。从质点系虚位移原理的发展历程看,拉格朗日在基于质点系虚位移原理建立以广义坐标为基础的分析力学后,并没有明确说质点系一定是离散的(甚至是有限质点的)系统,也没有明确说质点系虚位移原理一定不能应用于变形体。事实上,从文献[6]来看,拉格朗日当初就运用虚速度原理(即虚位移原理)来求解弦(string)、膜(membrane)等变形体的静动力学问题。而从文献[3]、文献[6]、文献[7]来看,早期的学者,如柯西、泊松等,都曾从分子模型(分子和分子力)的角度来分析变形体,使得能够将变形体看作质点系,从而应用拉格朗日的质点系虚速度原理解决问题。这表明,将变形体用质点系模型来分析,国外早已有之。根据文献[8],大约在1852年前后,Green和Haughton基于一系列假定,将拉格朗日的质点系虚速度原理从以分子模型描述

的方法发展为以应力-位移描述的方法,Rankine在他们的基础上进一步完善了该理论体系,从此将拉格朗日的虚速度原理应用到弹性理论中,这应该就是今天我们看到的变形体虚功原理表述方式的由来。文献[9]也是从质点系虚位移原理出发推导出弹性体的虚功方程,即

$$\delta \left[\int V_0 d\tau - \int (Xu + Yv + Zw) d\tau - \int (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) ds \right] = 0 \quad (1)$$

式中,方括弧内的第一个积分式代表应变能,第二、三个积分分别代表弹性体内体力和边界上面力的荷载势能。可以看出,式(1)与势能驻值原理的数学表达式一致,其前提是弹性体的应力和位移均为真实的。

文献[5]中将刚体视作一种特殊的质点系,即:由无限多质点组成,质点与质点之间由无穷小刚性约束联系。据此,笔者认为,既然刚体可以是一种特殊的质点系,那么至少有理由将弹性变形体也视作一种特殊的质点系,即:由无限多质点组成,质点与质点之间由无穷小弹性约束联系。事实上,文献[10]就采用这种“质点+无穷小弹簧+无穷小阻尼器”模型来描述平面梁结构,如图1所示。从文献[9]、文献[11]、文献[12]、文献[13]等的表述看,这些文献都认为变形体(甚至包括流体)可以看作质点系——一种特殊的质点系。

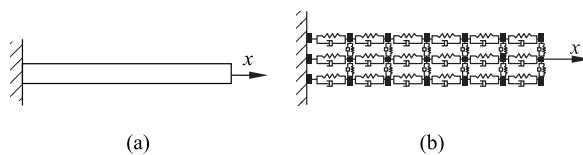


图1 文献[10]给出的梁模型
(a) 悬臂梁原型; (b) 质点系模型

文献[14]对连续介质的定义做了精辟的阐述。连续介质是由物质或材料构成的,描述连续介质的最基本的量是材料的质量密度,因此连续介质可以借助于质量密度进行定义。质量密度的经典定义是基于数学上的极限概念进行定义的,即

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n} \quad (2)$$

其中, ρ 代表密度, P 是连续介质区域内的任一点, V_n 是所选取的包括点 P 在内的任意小体积

(构成一个序列), 而 M_n 则是该体积内材料的质量, 如图 2 所示。如果密度在区域 V_0 内任意一点都能很好地定义(即极限(2)存在), 则这一区域内材料的质量被说成是连续分布的, 称此材料为连续介质。

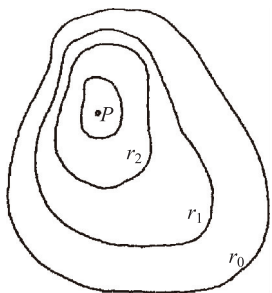


图2 文献[14]给出的连续介质经典定义示意图

这样的定义无疑是严密的, 且看上去与质点系概念似乎也确有不同。然而, 如果机械照搬这个定义, 则对于科学研究没有意义, 因为在现实世界中符合这种定义的连续介质实际上是不存在的。例如空气, 当体积 V_n 尺度缩小到小于空气分子自由程时, 就没有满足式(2)定义的空气存在了; 同样, 当 V_n 小于液体的原子尺度时, 也没有符合式(2)定义的液体; 等等。因此, 文献[14]认为, 连续介质在经典定义的框架内应允许材料粒子(material particles)是离散的, 它们之间应允许有空隙, 而不必像实数那样充满所占区域的实数空间。于是, 文献[14]又给出如下的质量密度定义: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, V_n 的极限趋于一个有限正数(a finite positive number) ω , 如果满足

$$\left| \rho - \frac{M_n}{V_n} \right| < \epsilon \quad (3)$$

则称比值 M_n/V_n 的序列在具有可接受可变性(an acceptable variability) ϵ 的意义上有极限 ρ , 量值 ρ 被称为在有限极限体积(a defining limit volume) ω 内具有可接受可变性 ϵ 的意义上点 P 处材料的密度。在能够清楚理解可接受可变性和有限极限长度、面积、体积的意义上, 如果在空间 V_0 内每一点的密度、动量、能量、应力、应变等都能被定义, 且是空间 V_0 内坐标的连续函数, 则称 V_0 内的材料是连续介质。本文认为, 文献[14]关于密度和连续介质定义的论述揭示了连续介质和质点系之间的辩证统一关系。

在理论力学和分析力学中, 由于不涉及连续

介质, 所以我们见到的质点一般都是离散的孤立质点, 最多是有限多质点通过弹簧(以及阻尼器)相互连接而构成包含弹性内力的质点系。但是, 在连续介质力学中, 质量被假定为连续分布; 因而, 如果假定其为质点系, 则应认为是有无限多质点通过无穷小弹簧(以及阻尼器)相互连接而成的特殊质点系。连续介质力学中最基本的分析对象是微元体。在三维直角坐标系中, 就是用平行于三个坐标平面的假象平面从弹性体内部截出来的体积为 dV 的微小六面体: $dV = dx dy dz$ (如果在边界上, 则可能是四面体), 如图 3 所示。其中 dx, dy, dz 均趋于零, 这样就符合连续介质经典定义的要求了。由于 dx, dy, dz 均趋于零, 所以基于微元体分析得出的力学性质就代表了连续介质内任一点的力学性质。在连续介质力学中, 就将该微元体假定为质点^[15]。但本文认为, 当分析该微元体本身时, 就不能认为它仅仅是一个质点, 而应认为它是内部仍包含无限多质点的质点系。

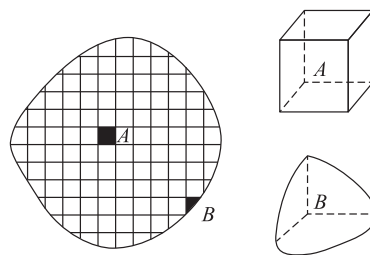


图3 弹性体中微元体示意图^[16]

本文认为, 这样的理解并不矛盾。事实上, 在理论力学和分析力学中, 质点和质点系也是相对的。比如地球, 当放在宇宙范围内分析时可将其当作一个质点看待, 而当研究地球本身时又可将其当作质点系看待。同样, 在连续介质力学中, 当研究连续介质整体(变形体)时可假定微元体为质点, 而当研究微元体本身时, 完全可以将其假定为质点系。

通过学习理论力学可知, 牛顿力学的最基本出发点是质点和质点系, 甚至可以说整个牛顿力学都是建立在质点和质点系基础上的。如果将变形体与质点系截然区别开来, 那么变形体的力学分析也就失去了牛顿力学基础。事实上, 我们常见的变形体力学分析的出发点仍然是牛顿力学的基本原理。

据此, 笔者的认识是: (1) 质点系是一种抽象

的力学模型,对于刚体和变形体,甚至对流体,都适用;(2) 变形体与质点系应该不矛盾,基于广义坐标描述的质点系位移与基于连续函数描述的变形体位移也应不矛盾;(3) 变形体(至少是常见的弹性变形体)应可看作质点系——一种特殊的质点系(由无限多质点组成,质点与质点之间由无穷小弹簧约束联系)。从而,基于质点系建立的虚位移原理或虚功原理等,均可直接运用于变形体。

3 关于变形体虚功原理的表述:内力虚功、虚应变能及其他

从一些主要的弹性力学和结构力学教材看,关于变形体虚功原理的表述,经历了一些变化,也形成了目前不太统一的表述体系。

除上面所说的质点系虚功原理能否直接运用于变形体的问题外,另一个核心问题是,变形体内力虚功可否定义? 如何定义? 有观点认为,变形体内力是不可见的,内力虚功更是无从定义,所以变形体内的虚功只能表述为“变形体所接受的虚变形功”;但也有文献仍然沿用外力虚功和内力虚功的提法表述虚功原理。此外,变形体虚功原理还涉及到可能位移和虚位移、可能应力和虚应力,以及它们在虚功原理中表述中的反映等。

下面对一些常见的弹性力学和结构力学教材中关于变形体虚功原理的表述作一番梳理。

3.1 弹性力学教材中的表述

文献[17]对虚功原理的表述是,“设一弹性体在已知的体力和面力的作用下平衡。若这弹性体的位移增加一个微小的一部,则外力便要由于这些微小的位移(虚位移)而做功。这些功就等于应变能的增加部分”。可见,文献[17]针对弹性体给出虚功原理,且认为虚位移是弹性体位移的微小变化(笔者理解为变分)。所以,文献[17]认为“虚功原理只是最小势能原理的一种物理解释”。另外,文献[17]未提及弹性体内力做虚功,而是认为外力在虚位移上做功等于弹性体应变能增加部分(笔者理解为虚应变能)。

文献[12]中虚功原理的表述是,“假如一个连续变形体处于平衡状态,则其外力与内力在任意虚位移上的总虚功等于零。或者叙述为,若对一个连续变形体所有外力与内力在任意虚位移上的总虚功等于零,则该变形体必处于平衡状态”。可

见,文献[12]是针对连续变形体给出的虚功原理,且相当于认为“变形体所有外力与内力在任意虚位移上的总虚功等于零”是其处于平衡状态的充分必要条件。此外文献[12]认为,“内力虚功与应力在虚应变上所作的功恰恰差一个符号”,但未给出“差一个符号”的缘由和物理解释。从文献[18]对虚功原理的表述和讨论中看出,文献[18]和文献[12]的表述看上去是一致的,但文献[18]认为“内力所作的虚功等于外力对满足给定的几何边界条件的任意无限小虚位移所作的虚功”,即表述为内力虚功等于外力虚功。

文献[16]中弹性体虚功原理的表述是,“在弹性体上,外力在任意一组几何可能位移上作的功,等于任意一组静力可能的应力在与上述几何可能位移所对应的应变上所作的功”。可见,文献[16]在针对弹性体给出虚功原理时,引入了几何可能位移和应变、静力可能应力等概念;采用了应力在应变上作功的提法,但未提“内力虚功”的问题。并且认为,当取真实应力为静力可能应力时,可由虚功原理导出弹性体的虚位移原理和最小势能原理。

文献[19]中关于弹性力学虚功原理的表述与文献[16]应该是相同的,并且作者认为虚功原理是弹性力学中各种能量原理和能量方法的核心、由此原理可以导出虚位移原理和虚应力原理^[20]。笔者的理解是,文献[20]的观点相当于认为虚功原理与虚位移原理不完全一致,前者包含了虚应力原理。但应注意的是,文献[20]所说的虚应力原理与文献[12]等所说的虚力原理应该是不完全相同的,前者只涉及虚应力,而后的虚力包含所有力。

文献[21]将按静力可能应力在几何可能位移上作功定义的原理称作“可能功原理”,而不是“虚功原理”;将“应力功的负值”称为“内力功”;给出基于“外力虚功与内力虚功之和为零”表述的可能功方程。并且,文献[21]对内力在虚变形上的虚功和应力在虚应变上的应力功之间的关系(即相差一个负号)做了阐述。笔者的理解是,文献[21]试图将虚功原理与可能功原理区分开来。笔者赞同这种提法。事实上,文献[19]给出的虚功原理似也可称为可能功原理,用可能功原理导出虚位移原理和虚应力原理。这样一来,也就不矛盾了。

铁摩辛柯(S. Timoshenko)是国际著名力学家之一,因此有必要研究一下他给出的虚功原理表述。他在1970年出版的《Theory of Elastic-

ity》^[9]中给出的虚功原理表述是“An elastic body at rest, with its surface and body forces, constitutes a system of particles on each of which acts a set of forces in equilibrium. In any virtual displacement the total work done by the forces on any particle vanishes, and therefore the total work done by all the forces of the system vanishes.”。由此可见,铁摩辛柯也认为弹性体是一种质点系,且直接将质点系虚位移原理应用于弹性体。不仅如此,他在给出式(1)表达的虚功方程后认为,“As already stated, this change in strain energy measures the work done against the mutual forces between the particles (as in stretching springs). To get the work done by the mutual forces on the particles, the sign must be reversed”,即认为内力虚功应取负号;并且作者认为在一定条件下可由虚功原理导出势能驻值原理(见式(1))。这样看来,文献[9]与文献[12]、文献[21]等的观点都是一致的,与文献[17]的观点也一致。

然而,铁摩辛柯等在1972年出版的《Mechanics of Materials》^[22]中却将虚功原理表述为“如果对荷载系作用下处于平衡的变形结构给一微小的虚位移,那么由于外力(或荷载)所做的虚功等于内力(或应力合力)所做的虚功”。在该书中,仍是将质点系虚功原理推广到变形体,但虚功原理的表述却有所改变。虽然仍沿用“内力所做的虚功”的提法,但认为内力虚功就是应力合力虚功,并未提及符号的差别。

这或许就是文献[5],文献[23],文献[24]等认为目前在变形体虚功原理的内力虚功定义方面存在“混乱”的缘故吧。可以认为,文献[21]是接受了文献[9]的观点,而没有接受文献[22]的观点。笔者也认为,铁摩辛柯在文献[9]中从质点系虚位移原理出发建立的弹性体虚功原理是合理的和令人信服的。至于为什么铁摩辛柯在如此短的时间间隔内给出两种看上去如此差别的虚功原理表述,有待进一步考证。

归纳一下,从本文列出的弹性力学文献中给出的虚功原理表述看,弹性力学中的虚功原理概念基本上是一致的,但有以下值得注意的问题:

(1) 关于虚位移和几何可能位移:文献[17]认为虚位移是在弹性体处于平衡时的位移状态(在固定时刻)的微小增量(笔者理解为变分);文献[21]

只提到可能位移,未提虚位移,将虚功原理称为可能功原理;文献[16]给出了可能位移(u_i^k)与真实位移(u_i)、虚位移(δu_i)之间的关系,即 $u_i^k = u_i + \delta u_i$ 。笔者的问题是:可能位移是否也是一种虚位移?力在可能位移上作功是否也是虚功?笔者对此的理解是:力在可能位移上作功可以理解为是虚功,因为它符合虚功的概念;但可能位移未必是虚位移,只有在一定条件下才可能是。此外,不论是虚位移还是可能位移,均需为约束所容许,且应在弹性体内满足几何方程和变形协调条件。

(2) 关于静力可能应力:从文献[16]等给出的静力可能应力的定义看,除应满足平衡方程外,它也具有任意性,因而也是可变的。正因为如此,弹性力学(包括结构力学)中关于虚功原理的表述呈现出了多样性。在文献[17]给出虚功原理中,可认为力是真实的、仅位移可变分,因而相当于一类变量的变分原理;在文献[19]等给出的虚功原理或可能功原理中,可认为力和位移都可变分,因而相当于是两类变量的广义变分原理。文献[19]甚至给出了三类变量的广义变分原理。但本文不对更广泛的变分原理展开讨论。

(3) 关于内力虚功:以上文献的虚功原理表述中涉及到内力作功、应力作功、虚应变能等。文献[17]未提内力或应力作功,只说外力作功被转化为弹性体内的虚应变能。笔者认为这种表述无疑是合理的,因为它符合物理学中的一般概念。文献[12]和文献[21]都采用了弹性体内的内力可以作功、且内力虚功为内力与虚变形乘积的负值的提法。这种内力虚功定义无疑也是合理的,毕竟,当将真实位移当作虚位移时,它也与物理学中的一般概念(或理论力学中关于内力作功及与势能之间关系的概念)相吻合。并且笔者认为,文献[12],文献[21]的提法与文献[17]的提法并不矛盾。因为,在真实位移的条件下,弹性体内的应变能在数值上等于内力做功,但符号相反^[11]。文献[9],文献[12],文献[16],文献[18],文献[19],文献[21],文献[22]等都将内力虚功定义为应力在虚应变上所做的功(笔者认为应该是其积分),只不过文献[9],文献[21]针对内力虚功和应力做功之间的关系做了具体说明(指出了符号差别及其意义)。

(4) 在所列出的关于弹性力学虚功原理的文献中,文献[12],文献[18],文献[25],文献[26],文

献[27]给出了虚功原理和余虚功原理的必要性和充分性命题及论证,其余大部分文献只给出了虚功原理(包括可能功原理)的必要性命题及论证。

3.2 结构力学教材中的表述

在我国较早期的结构力学教材中,如文献[13]、文献[28],将质点系虚位移原理直接推广至变形体,将变形体虚功原理表述为“变形体系处于平衡的必要和充分条件是:对于任意微小虚位移,外力所做的虚功 T 与内力所做的虚功 V 之和为零”(即 $T+V=0$),且也将内力虚功定义为内力与虚变形乘积的负值。可见,这些表述与文献[9]、文献[12]、文献[21]等的表述一致。

然而,从目前的结构力学教材看,关于虚功原理的表述却出现了一些变化。有些教材,如文献[29]等,将变形体虚功原理表述为“任何一个处于平衡状态的变形体,当发生任意一个虚位移时,变形体所受外力在虚位移时所作的总虚功 δW_e ,恒等于变形体所接受的总虚变形功 δW_i ”。可以看出,这里表述与之前有两点变化:(1)不再提“充要条件”,认为虚功原理只可以表述为必要性命题;(2)不再提“内力虚功”和“虚应变能”,而是表述为“变形体所接受的虚变形功”。笔者的问题是:“变形体所接受的虚变形功”是由谁作的功?按一般的物理概念,作功总得有作功的主体,这个主体应该是力。如果只提“接受的功”,而不提作功的主体——内力,似容易令人费解。

文献[30]的虚功原理表述是“设变形体在力系作用下处于平衡状态,又设变形体由于其他原因产生符合约束条件的微小连续变形,则外力在位移上所作外虚功 W 恒等于各个微段的应力合力在变形上所作的内虚功 W_i ”(即 $W=W_i$)。可见,在文献[30]的表述中也未提“充要条件”;虽然提及“应力合力在变形上作内虚功”,但未明确提及内力虚功问题,也未提及符号问题。可以认为,文献[30]的表述与文献[22]的表述比较相似。

文献[31]的虚功原理表述是:“在变形体系上,如果力状态中的力系能满足平衡条件,位移状态中的应变能(笔者注:此处的“能”是动词)满足变形协调条件(包括位移与应变的协调和位移与约束几何相容),则外力虚功等于虚应变能”。可见,在文献[31]的表述中也未提“充要条件”,且相当于是也采用了可能位移和可能力系的表述方法;此外,认为外力在虚位移上所作虚功等于变形体内

的虚应变能,即虚功方程为“ $W=V$ 或 $W-V=0$ ”。其中, W 是外力虚功, V 是虚应变能(笔者将 $-V$ 理解为内力虚功)。

由此可见,在国内目前的结构力学教材中,关于变形体虚功原理的表述呈现出某些多样性。之所以出现这些变化和多样性,笔者认为,这与文献[5]、文献[23]、文献[24]、文献[29]等的观点有关。

4 关于变形体虚功原理的证明方法

由于上述变形体虚功原理的表述各有不同,所以与各种表述对应的虚功原理证明方法也有所不同。但笔者认为,其证明方法可大致归纳为以下两种:(1)直接从质点系虚位移原理出发,进行推导;(2)根据变形体特点,从变形体虚功计算两种途径的一致性出发,进行推导。主要问题是如何理解内力虚功及其定义。

4.1 直接从质点系虚位移原理出发进行推导

既然在分析力学中已经证明了质点系虚功原理,而变形体又可看作是一种特殊的质点系,因而在此基础上证明变形体虚功原理时,只需仿照在质点系中的做法即可。但在具体推导时采用微元体分析法,利用积分和积分变换等方法进行推导。常见的弹性力学教材(如文献[9],文献[12],文献[16],文献[17],文献[19],文献[21])和部分结构力学教材(如文献[13],文献[28],文献[30],文献[31]),采用的都是这种方法。只不过,在计算内力虚功时,不同教材有所不同。笔者以文献[12]为例,简述如下。

在满足弹性力学基本假定的前提下,用假想截面从弹性体中的任意一点处取出体积为 $dv = dx dy dz$ 的微元体,列出其静力平衡微分方程;给弹性体一个虚位移(如 $\delta u, \delta v, \delta w$),使得弹性体有相应的虚变形(即有虚应变);视微元体为质点,将 $\delta u, \delta v, \delta w$ 视为该质点的虚位移,将微元体的平衡微分方程乘以相应的虚位移,得到微元体(视为质点)的虚功方程;对弹性体积分,得到弹性体(视为质点系)的虚功方程;再利用高斯公式等积分变换,最终可以得到用“外力虚功与内力虚功之和等于零”的形式表达的虚功方程,从而使原理的必要性命题得证。反之,从最终的虚功方程出发,也可反推出微元体的平衡微分方程和边界条件,从而使原理的充分性命题得证。详细推导过程可参见文献[12],文献[27]等,本文不作过多展开。

在这种推导中,各教材的不同点在于对内力虚功的认定,关键点在于微元体上应力究竟是该看作内力还是外力。有观点认为应力是一种内力,也有观点认为当它被用假想截面从弹性体中隔离出来后就应看作是外力了。从而导致有些观点认为应力在虚位移(或虚应变)上所作虚功就是内力虚功,有些观点认为其负值才是内力虚功。

4.2 从变形体虚功计算两种途径的一致性出发进行推导

不从质点系虚位移原理出发,而是直接分析变形体的虚功,只证明变形体虚功原理中的必要性命题。这种方法主要出现在一些结构力学教材中,以杆件结构(或以一般变形体)为研究对象、也采用微段(或微元体)分析法,但是从变形体虚功计算两种途径的一致性出发进行推导。笔者以文献[32]为例,简述如下。

先以单根杆件为研究对象,在满足结构力学基本假定的前提下,用假想截面从杆中截出任意一个微段作为隔离体;做受力分析,将该微段上的受力分为“切割面内力”(即用假想截面将各内力暴露出来,看作是“外力”)和实际外力(在结构力学中已无“体力”和“面力”的概念);给该杆件一个虚位移(包括刚体虚位移和变形虚位移);分别从以下两种途径计算微段上的外力和切割面内力在相应的虚位移上所作虚功:

(1) 第一种途径是将变形体的总虚功(δW)视为外力所作虚功(δW_e)与所有切割面内力所作虚功($\delta W_{内}$)之和,即 $\delta W = \delta W_e + \delta W_{内}$ 。由于每一个截面两侧暴露出来的切割面内力互为作用力和反作用力,它们总是大小相等方向相反,而所经历的虚位移却相同,因此它们所作的虚功恒相互抵消,其和为零,即 $\delta W_{内} = 0$ 。于是,整个杆件上的虚功便等于外力虚功,即 $\delta W = \delta W_e$ 。

(2) 第二种途径是将杆件上各微段的虚位移分解为刚体虚位移和变形虚位移两部分,而总虚功(δW)可视为作用于各微段上的所有力在刚体虚位移上所作虚功($\delta W_{刚}$)与在变形虚位移上所作虚功(δW_i)之和,即 $\delta W = \delta W_{刚} + \delta W_i$ 。由于各微段上的所有力均处于平衡状态,故由刚体体系的虚功原理可知,所有力(将切割面内力也看作是外力)在刚体虚位移上所作虚功之和等于零,即 $\delta W_{刚} = 0$ 。于是,就有 $\delta W = \delta W_i$ 。

由于变形体的总虚功(δW)是一定的,不应随

计算途径的不同而改变,于是可得该杆件的虚功方程—— $\delta W_e = \delta W_i$ 。在此基础上,不难将单根杆件的虚功方程推广至杆系结构的虚功方程;其形式仍不变,但 δW_e 和 δW_i 都是杆系结构的总虚功。问题是,在这里 δW_i 应该称为什么?按文献[5],文献[23],文献[24],文献[29]等的观点,应称为“变形体所接受的虚变形功”。 δW_i 应该如何计算?从文献[32]给出的算式看,还是用杆件各内力(弯矩、剪力、轴力等)在各自相应的变形虚位移(或虚变形)上所作虚功计算的,只不过不称其为“内力虚功”。

由此可见,国内常见弹性力学和结构力学教材在推导变形体虚功方程时,主要分歧点之一在于对变形体内力虚功的认定和计算上。笔者认为,目前常见的虚功方程推导过程有一个共同问题:未涉及微元体或杆件微段的内部。微元体或微段的内部是什么?有何相互作用?笔者的认识是,如果将微元体或微段仍作为质点系看待,那么其内仍应看作是由无限多质点组成,其内仍应存在相互约束力,即内力。因此,如果能够接受变形体也属于质点系(一种特殊质点系)的观点,将质点系虚位移原理(或虚功原理)运用于变形体,包括微元体或微段,则可以较容易地推导出变形体虚功方程,且可给出符合一般物理意义的内力虚功定义(即内力虚功等于内力在虚变形上所作虚功的负值)。

然而,有观点认为,弹性力学中虽然利用微元体建立了应力和应变等概念,推导了平衡微分方程,但实际上表达的是弹性体内任一点的应力应变状态和平衡微分方程。对此,笔者认为,弹性力学中的“点”和分析力学中的“质点”应该不完全等同。根据本文前面对变形体中质点的理解,弹性力学中的“点”应理解为是在微元体的体积(或几何尺度)趋近于零的条件下收缩成为一点,但不能说这个点就一定只包含一个质点。因此,即使对于弹性力学意义上的“点”,也可理解为其内含有无限多质点的质点系(即变形体是一种特殊的质点系),也可运用质点系虚功原理。

5 算例

为了深化对变形体虚功原理的理解,本文用两个算例演示虚功方程的推导过程、内力虚功计

算的特点等。其中,第一个例子是受弹簧(包括刚性链杆)连接的质点系,用于演示对质点系虚功原理的理解;第二个例子是受轴向荷载的弹性杆件,用于演示对变形体虚功原理的理解。但第一个例子对第二个例子有支撑作用。

例题 1 设图 4(a)所示为四质点“弹簧-质量振子”系统,各弹簧均为线弹性弹簧,但其中第二个弹簧刚度为无穷大(即为刚性链杆)。试基于质点系虚功原理建立该系统的虚功方程。

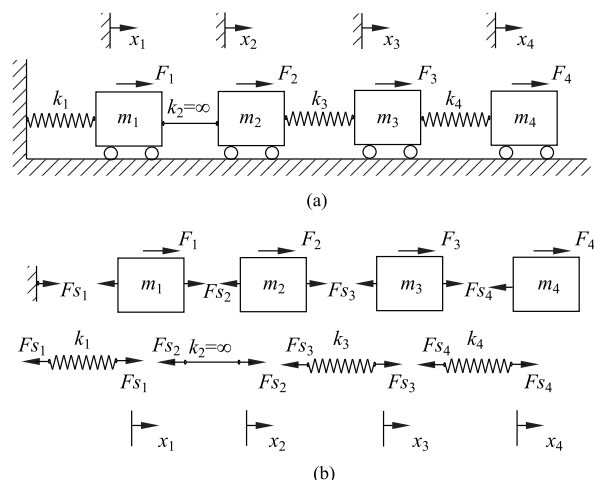


图 4 例题 1 的计算模型
(a) 计算简图; (b) 隔离体受力图

本文希望通过本例演示根据质点系虚功原理推导基于内、外力表达的虚功方程的过程,以及内部弹性约束力和刚性约束力所作虚功的特点等。

解法一:

1) 选择广义坐标,建立坐标系

显然,确定该系统的位置(也是位移)需要四个坐标,即 $x_i (i=1\sim 4)$,其中 $x_1=x_2$,所以只有三个独立坐标。选择独立坐标 $x_i (i=2\sim 4)$ 为广义坐标(x_1 为多余坐标),坐标系如图 4(a)所示,坐标原点位于各质点的平衡位置,也是各弹簧无变形的自然位置。

设系统在 $x_1=x_2, x_3, x_4$ 位置处于平衡状态。

2) 采用隔离体法分析各质点上的作用力

设各质点所受外力大小为 $F_1\sim F_4$,方向如图 4 所示。

各质点所受内力可根据各弹簧的变形量(或弹簧两端位移)按下式计算

$$F_{s1} = K_1 \Delta_1 = K_1 x_1,$$

$$F_{s2} = K_2 \Delta_2 = K_2 (x_2 - x_1),$$

$$F_{s3} = K_3 \Delta_3 = K_3 (x_3 - x_2), \quad (a)$$

$$F_{s4} = K_4 \Delta_4 = K_4 (x_4 - x_3)$$

其中, Δ_i 是弹簧 i 的变形量,但 $\Delta_2=0$ 。不失一般性,这里可暂且假定各弹簧(包括刚性链杆)内的作用力(即内力)均为拉力,如图 4(b)所示。

几点注意:(1) 虽然弹簧 2 的刚度 K_2 为无穷大,但变形量 Δ_2 为零,所以其两端的力 F_{s2} 仍可以为有限值;(2) 如果设弹簧 1 左端(与固定端联接)的位移为 $x_0=0$,则各弹簧(包括刚性链杆)的内力可写成: $F_{si} = K_i \Delta_i = K_i (x_i - x_{i-1}), i=1\sim 4$;(3) 式(a)表示,该质点系处于平衡状态时的内力和位移都是真实的,他们之间服从虎克定律。

3) 设虚位移

设系统内各质点在真实位移 $x_1=x_2, x_3, x_4$ 附近分别产生虚位移 $\delta x_i (i=1\sim 4)$,其中 $\delta x_1 = \delta x_2$ 。设各虚位移 δx_i 的正方向与位移 x_i 的正方向一致。由此可得: $\delta \Delta_i = (\delta x_i - \delta x_{i-1}), i=1\sim 4$ 。其中, $\delta x_0=0, \delta \Delta_2=0$ 。 $\delta \Delta_i$ 可理解为是各弹簧(包括刚性链杆)因两端点虚位移而产生的虚变形。

需要注意的是,根据等时变分的概念,此时可以理解为是将时间“凝固”来看待虚位移。所以,尽管将虚位移理解为真实位移的变分(代表在其附近的任意微小变化),但系统原处于平衡状态时的外力、内力和位移等均不因此而改变。

4) 计算虚功

计算各质点上的所有力在各自虚位移上的虚功,有

① 外力虚功

$$\delta W_{i外} = F_i \delta x_i, \quad i=1\sim 4 \quad (b)$$

② 内力虚功:注意到各质点上内力的假定方向和质点虚位移的假定方向,内力虚功可按下式计算

$$\begin{aligned} \delta W_{1内} &= -F_{s1} \delta x_1 + F_{s2} \delta x_1, \\ \delta W_{2内} &= -F_{s2} \delta x_2 + F_{s3} \delta x_2, \\ \delta W_{3内} &= -F_{s3} \delta x_3 + F_{s4} \delta x_3, \\ \delta W_{4内} &= -F_{s4} \delta x_4 \end{aligned} \quad (c)$$

相应地,该系统的外力与内力虚功之和分别为

$$\delta W_{外} = \sum_{i=1}^4 \delta W_{i外} = \sum_{i=1}^4 F_i \delta x_i \quad (d)$$

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{内}} &= \sum_{i=1}^4 \delta W_{i\text{内}} = - \sum_{i=1}^4 F_{si} (\delta x_i - \delta x_{i-1}) \\ &= - \sum_{i=1}^4 F_{si} \delta \Delta_i \\ &= -F_{s1} \delta \Delta_1 - F_{s3} \delta \Delta_3 - F_{s4} \delta \Delta_4 \quad (\text{e})\end{aligned}$$

注意到,由于质点1和质点2之间为刚性约束, $\delta \Delta_2=0$,所以其约束力 F_{s2} 所作的虚功为零。因此,从这里可以看出,各质点之间的相互约束力(即内力)在刚性虚位移上所作的虚功之和为零,而在虚变形上所作虚功一般不为零。此外还可看出,式(e)给出的内力虚功 $\delta W_{\text{内}}$ 是内力与虚变形乘积的负值。

5) 建立虚功方程

根据文献[5]给出的质点系虚功原理表述,有

$$\delta W_{\text{外}} + \delta W_{\text{内}} = 0 \quad (\text{f})$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^4 F_{si} \delta \Delta_i &= 0, \\ \text{或} \sum_{i=1}^4 F_i \delta x_i - F_{s1} \delta \Delta_1 - F_{s3} \delta \Delta_3 - F_{s4} \delta \Delta_4 &= 0\end{aligned} \quad (\text{4})$$

这就是该系统的虚功方程。但应注意到,在建立该方程时,并未用到式(a)。这表明,至此,做功的力与虚位移可以是无关的。但是,当在式(4)中引入式(a)时,将得到下面的关系。

6) 虚功原理与势能驻值原理的关系

根据题设的线性弹簧假定和变分法则,现将式(a)代入式(4),可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^4 \delta \left(\frac{1}{2} K_i \Delta_i^2 \right) \\ = \sum_{i=1}^4 F_i \delta x_i - \delta \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} K_i \Delta_i^2 \right) = 0\end{aligned} \quad (\text{g})$$

也可写成

$$\begin{aligned}\delta \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} K_i \Delta_i^2 \right) - \delta \left(\sum_{i=1}^4 F_i x_i \right) \\ = \delta \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} K_i \Delta_i^2 - \sum_{i=1}^4 F_i x_i \right) = 0\end{aligned} \quad (\text{h})$$

令

$$U = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} K_i \Delta_i^2, \quad E_P = - \sum_{i=1}^4 F_i x_i, \quad E = U + E_P \quad (\text{i})$$

其中, U 是系统的势能,即系统因真实变形而储存的弹性变形能; E_P 在弹性力学等教材中被称为荷

载势能,即外力(主动力,视为常力)在系统真实位移上所作功的负值; E 则是系统的总机械能^[12]。于是,由式(g)可得

$$\delta W_{\text{外}} = \delta U \quad (\text{j})$$

其中, δU 是系统弹性变形能的变分,即其增量^[17],可理解为系统由于虚变形而产生的虚变形能。进而,由式(9)又可得

$$\delta U = - \delta W_{\text{内}} \quad (\text{k})$$

这又可以理解为,系统虚变形能在数值上等于内力虚功,但符号相反。由式(12)可得

$$\delta(U + E_P) = \delta E = 0 \quad (\text{5})$$

这是势能驻值原理的数学表达式。

7) 讨论

由该算例可以看出以下三点:

(1) 在以外力和内力表达的虚功方程中,刚性约束上的内力在刚体虚位移上所作的虚功之和为零;而弹性约束上的内力仅在虚变形上作虚功,且等于内力与虚变形乘积的相反数(即负值)。注意到,根据虚位移的概念,实位移也可以是虚位移之一^[2,11]。所以,当将实位移当作虚位移时,这里的结果也可与理论力学中针对弹簧给出的弹性力做功与弹性势能之间的关系(即相差一个负号)^[11]保持一致了。

(2) 从式(j)和式(k)看出,对于弹性变形系统而言,虚功原理中的虚功和虚变形能之间的关系可以理解为是:外力对系统所作的虚功全部转化为系统所接受的虚变形能;系统的虚变形能在数值上等于内力虚功,但符号相反。当然,这个结论只适用于弹性变形系统在外力作用下从未变形到变形的过程,且应在系统没有其他能量损耗的前提下才能成立。

(3) 式(5)告诉我们,对于弹性变形系统而言,在一定条件下由虚功原理可以推导出势能驻值原理。事实上,可以认为,文献[17]说“虚功原理只是最小势能原理的另一种物理解释”,就是这个意思;文献[12]、文献[16]在“取真实应力为静力可能应力”的前提下也给出与文献[17]同样的结果。

以上三点结论虽然是基于本文算例得出,但应具有一般性。即使针对三维空间中的一般弹性变形系统,不论是离散质量系统还是连续分布质量系统,其结论都应适用。

解法二:

下面再从另一角度建立本例系统的虚功方

程,以便与下面第二个例子中针对变形体虚功原理展开讨论时进行对照。

在上面的推导过程中,计算虚功时的着眼点只放在各质点上,并没有考虑弹簧。但也有观点认为,弹簧的内力虚功也应考虑。为此,本文再按此方法推导本例系统的虚功方程。

当将弹簧(包括刚性链杆)也看作系统内的一部分时,可以看出,采用隔离体法用假想截面截开弹簧(包括刚性链杆)和质点的联系时,这些截面上原来的内力就暴露出来,成为“外力”了(可称之为“切割面内力”^[5]),如图4(b)所示。那么,在统计系统的外力虚功时,就应该将这些“外力”在各虚位移上的虚功也统计进来。然而,这些“外力”是大小相等、方向相反且作用在同一直线上的(互为作用力与反作用力),而它们经历的却是相同虚位移。所以,这部分“外力”的虚功之和为零,系统的外力所作虚功之和仍为式(d)所给出。

再看弹簧(包括刚性链杆),如图4(b)所示。可见,被隔离出来的它们也都是一个质点系,只不过弹簧质量被忽略了,仅保留了弹性恢复力,而弹性恢复力为内力。如果将第*i*个弹簧看作一个质点系,则弹簧两端被假想截面截出来的力 F_{si} 和 $F_{s(i-1)}$ 可看作“外力”,而弹簧内没有被截出来的力可仍被看作内力(注意,由于弹簧两端 F_{si} 和 $F_{s(i-1)}$ 大小相等,所以在图4(b)中都写成 F_{si} 了)。将文献[5]基于内、外力的质点系虚功原理运用于第*i*个弹簧,有

$$\delta W_{\text{外}}^{(i)} + \delta W_{\text{内}}^{(i)} = 0 \quad (1)$$

其中, $\delta W_{\text{外}}^{(i)}$ 为 F_{si} 和 $F_{s(i-1)}$ 在各自虚位移 δx_i 和 δx_{i-1} 上所作的虚功之和。注意到, $F_{si} = F_{s(i-1)}$ (指大小相等)。所以,有

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{外}}^{(i)} &= -F_{s(i-1)} \delta x_{i-1} + F_{si} \delta x_i \\ &= F_{si} (\delta x_i - \delta x_{i-1}) \end{aligned} \quad (m)$$

于是,由上述虚功方程(1)可得

$$\delta W_{\text{内}}^{(i)} = -\delta W_{\text{外}}^{(i)} = -F_{si} (\delta x_i - \delta x_{i-1}) = -F_{si} \delta \Delta_i \quad (n)$$

注意对第二个弹簧(实为刚性链杆)有: $\delta W_{\text{内}}^{(2)} = -\delta W_{\text{外}}^{(2)} = -F_{s2} (\delta x_2 - \delta x_1) = -F_{s2} \delta \Delta_2 = 0$ 。可见,只有弹簧内力虚功不为零,且为力与虚变形乘积的负值,而刚性链杆的内力虚功为零。

于是,各弹簧(包括刚性链杆)的内力虚功之和仍如式(e)所示。该系统的总虚功方程仍如

式(4)所示。这表明,不论用何种方法推导,只要遵循质点系虚功原理的基本概念,所得到的质点系虚功方程应该是一致的。

例题2 设图5所示的长度为*l*、横截面面积为*A*、轴向刚度为*EA*(*E*为弹性模量)的等截面匀质线弹性直杆放置在光滑无摩擦的水平面上,*O*端固定在墙面上,沿横向受到双面约束,使得杆件只能沿轴向产生位移和变形,且假设位移和变形是微小的;设杆件沿杆长受到轴向分布外力 $p(x)$,在*B*端受到轴向集中外力*P*作用。试分别从质点系计算模型和变形体计算模型出发,建立该杆的虚功方程。

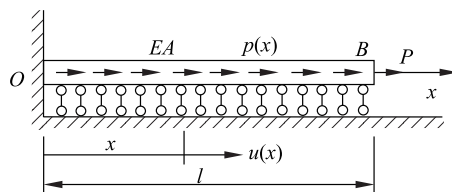


图5 例题2的一维杆件示意图

解法一 从质点系计算模型出发,建立该杆的虚功方程:将该杆件近似为由*N*个质点受弹簧约束所组成的质点系,即类似于例题1的“弹簧-质量振子”模型,但 $N \rightarrow \infty$;采用与建立质点系虚功方程相同的思路和求解方法。

解:

(1) 计算简图和坐标系:设该杆可用图6(a)所示的计算简图表示,坐标系如图5所示,坐标原点位于杆自然未变形的原始位形。各弹簧的刚度为 $k_i = k = EA/l$ 。在外力作用下,杆内存在轴向应力 $\sigma(x)$,在平截面假定下可得内力 $N(x) = \sigma(x)A$,该内力可等效为各弹簧内的拉力 $F_s(x)$ 。

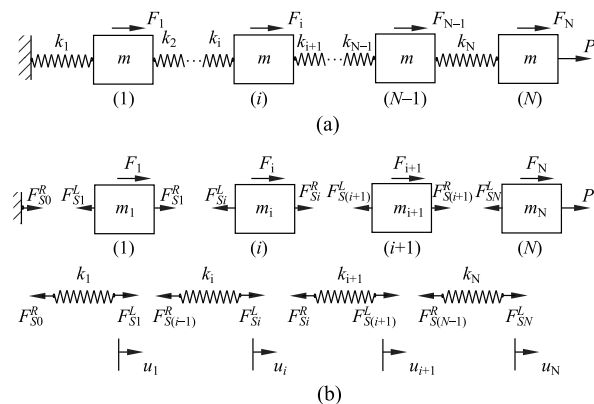


图6 一维杆件的质点系模型及隔离体受力图

(a) 质点系模型; (b) 隔离体受力图

(2) 设杆在力 $p(x)$ 和 P 及约束力作用下处于平衡状态。取第 i 个质点(可理解为位置 x_i 处长度为 dx 的微段)作为隔离体进行受力分析,如图 6(b)所示。假设该质点所受外力为微段所受分布力 $p(x)$ 简化到其质心处时所得到的假想集中力 $F_i = F = p(x)dx$ (近似认为质心位置也为 x_i),方向沿坐标系正方向。设该质点左右两端所受到的弹簧约束力(即内力)分别为 $F_{si}^L = N(x_i)$ 和 $F_{si}^R = N(x_i + dx)$,方向如图 6(b)所示。设该质点上的内外力保持平衡状态,即

$$F_i + F_{si}^R - F_{si}^L = 0 \quad (a)$$

左右两端的弹簧上的拉力也处于平衡状态,即

$$F_{si}^L - F_{s(i-1)}^R = 0, \quad F_{s(i+1)}^L - F_{si}^R = 0 \quad (b)$$

(3) 设杆在力 $p(x)$ 和 P 及约束力作用下处于平衡状态时经历了位移 $u(x)$, B 端经历位移 $u(l)$ 。设杆在该平衡位形附近产生虚位移 $\delta u(x)$, B 端虚位移为 $\delta u(l)$ 。则第 $(i-1)$ 个质点的虚位移为 $\delta u_{i-1} = \delta u(x_{i-1})$, 第 i 个质点的虚位移为 $\delta u_i = \delta u(x_i)$, 第 $(i+1)$ 个质点的虚位移为 $\delta u_{i+1} = \delta u(x_{i+1})$ 。因此,第 i 个弹簧的虚变形为 $\delta \Delta_i = \delta u_i - \delta u_{i-1} = \delta(u_i - u_{i-1}) = d[\delta u(x)]$ 。

(4) 根据例题 1 的结果,本题的外力和内力虚功可计算如下

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{外}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta u(x_i) + P \cdot \delta u(l) \\ &= \int_0^l p(x) \delta u(x) dx + P \cdot \delta u(l) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{内}} &= -\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_{si} \cdot \delta \Delta_i \\ &= -\int_0^l F_s(x) d[\delta u(x)] \end{aligned} \quad (c)$$

由于 $F_s(x) = N(x)$, $d[\delta u(x)] = \delta \epsilon(x) dx$, 其中 $\epsilon(x) = du(x)/dx$ 为杆的正应变、 $\delta \epsilon(x)$ 为虚应变(注意到,在平截面假定条件下,杆横截面上各点的轴向正应变应相同),所以内力虚功又可写成

$$\delta W_{\text{内}} = -\int_0^l N(x) d[\delta u(x)] = -\int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx \quad (7)$$

其中, $N(x) \delta \epsilon(x) = A \sigma(x) \delta \epsilon(x)$ 。

(5) 根据质点系虚功原理,可得本题的虚功方程

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{外}} + \delta W_{\text{内}} &= \int_0^l p(x) \delta u(x) dx + P \cdot \delta u(l) - \\ &\quad \int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

解法二 从变形体(设为弹性体)计算模型出发,建立该杆的虚功方程:仍设杆内的轴力为 $N(x)$, 轴向位移为 $u(x)$, 轴向应变为 $\epsilon(x)$; 采用微段分析法。但认为杆是一种特殊的质点系——在 $[0, l]$ 内有无多质点, 因此认为微段 dx 也是由无限多质点组成的质点系。

解:

(1) 微段、受力图和坐标系: 设用假想截面从该杆中任意位置 x 截出微段 dx , 作出受力图, 如图 7 所示; 坐标系仍如图 5 所示, 坐标原点位于杆未变形的原始自然位形。

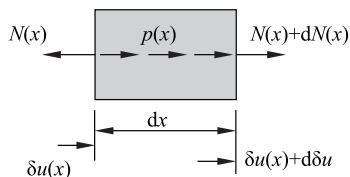


图 7 例题 2 的微段受力图及虚位移

(2) 该杆在力 $p(x)$ 和 P 及约束力作用下处于平衡状态, 微段上的力 $p(x)$ 和两端横截面上的轴力之间满足如下平衡微分方程

$$dN(x) + p(x)dx = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (d)$$

边界条件为

$$u(0) = 0, \quad N(l) = P \quad (e)$$

(3) 设该杆在真实位移 $u(x)$ 附近产生虚位移 $\delta u(x)$, B 端虚位移为 $\delta u(l)$ 。相应地, 微段两端横截面处的虚位移分别为 $\delta u(x)$ 和 $[\delta u(x) + d\delta u(x)]$ 。所以, 微段有虚应变 $\delta \epsilon(x) = d\delta u(x)/dx = \delta[du(x)/dx]$ 。

(4) 微段的外力虚功和内力虚功:

认为微段也是一个质点系, 在 dx 长度内仍有无限多质点, 有外力和内力, 且符合质点系虚功原理的条件, 因此可建立其虚功方程, 即: $d[\delta W_{\text{外}}] + d[\delta W_{\text{内}}] = 0$ 。

微段上的外力为分布力 $p(x)$, 可等效为作用于微段质心上的假想集中力 $F = p(x)dx$, 可近似认为微段质心的虚位移为 $\delta u(x)$ 。此外, 杆内的轴力本来为内力, 但当用假想截面截开杆件、取出微段后, 作用在微段两端横截面上的轴力 $N(x)$ 和 $N(x+dx) = N(x) + dN(x)$ 应也被理解为外力(即“切割面内力”), 且会在它们作用点的虚位移上作虚功。所以, 该微段的外力虚功为

$$d[\delta W_{\text{外}}] = -N(x)\delta u(x) + [N(x) + dN(x)][\delta u(x) + d\delta u(x)] + p(x)\delta u(x)dx \quad (9)$$

将上式展开并略去高阶微量,引入微段的平衡微分方程(d),可将微段外力虚功算式简化为

$$d[\delta W_{\text{外}}] = N(x)d\delta u(x) = N(x)\delta\epsilon(x)dx \quad (f)$$

微段的内力虚功该如何计算? 由于微段仍被理解为是质点系,其内各质点之间的约束力仍为轴力 $N(x) = \sigma(x)A$,且为内力;其内各质点也有虚位移 $\delta u(x)$ 。所以,内力 $N(x)$ 在虚位移 $\delta u(x)$ 上也会作虚功 $d[\delta W_{\text{内}}]$ 。但是,由于内力未被暴露出来,所以还不能直接计算。不过,内力虚功与外力虚功之间应符合质点系虚功原理,即满足如下虚功方程

$$d[\delta W_{\text{外}}] + d[\delta W_{\text{内}}] = N(x)\delta\epsilon(x)dx + d[\delta W_{\text{内}}] = 0 \quad (g)$$

所以,可通过这种方法求得微段的内力虚功

$$d[\delta W_{\text{内}}] = -N(x)\delta\epsilon(x)dx \quad (10)$$

这样,就从质点系虚功原理的角度解释了在定义变形体内力在虚变形上所作虚功时为何要添加一个负号的由来。

(5) 杆件的外力虚功和内力虚功:

杆件的外力虚功和内力虚功为各微段的外力虚功和内力虚功之和。

如上所述,微段的外力应理解为作用在杆件上的分布力 p 和两端横截面上的暴露出来的轴力 N (即切割面内力)。由于相邻微段切割面内力互为作用力和反作用力,因而大小相等方向相反,但它们却经历相同的虚位移。所以,在根据式(9)将各微段外力虚功求和时,这部分虚功就因相互抵消而消失了,只剩下分布力 $p(x)$ 在虚位移 $\delta u(x)$ 上的虚功之和。此外,还应考虑边界条件。因此,杆件的外力虚功为

$$\delta W_{\text{外}} = \int_0^l p(x)\delta u(x)dx + P \cdot \delta u(l) \quad (11)$$

杆件的内力虚功为各微段内力虚功之和,根据式(10)可得

$$\delta W_{\text{内}} = -\int_0^l N(x)\delta\epsilon(x)dx \quad (12)$$

(6) 根据质点系虚功原理,可得杆件的虚功方程

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{外}} + \delta W_{\text{内}} &= \int_0^l p(x)\delta u(x)dx + P \cdot \delta u(l) - \int_0^l N(x)\delta\epsilon(x)dx = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

可见,与解法一的结果完全相同。本文结果与文献[13],文献[28]等结构力学教材中给出的结果一致,也与文献[9],文献[12],文献[21]等弹性理论著作中基于应力、应变等参量推导的虚功方程一致。

如果将上式改写为

$$\int_0^l p(x)\delta u(x)dx + P \cdot \delta u(l) = \int_0^l N(x)\delta\epsilon(x)dx \quad (14)$$

并将等式右端定义为杆件的虚应变能,即

$$\delta U = -\delta W_{\text{内}} = \int_0^l N(x)\delta\epsilon(x)dx \quad (15)$$

则式(14)表示:对于在外力作用下处于平衡状态的变形体,外力在其虚位移上所作虚功等于变形体内储存的虚应变能。也就是说,变形体内储存的虚应变能在数值上等于其内力所作虚功,但符号相反。同理,根据虚位移与实位移的关系,当将实位移当作虚位移时,这里的结果也就与理论力学中所阐述的一般物理概念^[11]相吻合了。这样,虚功方程(14)又可简写为

$$\delta W_{\text{外}} = \delta U \quad (16)$$

这可看作是变形体虚功原理的另一种表述,与文献[31]关于变形体虚功原理的提法相一致。对于线弹性变形体,当应力 $\sigma(x)$ 、应变 $\epsilon(x)$ 和位移 $u(x)$ 均为平衡位形下的真实应力、应变和位移时,可证明,式(16)与弹性力学中的势能驻值原理数学表达式相同(可参见式(1)),如文献[9,17]所述。

(7) 三点讨论:

第一,本文算例只是演示在质点系虚功原理成立的前提下如何推导变形体虚功方程,重点演示对内力虚功的理解,并非对变形体虚功原理的证明。如需证明变形体虚功原理,可假定图7所示的微段为质点,用平衡微分方程(d)乘以该微段质心处的虚位移 $\delta u(x)$ (即质点的虚位移),可得微段的虚功方程如下

$$d\delta W = [dN(x) + p(x)dx]\delta u(x) = 0 \quad (h)$$

然后视杆件为由无限多质点组成的质点系,则得杆件的总虚功方程为

$$\delta W = \int_0^l d\delta W = \int_0^l [dN(x) + p(x)dx]\delta u(x) = 0 \quad (i)$$

在认为变分与微分可交换秩序的前提下,利用分部积分,并利用几何方程和边界条件(e),可推导出与式(13)完全相同的虚功方程,从而证明了变形体虚功原理的必要性命题。反之,从虚功方程(13)出发,也可反推出微段的平衡微分方程和边界条件,

从而可证明原理的充分性命题。

第二,根据文献[31]的变形体虚功原理表述,可得如下的虚功方程

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l N(x) \delta \varepsilon(x) dx \\ &= \int_0^l p(x) \delta u(x) dx + P \delta u(l) = W \quad (j) \end{aligned}$$

通过将虚功方程(j)等式左边的积分式代入几何方程、运用分部积分,并利用边界条件,可以推导出与式(i)完全相同的虚功方程。由此可以认为,文献[31]的变形体虚功原理表述与基于质点系虚功原理的表述实际上是一致的。

第三,本例虽然是以一维线弹性杆件为例推导了变形体虚功方程、讨论了变形体与质点系在虚功原理方面的一致性,但其结果对一般变形体也应适用,具体可参见文献[12],文献[27]等。

6 结语

笔者通过对关于变形体虚功原理的相关文献的研读和对虚功原理基本理论的进一步分析,获得了若干认识。可归纳如下:

(1) 变形连续体可作为质点系看待,只不过是一种特殊的质点系(由无限多质点组成,质点之间由无穷小弹簧约束联系),因而在分析力学中给出的质点系虚位移原理可直接运用于变形连续体。

(2) 不论是分析力学中的质点系,还是弹性力学和结构力学中的变形体,可以定义内力虚功,即,系统内力虚功在数值上等于内力在变形虚位移上作功或应力在虚应变上的应力功(即应力与虚应变乘积)的积分,但符号相反。而系统所储存的虚变形能在数值上等于内力在变形虚位移上作功或应力在虚应变上的应力功的积分,且恒为正。所以,应力与虚应变乘积可称为虚应变能密度。

(3) 对于分析力学中的质点系或弹性力学和结构力学中的变形体,当采用外力和内力定义虚功原理时,均可表述为“受双面理想完整定常约束或非完整齐次约束且原处于(静力)平衡状态的系统(质点系或变形体)保持平衡的充要条件是,对于系统的任何虚位移,系统所受外力所作的总虚功 $\delta W_{\text{外}}$ 和内力所作的总虚功 $\delta W_{\text{内}}$ 之和等于零”,即虚功方程可以表达为: $\delta W_{\text{外}} + \delta W_{\text{内}} = 0$ 。在系统没有其他能量损耗的前提下,虚功原理也可表述为“受双面理想完整定常约束或非完整齐次

约束且原处于(静力)平衡状态的系统(质点系或变形体)保持平衡的充要条件是,对于系统的任何虚位移,系统所受外力所作的总虚功 $\delta W_{\text{外}}$ 等于系统所储存的虚变形能 δU ”,即虚功方程也可以表达为: $\delta W_{\text{外}} = \delta U$ 。

(4) 若不希望受上述虚功原理表述中充分性命题成立条件的限制,也可仅按其必要性命题表述:“受理想约束的系统(质点系或变形体)处于平衡状态时,对于系统的任何虚位移,系统所受外力所作的总虚功 $\delta W_{\text{外}}$ 和内力所作的总虚功 $\delta W_{\text{内}}$ 之和等于零”($\delta W_{\text{外}} + \delta W_{\text{内}} = 0$);或者,“受理想约束的系统(质点系或变形体)处于平衡状态时,对于系统的任何虚位移,系统所受外力所作的总虚功 $\delta W_{\text{外}}$ 等于系统所储存的虚变形能 δU ”($\delta W_{\text{外}} = \delta U$)。只不过,对于一般工程结构来说,上面(3)的虚功原理表述中充分性命题成立的条件并不苛刻。

笔者认为,如果以上结论是合理的和可接受的,则可以在理论力学(包括分析力学)、材料力学、结构力学、弹性力学等力学课程中形成承前启后的统一的虚功原理描述体系。

致谢: 同济大学的吴家龙教授、英国曼彻斯特大学的伍章健博士、中国农业大学陈奎孚教授等为本文写作提供了无私和热情的帮助,并提出了许多宝贵意见。笔者对此深表感谢!

参 考 文 献

- [1] KURRER K E. The history of the theory of structures: From arch analysis to computational mechanics[M]. Berlin: Ernst & Sohn, 2008: 42-44.
- [2] 梅凤翔. 分析力学(上卷)[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2013:32-44.
- [3] 武际可. 力学史[M]. 2版. 上海:上海辞书出版社, 2010: 263-269.
- [4] KANDERAKIS N E. When is a physical concept born? The emergence of 'Work' as a magnitude of mechanics[J]. Sci & Educ, 2010, 19: 995-1012.
- [5] 王光远. 应用分析动力学[M]. 北京:人民教育出版社, 1981:28-65.
- [6] TODHUNTER I. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin[M]. Dover: Dover Publications, Inc, 1960:91-119.
- [7] 铁木生可. 材料力学史[M]. 常振骥,译. 上海:上海科学技术出版社,1961:87-95.
- [8] RANKINE W J M. On the laws of elasticity[J]. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1852, (7): 217-234.
- [9] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of Elasticity

- [M]. (3rd ed). New York: The McGraw-Hill Companies, Inc. 1970. 北京:清华大学出版社,2004:250-252.
- [10] NAYFEH A H. Linear and non-linear structural mechanics[M]. Willy & Sons, 2004:66-67.
- [11] 朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学(下册)[M]. 北京:北京大学出版社,1982:86-95.
- [12] 杜庆华,余寿文,姚振汉. 弹性理论[M]. 北京:科学出版社,1986:321-349.
- [13] 金宝楨,杨式德,朱宝华. 结构力学[M]. 北京:人民教育出版社,1964:127-128.
- [14] FENG Y C. A first course in continuum mechanics[M]. New Jersey: Prentice-Hill, Inc. 1994. 北京:清华大学出版社,2005:2-7.
- [15] 杜庆华,郑百哲. 应用连续介质力学[M]. 北京:清华大学出版社,1986:1-4.
- [16] 吴家龙. 弹性力学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016:12, 359-365.
- [17] 钱伟长,叶开沅. 弹性力学[M]. 北京:科学出版社,1980:124-130.
- [18] 鹭津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 老亮,郝松林,译. 北京:科学出版社,1984:15, 69, 95, 445.
- [19] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,1981:245, 376, 387.
- [20] 钱令希. 中国大百科全书·力学[M]. 北京·上海:中国大百科全书出版社,1985: 464
- [21] 陆明万,罗学富. 弹性理论基础(下册)[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,施普林格出版社,2001:78-80.
- [22] 铁摩辛柯,盖尔. 材料力学[M]. 胡人礼,译. 北京:科学出版社,1978:443-448.
- [23] 孟昭礼,王光远,严宗达. 关于变形连续体虚功原理的表述方式及其实质的讨论[J]. 天津大学学报,1978,1:86-94.
- MENG Z L, WANG G Y, YAN Z D. Discussion on the statement of the principle of virtual work for deformable continuum bodies and its essence, Journal of Tianjin University, 1978, 1: 86-94 (in Chinese).
- [24] 王焕定. 再论变形体虚功原理[J]. 力学与实践,2011, 33(2):93-95.
- WANG H D, Discussion again on the principle of virtual work for deformable bodies[J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(2): 93-95. (in Chinese)
- [25] 鹭津久一郎. 能量原理[M]. 尹泽勇,江伯南,译. 北京:中国建筑工业出版社,1984:33-50.
- [26] 阿吉里斯. 能量原理与结构分析[M]. 邵成勋,译. 北京:科学出版社,1978:22,44.
- [27] 沈鹏程. 虚功的对偶性原理及其在混杂有限元法中的应用[J]. 上海力学(力学季刊),1985, 2:42-57.
- SHENG P C. Dual principles of virtual work and their application in mixed and hybrid finite element method[J]. Shanghai Mechanics (Chinese Quarterly Mechanics), 1985, 2: 42-57. (in Chinese)
- [28] 杨天祥. 结构力学(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,1979:78-87.
- [29] 王焕定,章梓茂,景瑞. 结构力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2004:85-88.
- [30] 龙驭球,包世华,袁驷. 结构力学 I——基本教程[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,2018:155-156.
- [31] 扬弗康,李家宝,洪范文,等. 结构力学:(上册)[M]. 6 版. 北京:高等教育出版社,2016:91-102.
- [32] 朱慈勉,张伟平. 结构力学(上册)[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016:113-115.

(上接第 5 页)

同数学表述,即作为经验规律的通量法则、作为基本自然规律的麦克斯韦方程组的积分和微分形式,我们力图阐述:(1)通量法则的局限性,(2)场方程的实验基础,(3)场方程的正确性和基础地位,为理解和判断各种关于麦克斯韦方程组的修正或拓展提供一个特殊的视角和参考。

作者感谢李志兵、李新奇、帅志刚和马中水诸教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] 朗盖尔 M. 物理学中的理论概念[M]. 向守平,郑久仁,朱栋培,等,译. 合肥:中国科学技术大学出版社,2017. 8.
- [2] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006. 12.
- [3] PURCELL E M. Electricity and magnetism[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [4] FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M. The Feynman lectures on physics: Volume II. Mainly electromagnetism and matter[M]. New York: Basic Books, 2010.
- [5] MAXWELL J C 1865//NIVEN W D. The scientific papers of James Clerk Maxwell in two volumes[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1890.
- [6] JACKSON J D. Classical Electrodynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [7] WANG Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system—General theory, mathematical solutions and applications in TENG[J]. Materials Today, 2021.
- [8] 知识分子,争鸣/王中林院士“拓展麦克斯韦方程组”,学界怎么看? [OL]. 2022-01-17.
- [9] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Electrodynamics of continuous[M]. New York: Pergamon Press, 1984.