



电磁感应的通量法则与场方程

邓文基

(华南理工大学物理与光电学院, 广东 广州 510641)

摘要 电磁感应的通量法则是一条在电路近似下成立的经验规律。结合电磁场的观念,可以得到麦克斯韦方程组中法拉第电磁感应定律的积分和微分形式;它是比通量法则更为基本的电磁规律。考虑电磁规律的相对论不变性,本文修正了电动势的定义和计算公式,并得到通量法则的“低速小尺寸”极限。

关键词 电磁感应定律;麦克斯韦方程组;感生电动势;动生电动势

FLUX RULE AND FIELD EQUATION FOR THE ELECTROMAGNETIC INDUCTION

DENG Wenji

(School of Physics and Optoelectronics, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510641)

Abstract The flux rule of electromagnetic induction is an empirical formula, which is an approximation result of the theory of electronic circuits. Combining with the concepts of electromagnetic fields, it was used to derive the Faraday's law of induction in Maxwell equations, which is a fundamental law of electromagnetism. Taking into account the effects of relativity, the definition and expression of electromotive force are modified, and the low velocity and small size limitation of the flux rule is obtained.

Key words law of electromagnetic induction; Maxwell equations; induced emf; motional emf

电磁感应定律是经典电磁理论一条关键的基本规律。继奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777—1851)实验之后,感应定律再次揭示了电与磁深刻的内在联系^[1],已成为电磁学课程的核心内容^[2],甚至在中学物理课程中也有所介绍。

1800年,伏特(Alessandro Volta, 1745—1827)参考伽伐尼(Luigi Galvani, 1737—1798)解剖青蛙时的意外发明了一种能产生可控稳定电流的化学电源,开启了大规模研究各种电流和电磁效应的新时代。1820年,奥斯特偶然发现了电流的磁效应,启发高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)、安培(Andre Marie Ampere, 1775—1836)、泊松(Simeon Denis Poisson, 1781—1840)、欧姆(Georg Simon Ohm, 1787—

1854)、毕奥(Jean Baptiste Biot, 1774—1862)和萨伐尔(Felix Savart, 1791—1841)等数学家和物理学家迅速建立了比较完整的静电和稳恒磁场理论^[1]。

与此同时,以法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)和亨利(Joseph Henry, 1797—1878)为代表的一些科学家也在苦苦探索自然界的对称性;他们相信,既然电流能够产生磁场(电生磁),一定存在某种途径由磁场产生电流(磁生电),并最终于1831年间,通过实验揭示了电磁感应定律,即改变穿过闭合回路的总磁通将在闭合电路中产生感应电流和感应电动势。1834年,楞次(Heinrich Friedrich Emil Lenz, 1804—1865)再补充了一条判定感应电流方向的法则,即楞次定律^[1]。

收稿日期: 2022-02-24

作者简介: 邓文基,男,教授,长期从事物理学理论研究和教学,主要研究领域为凝聚态理论,phwjdeng@scut.edu.cn。

引文格式: 邓文基. 电磁感应的通量法则与场方程[J]. 物理与工程, 2022, 32(3): 3-5, 20.

Cite this article: DENG W J. Flux rule and field equation for the electromagnetic induction[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(3): 3-5, 20. (in Chinese)

直到 1845 年, 弗·诺依曼(F. E. Neumann, 1798—1895 年)才给出由磁通变化率计算感应电动势的“通量法则”; 这是第 1 节将要讨论的主要内容。再经过 20 年, 麦克斯韦才首次发表描述电磁场运动变化规律的著名方程组^[3]; 其中关于涡旋电场与磁场变化率的关系也称为麦克斯韦方程组中的法拉第电磁感应定律。第 2 节将扼要论述如何将一个电路近似下的经验法则抽象概括为一条普适的自然规律。第 3 节研究通量法则的相对论效应。第 4 节是简单的小结。

1 感应电动势与通量法则

与伏打电池一样, 法拉第寻求的“磁生电”也是一种通过能量转换向电池中的载流子提供电磁能量的机制。在电磁学教科书中^[2,4], 统一地采用电动势(electromotive force, 缩写为 emf)来描述“电池”的这种能力: 在直流电路中, 外力(非静电力)克服静电力做功不断地将载流子由低电势能处(电池负极)输运到高电势能处(正极)。若将作用在单位正电荷上的非静电力记作 $\mathbf{K}$, 则在形成恒定电流的闭合回路 L 中, 非静电力将对沿 L 移动的电荷做功, 所以回路积分

$$\text{emf} \equiv \oint_L \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

被用于衡量电路中外力提供能量的本领, 常常被解读为“单位正电荷沿闭合回路运动一周的过程中, 非静电力所做的功”。实际上, 电动势这一概念并不局限于稳恒电流的简单情形。在本文讨论的电磁感应问题中, 闭合电路的感应电动势也按式(1)定义, 但必须强调的是, 环路积分中各处的非静电力 $\mathbf{K}$ 取同一时刻 t 的值, 计算出来的 emf 通常也是时间 t 的函数。所以, 与教科书流行的做法不同, 电动势还可以解读为: 整个闭合电路中非静电力对单位电流做功的功率。它的物理意义更为明确, 无需纠缠载流子沿闭合回路运动的实际过程。

如引言所述, 弗·诺依曼总结法拉第和楞次的实验结果, 将闭合电路感应电动势与穿过回路的磁通量的时间变化率的关系系统地写作通量法则, 即

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2)$$

其中 Φ_B 是穿过闭合电路的磁通量, 即

$$\Phi_B \equiv \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

其中 S 表示任何以回路 L 为边界的曲面, 曲面的法线方向与积分回路的方向满足右手螺旋法则。应该强调, 关于磁通量的上述定义是以磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的无源性为前提的, 即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4)$$

感应电动势的通量法则实际上是将感生电动势和动生电动势包含在一个普适的表达式中^[5]。如果电路是固定、静止的, 磁通的变化全部源于磁感应强度的变化, 即

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{感生}} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

如果磁场是稳恒的, 则磁通的变化只能源于导线切割磁力线。简单的矢量分析给出^[3]

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{动生}} \oint_L \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l} \quad (6)$$

所以, 通量法则(2)式也可以改写为

$$\oint_L \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{v}$ 表示电路中导线任意线元 $d\mathbf{l}$ 的瞬时速度, 各部分可以各不相同。

2 场方程的积分和微分形式

将物理起源完全不同的感生电动势和动生电动势完美地写进一个表达式, 在费曼看来这是物理学中绝无仅有的例外, 他还特别讨论了动生电动势不能写进这一通量公式的实例^[4]。事实上, 感应电动势是通过电路的基尔霍夫方程组和断路电压来测量的^[2,3], 电动势和通量法则源于电路理论, 是电磁场理论在一定条件下的近似结果, 例如要求电磁场封闭在器件内, 即采用电路理论中的集中元件近似^[2]。

由感应电动势的经验规律得出电磁场方程并非简单直接的数学推导, 更为关键的步骤是以电磁场的新概念取代“超距作用”的旧观念。明确了电磁场的客观实在性, 才会尝试建立描述电磁场运动变化的方程^[3]。

如果这样引入磁矢势 $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, 即^[2]

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8)$$

并利用斯托克斯公式, 则式(7)可整理为

$$\oint_L \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (9)$$

注意到闭合回路的任意性,总可以这样引入电磁场的标势 $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{r}, t)$, 即

$$\mathbf{K} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (10)$$

其中的第一项

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

依赖于导线的运动速度 $\mathbf{v}$, 它实际上是运动电荷感受的洛伦兹力; 而第二与第三项之和, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (12)$$

是 t 时刻 $\mathbf{r}$ 处的电场强度矢量。由式(12)和(8)不难得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13)$$

这正是麦克斯韦方程组中两个基本方程的微分形式, 分别称为磁感应强度的高斯定理和电场的法拉第电磁感应定律; 相应的积分形式分别是磁场的高斯定理式(4)和麦克斯韦方程组中的法拉第电磁感应定律, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14)$$

有时候它也被改写为另一种形式, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

但一定在公式的上下文文明确了 L 和 S 是给定参考系中固定的积分回路和积分面积^[2,3]。在这一前提下, 等式(14)和(15)的确没有区别, 并且它们都不依赖系统的任何具体性质; 实物对场的影响体现在麦克斯韦方程组的另外两个场方程中, 即^[2-4,6,9]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (16)$$

它们分别称为电场的高斯定理和磁场的麦克斯韦-安培环路定理。实物或介质对电磁场的影响全部体现于电荷密度 $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ 和电流密度 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, 即便涉及运动介质也无需修订麦克斯韦方程组的基本形式^[7,8]。

3 低速小尺寸情形下的相对论效应

作为电路近似下的经验公式, 感应定律的通量法则并没有特别关注运动参考系问题。第2节虽然初步考虑了电动势计算公式(9)回路中各点的 $\mathbf{K}$ 必须与电动势取同一时刻的 t 值, 但也没有

强调它们是在哪个参考系的观察值。

完整的经典电磁理论不仅包含麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式, 还要包括涉及不同惯性系的狭义相对论。为了准确地描述电池通过外力(非静电力)做功为闭合电路提供电磁能的本领, 感应电动势应该更严格地定义为

$$\text{emf} = \oint_{L'} \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{l}' \quad (17)$$

其中右上角的撇号表示 $d\mathbf{l}'$ 线元的瞬时静止的坐标系, 相对于实验室坐标系的瞬时速度为 $\mathbf{v}$ 。根据狭义相对论, 时空坐标和电磁场的洛伦兹变换可以写作^[7]

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right) \quad (18)$$

和

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & E'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & B'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right)_{\perp} \end{aligned} \quad (19)$$

其中下标 $\parallel$ 和 $\perp$ 分别标示速度 $\mathbf{v}$ 的平行方向和垂直方向, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 是洛伦兹因子。在电子线路和电子工程关注的“低速小尺寸”极限下, 即 $v \ll c, r \ll ct$ 时, 洛伦兹变换式(18)和(19)退化为伽利略变换, 即

$$\mathbf{r}' \simeq \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' \simeq t \quad (20)$$

和

$$\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \quad (21)$$

代入式(17)可得电动势的计算公式, 即

$$\text{emf} \simeq \oint_{L'} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (22)$$

利用场方程(13)~(15), 可进一步将上式改写为教科书中常用的形式(2)。至此, 第2节提到的困惑得到了简单的解释——感生电动势和动生电动势能够完美地写进一个通量法则具有深刻的物理含义, 源于电磁规律的相对论不变性。

如果进一步考虑导线(介质或金属)对实验室参考系中电磁场的影响, 需要根据麦克斯韦方程组和狭义相对论做更详细甚至繁琐的计算^[9], 但麦克斯韦方程组的基本形式无需改变。

4 结语

通过集中讨论法拉第电磁感应定律的三种不
(下转第20页)

- [M]. (3rd ed). New York: The McGraw-Hill Companies, Inc. 1970. 北京:清华大学出版社,2004:250-252.
- [10] NAYFEH A H. Linear and non-linear structural mechanics[M]. Willy & Sons, 2004:66-67.
- [11] 朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学(下册)[M]. 北京:北京大学出版社,1982:86-95.
- [12] 杜庆华,余寿文,姚振汉. 弹性理论[M]. 北京:科学出版社,1986:321-349.
- [13] 金宝桢,杨式德,朱宝华. 结构力学[M]. 北京:人民教育出版社,1964:127-128.
- [14] FENG Y C. A first course in continuum mechanics[M]. New Jersey: Prentice-Hill, Inc. 1994. 北京:清华大学出版社,2005:2-7.
- [15] 杜庆华,郑百哲. 应用连续介质力学[M]. 北京:清华大学出版社,1986:1-4.
- [16] 吴家龙. 弹性力学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016:12, 359-365.
- [17] 钱伟长,叶开沅. 弹性力学[M]. 北京:科学出版社,1980:124-130.
- [18] 鹭津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 老亮,郝松林,译. 北京:科学出版社,1984:15, 69, 95, 445.
- [19] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,1981:245, 376, 387.
- [20] 钱令希. 中国大百科全书·力学[M]. 北京·上海:中国大百科全书出版社,1985: 464
- [21] 陆明万,罗学富. 弹性理论基础(下册)[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,施普林格出版社,2001:78-80.
- [22] 铁摩辛柯,盖尔. 材料力学[M]. 胡人礼,译. 北京:科学出版社,1978:443-448.
- [23] 孟昭礼,王光远,严宗达. 关于变形连续体虚功原理的表述方式及其实质的讨论[J]. 天津大学学报,1978,1:86-94.
- MENG Z L, WANG G Y, YAN Z D. Discussion on the statement of the principle of virtual work for deformable continuum bodies and its essence, Journal of Tianjin University, 1978, 1: 86-94 (in Chinese).
- [24] 王焕定. 再论变形体虚功原理[J]. 力学与实践,2011, 33(2):93-95.
- WANG H D, Discussion again on the principle of virtual work for deformable bodies[J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(2): 93-95. (in Chinese)
- [25] 鹭津久一郎. 能量原理[M]. 尹泽勇,江伯南,译. 北京:中国建筑工业出版社,1984:33-50.
- [26] 阿吉里斯. 能量原理与结构分析[M]. 邵成勋,译. 北京:科学出版社,1978:22,44.
- [27] 沈鹏程. 虚功的对偶性原理及其在混杂有限元法中的应用[J]. 上海力学(力学季刊),1985, 2:42-57.
- SHENG P C. Dual principles of virtual work and their application in mixed and hybrid finite element method[J]. Shanghai Mechanics (Chinese Quarterly Mechanics), 1985, 2: 42-57. (in Chinese)
- [28] 杨天祥. 结构力学(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,1979:78-87.
- [29] 王焕定,章梓茂,景瑞. 结构力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2004:85-88.
- [30] 龙驭球,包世华,袁驷. 结构力学 I——基本教程[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,2018:155-156.
- [31] 扬弗康,李家宝,洪范文,等. 结构力学:(上册)[M]. 6 版. 北京:高等教育出版社,2016:91-102.
- [32] 朱慈勉,张伟平. 结构力学(上册)[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016:113-115.

(上接第 5 页)

同数学表述,即作为经验规律的通量法则、作为基本自然规律的麦克斯韦方程组的积分和微分形式,我们力图阐述:(1)通量法则的局限性,(2)场方程的实验基础,(3)场方程的正确性和基础地位,为理解和判断各种关于麦克斯韦方程组的修正或拓展提供一个特殊的视角和参考。

作者感谢李志兵、李新奇、帅志刚和马中水诸教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] 朗盖尔 M. 物理学中的理论概念[M]. 向守平,郑久仁,朱栋培,等,译. 合肥:中国科学技术大学出版社,2017. 8.
- [2] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006. 12.
- [3] PURCELL E M. Electricity and magnetism[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [4] FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M. The Feynman lectures on physics: Volume II. Mainly electromagnetism and matter[M]. New York: Basic Books, 2010.
- [5] MAXWELL J C 1865//NIVEN W D. The scientific papers of James Clerk Maxwell in two volumes[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1890.
- [6] JACKSON J D. Classical Electrodynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [7] WANG Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system—General theory, mathematical solutions and applications in TENG[J]. Materials Today, 2021.
- [8] 知识分子,争鸣/王中林院士“拓展麦克斯韦方程组”,学界怎么看? [OL]. 2022-01-17.
- [9] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Electrodynamics of continuous[M]. New York: Pergamon Press, 1984.