

一维完全弹性碰撞次数和圆周率

王富强 王雯宇 张 千

(北京工业大学应用数理学院, 北京 100124)

摘 要 本文总结整理了网络上对于两体一维完全弹性碰撞总碰撞次数和圆周率关系的相关讨论和证明, 分别以几何方法和代数方法给出了清晰的说明。文中对一维完全弹性碰撞问题也进行了推广: 对于两个物体初速度都不为零的情况, 以几何图形法对这个问题给予阐述; 对于三体碰撞的情况我们猜测到了一个漂亮的解析公式, 并以数值计算的办法对这个猜想给予验证, 但是没有给出严格的解析证明; 当考虑碰撞过程的相对论修正之后, 总碰撞次数就与物体的质量比失去了明显的相关性。

关键词 完全弹性碰撞; 相对论碰撞; 圆周率

THE COUNT OF ELASTIC COLLISION IN ONE DIMENSION AND π

WANG Fuqiang WANG Wenyu ZHANG Qian

(College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract This paper summarizes the discussions and proofs of the relationship between the collision times and π of two bodies in the one-dimensional elastic collision on the network, and give a clear explanation by both geometric method and algebraic method, respectively. In this paper, the one-dimensional elastic collision problem is also generalized to the case that the initial velocity of two objects is not zero of which the problem is illustrated by the geometric graph method. For the case of three-body collisions, we have guessed a beautiful analytical formula and verified the conjecture by numerical calculation, but we have not given a strict analytical proof. When the relativistic correction of the collision process is taken into account, the total number of collisions and the mass ratio of the object lose obvious correlation.

Key words elastic collision; relativistic collision; π

最近网络上流传着一段关于一维完全弹性碰撞次数和圆周率 π 关系的视频, 具体可以参看网页^①。这个有趣的问题引起了很多人的关注和探讨。该视频所讨论的问题如图 1 所示: 质量为 m_1 的物体 1 和质量为 m_2 的物体 2 在光滑水平面上放置, 在它们的左侧是一堵墙。物体 2 以速度 v 由右向左与物体 1 发生完全弹性碰撞, 因此物体 1

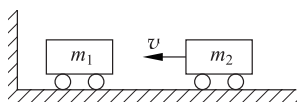


图 1 一维完全弹性碰撞示意图

在第一次碰撞过后便具有了向左的速度。物体 1 在与左侧墙壁发生完全弹性碰撞后, 仍有可能与物体 2 再次发生碰撞。视频所关注的核心问题是物体 1 总的碰撞次数。模拟发现, 当物体 2 的质量 m_2 与物体 1 的质量 m_1 相等的时候碰撞次数为 3, 若 m_2 与 m_1 的比值每增加 100 倍, 碰撞次数 N 与 π 的比值就增加 10 倍。碰撞次数 N 和圆周率 π , 看上去完全不相干的两个量, 竟然可以建立起这种联系。经过作者的数值计算验证, 发现视

① https://v.youku.com/v_show/id_XNDI0ODg0OTk4MA.html?spm=a2h0k.11417342.soresults.dtitle

收稿日期: 2019-12-09; 修回日期: 2020-01-13

基金项目: 国家自然科学基金(11775012)。

作者简介: 王雯宇, 男, 研究员, 主要从事理论物理的研究和教学工作, 研究方向为高能物理, 超出标准模型新物理, wywang@mail.itp.ac.cn。

引文格式: 王富强, 王雯宇, 张千. 一维完全弹性碰撞次数和圆周率[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 65-73.

Cite this article: WANG F Q, WANG W Y, ZHANG Q. The count of elastic collision in one dimension and π [J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 65-73. (in Chinese)

频中的模拟结果是正确的,这是一个非常有意思的问题。正如视频中所说,这样仿佛是在统计路人的数目,而这个结果恰巧等于某人的身高一样。这样的题目如果放在物理课堂上讲解,相信必定可以提高同学们学习物理的兴趣。因此,本文将网络中流传的证明方法整理总结,用两类方法对视频中的结论予以证明。首先,作者希望通过对问题的分析与证明,来讲解一些更深的物理规律;其次,这个问题还可以做进一步的推广,作者希望通过对这些问题的研究,给出更有意思的结果来。

综上所述,本文做如下安排:论文第二部分用两类方法证明视频中的结论;第三部分对这个问题进行三种更复杂情况的推广;第四部分给出本文的结论。

1 两类证明

下面我们先对这个问题进行简单的分析,首先需要明确的是此碰撞过程为完全弹性碰撞。并且,如图1所示:这里不妨取水平向右为正方向,用下角标 n 来标记物体2的碰撞次数,物体1第 $2n-1$ 次碰撞前物体1和物体2的速度分别表示为 u_{2n-1} 和 v_n ,且对于物体1有 $u_{2n-1} = -u_{2n-2}$ (与墙发生完全弹性碰撞。)。注意如果物体1和物体2能够碰撞,物体1撞墙后反弹(最后一次两物体碰撞情况除外),碰撞次数都会增加两次,所以我们这里就以 $2n$ 的角标来标记的物体1的碰撞次数。由于是完全弹性碰撞,满足的物理规律是很简单的^[1,2]:第一、能量守恒,由此可得

$$\frac{1}{2}m_1 u_{2n-1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_n^2 = \frac{1}{2}m_1 u_{2n}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{n+1}^2 \quad (1)$$

第二、动量守恒,由此可得

$$m_1 u_{2n-1} + m_2 v_n = m_1 u_{2n} + m_2 v_{n+1} \quad (2)$$

不难发现,总碰撞次数 N 只与两个物体的质量比相关,因为这两个守恒方程不会因为质量 m_1 和 m_2 同时乘以任意的常数而发生改变。其实这种性质的原因就在于两个守恒方程都是齐次的。同样,速度 u 和 v 乘以任意的常数,也不影响这两个方程。在这个问题中,物体2初始速度 v_1 其实是一个初始条件,而物体1静止。因而物体2初始速度与 v_1 的具体值无关,这样碰撞次数 N 也是与 v_1 无关的。当然,如果物体1初始速度不等于零,则碰撞次数就与初始速度的比相关了。后面我们将讨论这一点。

鉴于以上情况,我们不妨定义

$$\eta = \frac{m_2}{m_1}$$

式(4)和式(2)可改写为

$$u_{2n-1}^2 + \eta v_n^2 = u_{2n}^2 + \eta v_{n+1}^2 \quad (3)$$

$$u_{2n-1} + \eta v_n = u_{2n} + \eta v_{n+1} \quad (4)$$

式(4)还可以移项得

$$u_{2n} - u_{2n-1} = -\eta(v_{n+1} - v_n) \quad (5)$$

由以上方程,用数值计算的办法对两体碰撞过程进行求解。由于数值计算的程序很容易编写,论文就不公布代码了。首先我们把 η 小于100范围内的数值结果展示在图2中。图2中灰色 $\times$ 表示数值计算总的碰撞次数的结果,黑色曲线是 $N = \sqrt{\eta}\pi$ 的函数曲线。从图中可以看出,虽然总碰撞次数 N 是以整数形式分立变化的,但是当 η 足够大的时候, N 就呈现出了一定的解析规律性。同时我们也可以看出数值计算的结果和

$$N = \sqrt{\eta}\pi \quad (6)$$

的函数曲线随着 η 的增大符合的越来越好。网络视频中特别强调的是质量比以100倍递增,总碰撞次数依次取 π 的小数点后各个位数的有效数字。根据数值计算的结果,其实没有必要一定以100倍递增,只要和 $\sqrt{\eta}$ 相比就可以了。正如前文所说,网上有很多种证明这个结论的方法。我们整理总结了一下,发现基本上这些方法可以分为两类,即按照数学传统划分的几何方法与代数方法。下面我们分别来给出这两类证明过程。需要说明的是,这两类方法网上的出处很多,论文就不给出具体的引用了。

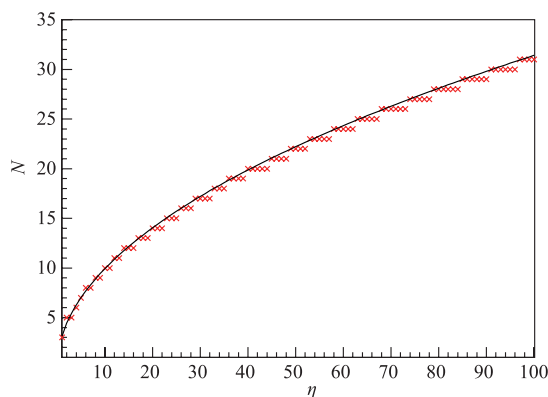


图2 两体碰撞数值结果图:灰色 $\times$ 是总碰撞次数,黑色曲线是 $N = \sqrt{\eta}\pi$ 的函数曲线

1.1 几何方法

根据网上视频的提示,要建立碰撞次数 N 和圆周长 π 的关系,我们需要找到一个关于圆的方

程。由能量守恒定律,令

$$v'_n = \sqrt{\eta} v_n \quad (7)$$

式(3)可改写为

$$u_{2n-1}^2 + v_n'^2 = v_1'^2 + u_1^2 = R^2 \quad (8)$$

同样,式(5)可化为

$$\frac{v'_{n+1} - v'_n}{u_{2n} - u_{2n-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad (9)$$

我们可以用图 3 来展示以上两个方程的几何表示:横坐标和纵坐标分别代表 v'_n 和 u_n , 因为 $u_1 = 0$, 所以

$$R^2 = v_1'^2 \quad (10)$$

A、B、C 和 P 等等各点代表系统中两物体的状态, 比如整个系统在 A 点处物体 1 的速度为 $u_1 = 0$, 物体 2 的速度为 v_1 。当两个物体碰撞以后, 物体 1 的速度变为负值, 物体 2 的速度变大, 于是状态就改为 B 点。而后, 物体 1 与墙发生完全弹性碰撞之后, 速度反向, 而物体 2 的速度不变, 因此就是 C 点。所以整个碰撞过程就是在这个圆上不断以这样的方式画点连线。总碰撞次数就是圆上点的数目(不包含起点或者终点)或者是连线的数目。末点 P 状态应该是物体 1 的速度 u 小于等于物体 2 的速度 v , 此时碰撞过程就会终止, 保持 P 状态不变。我们在图 3 中划出了一条灰色虚线 l , 用来判断碰撞是否是最后一次。 u 小于等于 v 实际上也会给出虚线 l 的一个几何要求, 下面我们会给出具体要求。

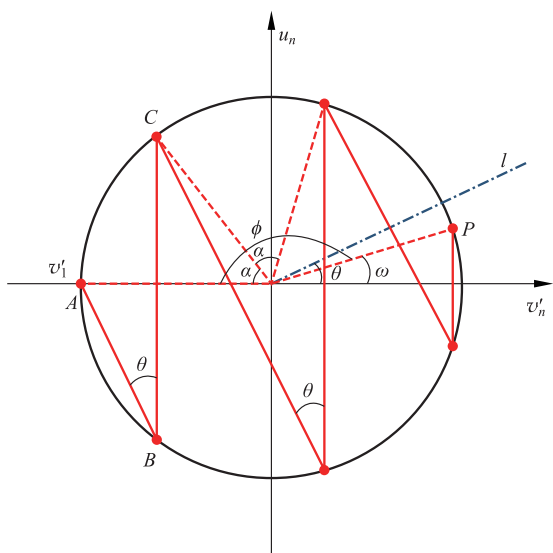


图 3 两体碰撞过程的几何图形展示

如图 3 所示,从几何上看,这里我们可以引入两物体两次碰撞间隔在图中所对应的圆周角 θ 和

它所对应的圆心角 α 以及完整的两体碰撞过程所对应的总的圆心角 ϕ 和 ϕ 的补角 ω 。总的碰撞次数可以由统计总的圆心角 ϕ 范围内有多少个 θ 角计算出来。非常有趣的是,每次碰撞的 θ 角度都是相等的,根据式(9)可知

$$\theta = \arctan \left| \frac{v'_{n+1} - v'_n}{u_{2n} - u_{2n-1}} \right| = \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (11)$$

由圆周角定理

$$\alpha = 2\theta = 2\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (12)$$

可以发现 θ 和 α 都只和 η 相关。用图 3 来解释完整的碰撞过程为:以 A 点为起点每两次碰撞顺时针转过 α 的圆心角,总共转过的圆心角为 ϕ 。

如上文所述, u 小于等于 v 就是停止碰撞的物理要求,即要求

$$u_{2n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{\eta}} v'_n \quad (13)$$

这就给出了虚线 l 的几何要求,斜率等于 $1/\sqrt{\eta}$ 。当 η 足够大的时候, ω 和 θ 同时趋向于零,即角度 ϕ 为

$$\phi = \pi - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (14)$$

由此我们就可以计算出来总的碰撞次数了

$$N = \left\lfloor 2 \times \frac{\pi - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right)}{2\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right)} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right)} \right\rfloor \quad (15)$$

注意这里 $[X]$ 表示对 X 取整。第一行乘以 2 的原因在于每个角度对应的是两次碰撞。同时,计算中加 1 的原因是这一次碰撞之后,物体 1 的速度向左,所以还会与左侧墙壁发生一次碰撞。如果这一次碰撞之后,物体 1 的速度向右,则不需要加这个 1。本论文主要讨论的是 η 很大的时候 N 的极限行为,这里我们就不去细分这些情况了。

当物体 2 的质量远大于物体 1 的质量,即 $\eta \rightarrow \infty$ 时,我们把式(15)分母反正切函数泰勒展开,就可以得到

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} N = \sqrt{\eta} \pi \quad (16)$$

注意,由于我们主要关注的是 N 的极限行为,所以上式去掉了取整的方括号。这样,我们就证明了视频中的结论。

这是一种几何的证明方法,其实还有其他的

几何证明方法,本质上都有些类似,这里我们再举一个例子,感兴趣的读者可以浏览网页^①。由图1,物体1的右侧与墙壁的距离表示为 D_1 ,物体2的左侧与墙壁的距离表示为 D_2 。当 $D_1 = D_2$ 时,两物体发生碰撞。利用这个表示,我们就可以把能量守恒定律和动量守恒定律与光学中的光速不变原理和反射定律相联系。取

$$x = \sqrt{m_2} D_2, \quad y = \sqrt{m_1} D_1 \quad (17)$$

以 x 为横轴、以 y 为纵轴建立坐标系,如图4所示。与上面证明稍有不同的是,坐标空间中的任意一个点都可以用来表示系统的状态,对系统的状态进行描点连线就可以画出两物体碰撞的示意图。图4中折线的拐折A、B、C等点表示物体1发生了碰撞,比如A点是 $D_1 = D_2$ 时两物体发生的碰撞,此后 D_1 匀速变小,撞墙时 D_1 就等于0,因此碰墙对应的就是B点。把体系状态的点的变化率定义为系统的状态点的速度矢量

$$\mathbf{V} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (18)$$

根据 $D_1 = D_2$ 可以确定两物体碰撞点所在的直线 l 的方向矢量为

$$\mathbf{K} = (\sqrt{m_2}, \sqrt{m_1}) \quad (19)$$

由能量守恒、动量守恒定律可得

$$\mathbf{V}^2 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} = \text{const} \quad (20)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \sqrt{m_2} \frac{dx}{dt} + \sqrt{m_1} \frac{dy}{dt} = \text{const} \quad (21)$$

式(21)表示两物体每次碰撞发生前后,图4中灰色折线和直线 l 的夹角相等,如A点所示。式(20)表示坐标空间中,系统状态点的速度不变。而在B点处,因为物体1与左侧墙壁是完全弹性碰撞,所以只对物体1的速度方向反向,物体2的速度不变。很容易看到 $\mathbf{V}$ 在 x 轴上的投影即 dx/dt 在碰撞前后不发生改变,这意味着物体1和墙壁每次碰撞前后,图4中灰色折线与 x 轴的夹角也相等。这样就很容易看出,坐标空间中系统状态点的运

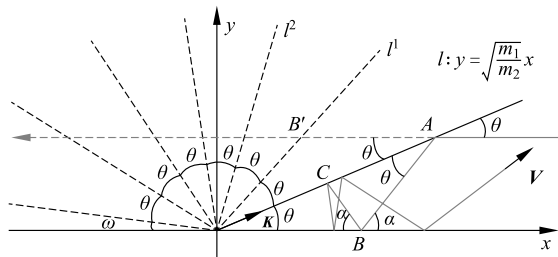


图4 光反射表示的碰撞过程图,灰色折线表示物体发生碰撞,灰色虚线表示虚拟的碰撞过程

动即保持速度不变,又满足反射定律。^[3]所以可以将整个过程等效为一束光在夹角为 θ 的两块镜子之间往复反射的过程。于是我们就建立起了两体完全弹性碰撞的碰撞过程和光的反射之间的联系。

由上可知,物体1总的碰撞次数 N ,等于图中灰色折线拐点的个数,也等于一束以 θ 角入射的光在夹角为 θ 的两面镜子中反射的次数。这里光以 θ 角入射的原因是由于初始条件物体1的速度为零,导致速度矢量平行于 x 轴。直接计算反射次数是不方便的,但是有一个巧妙地方法可以利用。在图4中可以找到 x 轴关于直线 l 对称的直线 l^1 ,由于对称性,直线 l^1 上存在 B' 点是B点关于直线 l 的对称点。由反射定律,可以把反射光由A点到B点的传播假想为A点到 B' 点的传播,而且本来折线传播的光线就变成了(灰色虚线)虚拟的直线传播。以此类推,可以以角度 θ 为角度间隔依次放置虚拟的镜子 l^2, l^3 等。这样光每反射一次相当于穿过一个镜面,光沿灰色折线传播的过程就被转化成这束光沿灰色虚线传播的过程。总的碰撞次数也就变成了图4中灰色虚线穿过镜子的数目。若 π 不可以被 θ 整除,则总碰撞次数也可以理解为 π 中包含的完整的 θ 角的个数。若 π 可以被 θ 整除,则总碰撞次数也可以理解为 π 中包含的完整的 θ 角的个数再减去1(临界状态)。注意在图4中,我们把左侧最后一个角取作 ω ,很容易看出 $0 \leq \omega \leq \theta$ 。我们还是取 η 趋向于无穷大的极限, θ 角度足够小,忽略 ω 角度

$$N = \left[\frac{\pi}{\theta} \right] = \left[\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} \right] \rightarrow \sqrt{\eta} \pi \quad (22)$$

这样再次证明了视频中的结论。

1.2 代数方法

上小节我们给出了几何图形证明的方法,这一小节下面用解析计算的方法来推导此问题。解析计算其实就是利用能量守恒定律和动量守恒定律做代数计算,得到每次碰撞前后两个物体的速度改变规律,由此来确定能够完成碰撞的次数。与上小节几何法相比,几何法直观,但是过程其实是类比,物理意义不清晰。而下面的代数方法,则是明确利用实际的物理规律进行的计算,我们就来具体看一下。联立式(3)和式(4),可以求出

① <https://www.bilibili.com/video/av44598988/?redirectFrom=h5>

$$u_{2n} = \frac{1-\eta}{1+\eta}u_{2n-1} + \frac{2\eta}{1+\eta}v_n \quad (23)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{1+\eta}u_{2n-1} + \frac{\eta-1}{1+\eta}v_n \quad (24)$$

考虑物体 1 与物体 2 的前一次碰撞过程

$$u_{2n-2} = \frac{1-\eta}{1+\eta}u_{2n-3} + \frac{2\eta}{1+\eta}v_{n-1} \quad (25)$$

$$v_n = \frac{2}{1+\eta}u_{2n-3} + \frac{\eta-1}{1+\eta}v_{n-1} \quad (26)$$

同时利用关系 $u_{2n-1} = -u_{2n-2}$, $u_{2n+1} = -u_{2n}$ (碰墙后反向), 我们就可以求出关于 u_{2n-1} 的递推关系

$$u_{2n+1} = 2 \frac{\eta-1}{\eta+1}u_{2n-1} - u_{2n-3} \quad (27)$$

做变量代换, 公式可以整理为

$$u_{2n+1} - cu_{2n-1} = d(u_{2n-1} - cu_{2n-3}) \quad (28)$$

其中, 新引入的系数 c, d 满足以下关系

$$c + d = 2 \frac{\eta-1}{\eta+1} \quad (29)$$

$$c \cdot d = 1 \quad (30)$$

注意这里 c, d 都应该取复数, 求解可得

$$d = c^* = \frac{\eta-1}{\eta+1} \pm i \frac{2\sqrt{\eta}}{\eta+1} \quad (31)$$

式(28)是关于 $u_{2n-1} - cu_{2n-3}$ 的等比数列。同时为了下面计算方便, 我们引入 d 的相角 ϕ

$$\tan \phi = \frac{2\sqrt{\eta}}{\eta-1} = \frac{2}{\sqrt{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\eta}}} \quad (32)$$

这个角度看上去挺复杂的, 但是根据正切的倍角公式就可以知道这个 ϕ 的半角的正切值其实就是 $1/\sqrt{\eta}$, 即

$$\tan \frac{\phi}{2} = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad (33)$$

因为 $u_1 = 0$, 用迭代法可以求得

$$u_{2n-1} = \frac{d^{n-2} \left[1 - \left(\frac{c}{d} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{c}{d}} u_3 \quad (34)$$

$$v_n = \left\{ \frac{\eta-1}{2\eta} \frac{d^{n-2} \left[1 - \left(\frac{c}{d} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{c}{d}} - \frac{\eta+1}{2\eta} \frac{d^{n-1} \left[1 - \left(\frac{c}{d} \right)^n \right]}{1 - \frac{c}{d}} \right\} u_3 \quad (35)$$

这里需要特别说明的是, 虽然引入的 c, d 是复数,

但是根据式(28)就可以知道递推过程中, 每一项速度 u 都是实数。相应的, 根据式(26)每一项 v 也是实数。当物体 2 的速率达到临界速率, 即对于某个 n_0

$$u_{2n_0-3} > v_{n_0-1}, \quad u_{2n_0-1} \leq v_{n_0} \quad (36)$$

此时发生了 $2n_0 - 2$ 次碰撞, 即

$$N = 2n_0 - 2 \quad (37)$$

那现在我们来计算 n_0 , 它应该使得 $u_{2n_0-1} = v_{n_0}$, 即要求式(34)右边和式(35)右边相等。二者相除可以得到 n_0 满足方程

$$d^{2n_0-1} = 1 \quad (38)$$

这个方程最小根对应的 n_0 就是我们要求的解。^[4] 注意, 其他大的根对应的 n_0 相应的碰撞过程就不能发生了, 因为最小的根对应的 n_0 的物体 1 已经追不上物体 2 了。由式(32)中 d 的相角就可以求出碰撞次数 N , 并且可以方便地求大 η 极限为

$$N = 2n_0 - 2 = \left\lfloor \frac{2\pi}{\phi} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2\pi}{2\theta} \right\rfloor - 1 \rightarrow \sqrt{\eta} \pi \quad (39)$$

上面就是代数方法解析计算的结果, 可以看出结果和数值计算以及图形法给出的极限结果都是一样的。需要注意的是, 一维完全弹性碰撞的过程中, 竟然也会引入二维的虚数! 这是一个很有意思的事情。正是因为有虚数的引入, 才使得碰撞次数 N 和圆周率 π 产生了关系。从这个意义上讲, 这里也和几何方法类似, 采取了一些纯粹数学上的技巧, 才能够得到证明。实际上, 求总碰撞次数 N 也可以看作是一个数论的要求。

2 推广

上节对两体碰撞过程的结论做了细致的证明, 我们希望对这类问题做进一步的推广, 看上去很自然的想法可以有以下几点:

- (1) 物体 1 的初速度不为零的情况;
- (2) 三体碰撞情况;
- (3) 经典碰撞过程的相对论修正。

我们发现这些推广都可以得到非常有意思的结果, 下面就分别进行说明。

2.1 初速度都不为零的两体碰撞

第二节用几何图形法和代数法都证明了, 在物体 1 初始时刻静止的情况下两体完全弹性碰撞总的碰撞次数 N 满足式(15)。下面考虑物体 1 的初始速度 u_1 不等于零的两体完全弹性碰撞。

由第二节证明可以看出,几何图形法可以更为直观地解决这个问题,比如在第一种几何证明中改变图3中初始点位置即可。所以下面我们还是使用几何图形法来考虑这个问题。

依照和图3相似的画法,改变图中初始状态A就可以得到图5。首先说明以下,图5中:圆的半径满足

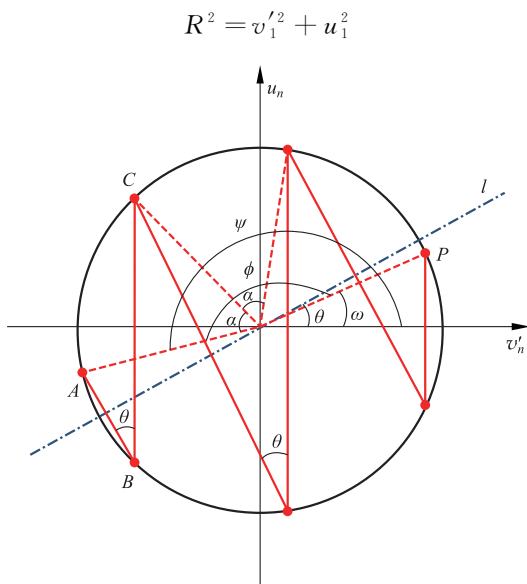


图5 初速度都不为零的两物体完全弹性碰撞图解

这其实只是总的能量改变了一个值而已。图5中新引入了一个和状态A相关的角度 ψ , ψ 用来表示A点和圆心相连的线段与 v'_n 正半轴的夹角。因为初始速度可以任意给定,所以其范围为

$$\psi \in [0, 2\pi) \quad (40)$$

这里 ψ 可以由两个物体初始速度计算,即

$$\psi = \arctan \frac{u_1}{v'_1} \quad (41)$$

由此可以看出两物体的初始速度是以 u_1/v_1 的形式影响整个系统的,这和第二节中所阐述的观点一致。我们计算 ψ 角度可以存在几个式(12)中完整的 α 角度,就可以进一步计算总碰撞次数了。由于情况比较简单,下面就分情况说明一下即可:

(1) 当 $\psi \in [0, \theta]$ 时,有 $0 \leq u_1 \leq v_1$,因此在此取值范围内不发生碰撞。

(2) 当 $\psi \in (\theta, \pi]$ 时, $0 \leq u_1, v_1 < u_1$ 先发生物体1和物体2的碰撞。只需用 ψ 替换式(15)中的 π ,可得

$$N = \left\lceil 2 \times \frac{\psi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)}{2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{\psi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} \right\rceil \quad (42)$$

(3) 当 $\psi \in (\pi, \pi + \theta)$ 时, $v_1 < u_1 < 0$,不能判定先发生物体1和物体2的碰撞还是物体1与墙壁的碰撞,具体情况由物体放置的位置和速度来决定。

(a) 若先发生物体1与物体2的碰撞,则和第2种情况一样。这里需要补充一下,当 η 趋向于无限大的时候, θ 趋于零。因此, ψ 趋向于 π ,总碰撞次数仍然趋向于 $\sqrt{\eta}\pi$ 。

(b) 若物体1先与墙壁发生碰撞,需用 $2\pi - \psi$ 替换式(15)中的 π ,并且加上开始时与墙壁碰撞的一次。可得

$$N = \left\lceil 2 \times \frac{2\pi - \psi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)}{2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} + 2 \right\rceil = \left\lceil \frac{2\pi - \psi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} + 1 \right\rceil \quad (43)$$

(4) 当 $\psi \in [\pi + \theta, 2\pi)$ 时, $u_1 \leq v_1, u_1 < 0$,先发生物体1与墙壁的碰撞和第3种情况(b)一样。

2.2 三体问题

这一小节,我们考虑一维三体碰撞过程。前面讨论的问题其实本质上也是一个三体问题,因为还有物体1和墙碰撞。所以,我们这里讨论的三体其实就是不再把墙看作是无限大质量的情况。具体的三体碰撞过程如图6所示,在图6中由左向右依次放置物体1、物体2和物体3,它们的质量分别为 m_1, m_2 和 m_3 。初始条件为物体1和物体2都静止放置在水平面上,物体3以向左的速度 v 碰撞物体2,然后物体2再碰撞物体1,物体2和物体1的速度表示为 u 和 w 。和两体碰撞过程规律一样,所有的碰撞过程都是完全弹性碰撞,满足动量守恒和能量守恒定律。具体的方程就不列出来了。需要说明的,当 $m_2 > m_3$ 或者 $m_2 > m_1$ 结果都是很平庸的。比如 $m_2 > m_3$,物体3碰撞物体2之后,速度改变很大。即使物体1再把物体2给弹回来,物体2顶多再和物体3碰撞一次,情况极为简单。所以最有意思的情况就是物体2的质量小于物体1和物体3的质量,物体2就有可能在另外两个物体之间多次往复碰撞。因此下面的讨论都将基于物体2是最轻的情况。

这里我们不妨定义两个大于1的参数

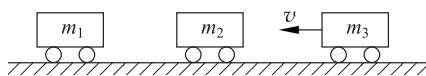


图6 三体碰撞示意图

$$\eta_1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad \eta_3 = \frac{m_3}{m_2} \quad (44)$$

同样,因为由动量守恒和能量守恒所确定的方程都是齐次方程,并且物体 1 和物体 2 的初始速度都为零,所以整个系统总碰撞次数 N 仅与这两个参数相关。类比于两体碰撞第一种几何方法证明的情况,会发现表示系统状态的点落在一个由能量守恒定律决定的球面上。几何图形法似乎是可以计算出来总碰撞次数 N ,但是当我们试图在一个球里画图找到类似的规律时,会发现每次碰撞所对应的圆会随着碰撞过程的进行在球内不停地变化很难找到规律。同时我们尝试使用解析的办法进行计算,但是在计算的过程中我们发现要在四个方程里面找到递推公式也是非常困难的。我们也试图使用另外的办法来解决这一问题,但是发现此时情况太过复杂,很难给出 N 的解析结果来。因此,这里我们选择用数值计算的方法处理三体碰撞问题。首先由最简单的 $m_1 = m_3 \gg m_2$ 的情况入手,即取 $\eta_1 = \eta_3 = \eta$ 。因为当 η 很小的时候, N 的值分立跳跃,而我们关心的是大 η 极限情况,所以我们选择在 $\eta \in [10^2, 10^6]$ 的范围内对总碰撞次数 N 进行数值求解,并将数值求解的结果以图像的形式呈现在图 7(a)中。在这张图中能看出碰撞次数 N 随着 η 的增大而逐渐增大,而且呈现了很规律的形式。参考第二节中大 η 极限下,两体碰撞过程总碰撞次数 N 趋向于 $\sqrt{\eta}\pi$ 。我们发现了三体情况一个非常有意思的结果:大 η 极限下,三体碰撞过程总碰撞次数 N 也趋向于一个正比于 $\sqrt{\eta}$ 的极限,而且还是一个极为特殊的数值

$$N \rightarrow \sqrt{\frac{\eta}{2}} \pi \quad (45)$$

为此我们把纵坐标替换为 $N/\sqrt{\eta}$,相关结果展示在图 7(b)中。我们发现, $N/\sqrt{\eta}$ 很快就趋向于 $\pi/\sqrt{2}$ 的极限。为了展示其效果,我们就在 $[2.17, 2.23]$ 很窄的范围展示 $N/\sqrt{\eta}$ 的取值。这个定值的存在似乎隐含了某种规律,因此我们进一步研究了一种稍微复杂的情况,并且同时对第二节所讨论的情况加以验证。

我们选定 $\eta_1 = 10^6$, 并且选择 η_3 的取值范围由 10^2 变化到 10^{10} 。相关结果展示在图 8 中,其中图(a)是总碰撞次数 N 随 η_3 变化图;图(b)是 $N/\sqrt{\eta_3}$ 随 η_3 变化图。从左图我们可以看到,碰撞次数 N 在 η_3 和 η_1 的大小可比拟的时候增加得很快,在 η_3 很小和很大的时候增加的非常缓慢。

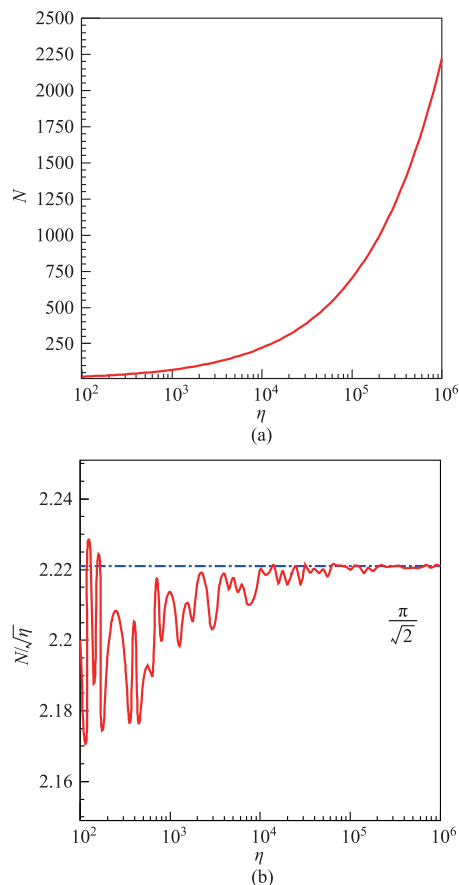


图 7 $\eta_1 = \eta_3 = \eta$ 时三体碰撞数值结果图
(a) 碰撞次数和 η 的关系; (b) N 的大 η 极限行为

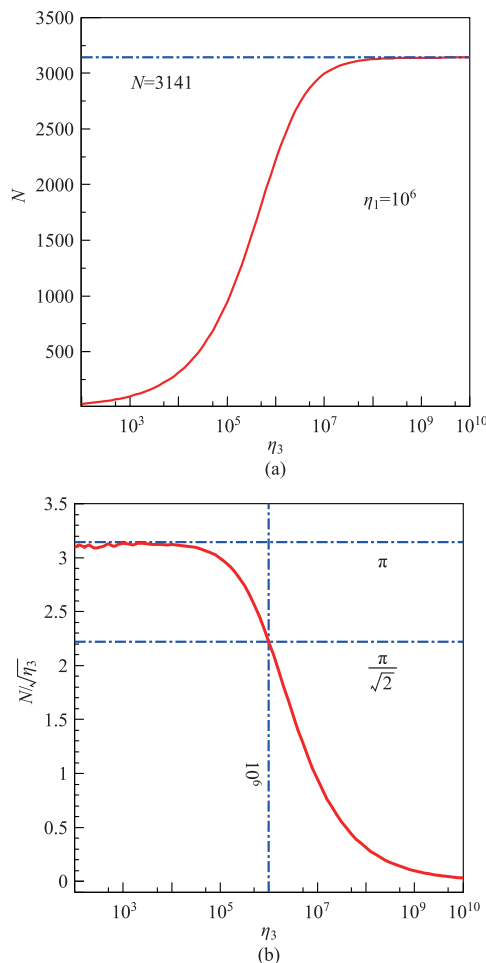
并且在 η_3 足够大的时候极限值为 3141。(b)图显示 $N/\sqrt{\eta_3}$ 在 η_3 远小于 η_1 时为 π ;在 η_3 等于 η_1 时为 $\pi/\sqrt{2}$;在 η_3 远大于 η_1 时,很快趋向于零。我们可以这样来理解这些结果:

(1) 由图 8 可以看出,当 $\eta_1 \gg \eta_3 \gg 1$ 时,物体 1 可以被认为质量趋于无穷大,它就等效于一堵墙。这种情况和前文第二节中证明的情况相同,因此 N 应该和式(16)结果一致 $N \rightarrow \sqrt{\eta_3} \pi$ 。

(2) 当 $\eta_3 = 10^6$ 时, $\eta_1 = \eta_3$ 。这种情况和本节前文中所计算 $\eta_1 = \eta_3 = 10^6$ 的情况相同,也就得到 $N/\sqrt{\eta} = \pi/\sqrt{2}$ 的结果。

(3) 当 $\eta_3 = 10^{10}$ 时, $\eta_1 \ll \eta_3$ 。我们可以把这种情况转换到物体 3 的静止系中进行考虑,相当于物体 1 和物体 2 都以速度 $-v$ 向物体 3 运动。这就相当于在上一小节情况 4 中取 $\phi = \pi + \theta$,注意此时式(43)中 $\eta = \eta_1 = 10^6$,因此可以求出总碰撞次数

$$N = \left[\frac{2\pi - \phi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} + 1 \right] = \left[\frac{\pi - \theta}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)} + 1 \right] = 3141 \quad (46)$$

图 8 η_1 固定、 η_3 变化情况数值结果图(a) 碰撞次数 N 随 η_3 变化图; (b) $N/\sqrt{\eta_3}$ 随 η_3 变化图

受到前面两种漂亮结果

$$(i) \lim_{\eta \rightarrow +\infty} N = \sqrt{\eta} \pi; \quad (ii) \lim_{\eta \rightarrow +\infty} N = \sqrt{\frac{\eta}{2}} \pi$$

的鼓舞,特别是方程(45)中 $\sqrt{\eta/2}$ 的存在,给了我们很大的启发,我们希望找到一个普适的方程

$$N = F(\eta_1, \eta_3) \quad (47)$$

能完全描述三体碰撞次数问题。前面的计算过程中,碰撞次数 N 总是更倾向于依赖数值较小的 η 。因此我们猜测 N 的形式为

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_3}}} \pi \quad (48)$$

为此,我们分别选择对 $\eta_1 = 10$ 、 $\eta_1 = 10^2$ 、 $\eta_1 = 10^3$ 和 $\eta_1 = 10^4$ 的情况用数值求解的办法来验证我们猜想的方程。在图 9 中,四条黑色曲线分别对应于选择不同数值的 η_1 时,方程(48)所对应的函数曲线。图中 $\circ$ 、 $\triangle$ 和 $\times$ 代表对相应 η_1 数值计算获

得的数据点。可以看出,数值模拟的结果和猜想曲线符合的非常好。所以从数值上看,方程(48)是正确的。我们试着解析证明方程(48),问题太过复杂,没有成功。这里我们不妨把它作为一个题目留给读者思考解答。^①

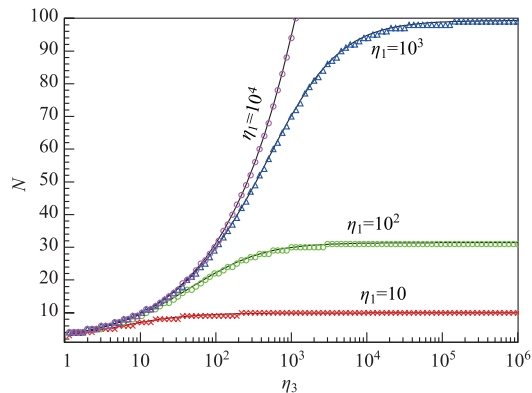


图 9 三体碰撞数值结果与猜想函数曲线的比较图

$\circ$ 、 $\triangle$ 和 $\times$ 表示取不同 η_1 数值计算获得的数据点

2.3 相对论修正

一维完全弹性碰撞过程中,在物体的运动速度远低于光速的情况下,我们可以采用经典力学的办法进行处理。但是当物体的速度接近于光速时,经典力学的方法将不再适用,此时我们必须考虑相对论修正。两体的相对论碰撞过程虽然也保持动量守恒,能量守恒,但是形式却复杂很多。这里我们简单说明碰撞过程应该满足的方程,动量守恒和能量守恒式(1)和式(2)此时应该修改为^[6]

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (49)$$

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \quad (50)$$

仅仅由此是不能确定碰撞过程的,我们还需要利用质能关系

$$E_1^2 - P_1^2 c^2 = E_1'^2 - P_1'^2 c^2 = m_1^2 c^4 \quad (51)$$

$$E_2^2 - P_2^2 c^2 = E_2'^2 - P_2'^2 c^2 = m_2^2 c^4 \quad (52)$$

公式中 c 是真空中光速。具体计算碰撞初、末态其实是有一套系统的方法^[7],即先洛伦兹平移到整个系统的质心系中,然后计算一个静止的静止质量等于系统总静止质量的物体分为两个静止质量分别为 m_1, m_2 的物体,然后通过洛伦兹变换变换到要研究的参考系即可。

一方面由于在相对论修正的处理过程中会有洛伦兹因子

^① 经过后来作者调研得知,文献[5]中已经给出了本文猜想公式的证明,感兴趣的读者可以阅读该文献。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (53)$$

的存在,速度表达式将非常复杂。另一方面,式(1)和式(2)是上述相对论性方程按

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (54)$$

进行展开时领头阶的贡献,当考虑 β 的高阶项贡献后将不会有像式(3)明显的圆方程。由于相对论碰撞过程比较复杂,我们没有找到解析结果。因此相对论情况下碰撞次数可能不存在和圆周率 π 的简单依赖关系。

和前面一样,我们编写了数值程序对碰撞过程进行模拟,从数值计算中可以得到以下结果:我们用图10来展示相对论修正的性质。图10左图展示两体碰撞总碰撞次数 N 在不同 β 情况下随着 η 改变的情况,图中 $\beta=0.01(\circ)$ 、 $\beta=0.5(\triangle)$ 和 $\beta=0.9(\square)$ 。我们也画出了图1中的经典结果(+,图中标记为“CL”)进行对比。可以看出当 $\beta=0.01$ 的时候,相对论结果和经典结果符合的非常好。随着物体2的初速度逐步接近光速,碰撞次数 N 不再随着 η_3 的增大,按照 $\sqrt{\eta_3}\pi$ 的规

律改变,而是变得很小。这种性质的原因在于,当物体2的质量远远大于物体1的质量时,除了第一次和最后一次碰撞外,整个碰撞过程都可以看作是一个大质量相对论物体和一个近似无质量的物体的碰撞。具体分析就会发现,这样碰撞过程中,物体之间传递的相对能量(相比于系统总能量)远远大于经典物理中两个物体碰撞传递的相对能量。因此物体2在很少的几次碰撞之后就会反向。此时两个物体的质量比 η 就是整个物理过程的次要因素,随着 β 的增大, N 逐渐与 η 失去相关性是正常现象。

另外一个结果就是三体碰撞情况对应于图8的相对论修正,相应的结果展示在图10(b)中。与3.2节讨论的结论不同,当 β 增大,逐渐接近于1的时候, $N/\sqrt{\eta_3}$ 就越越来越快的趋向于零。其原因和上段所讨论的一样,这里就不重复了。

3 结语

本文总结整理了网络上两体碰撞总碰撞次数和圆周率关系的相关讨论和证明,分为几何图形和代数运算两类方法,分别给出较为清晰的说明。然后我们对这个问题进行了推广:当两个物体初速度都不为零的情况下,几何图形法可以让我们方便地计算总的碰撞次数;三体碰撞的情况更为复杂,但是我们猜到了一个非常漂亮的解析结果

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_3}}} \pi \quad (55)$$

数值计算表明这个猜想是正确的,期待读者能够给出其解析证明;当考虑碰撞过程的相对论修正之后,总碰撞次数就与物体的质量比失去了明显的相关性。当然,相对论碰撞次数的问题还需要做更加深入的研究。

参 考 文 献

- [1] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [2] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 力学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 光学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 吴崇试. 数学物理方法专题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.
- [5] REDNER S. A billiard-theoretic approach to elementary one-dimensional elastic collisions[J]. Am. J. Phys., 2004, 72: 1492-1498.
- [6] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [7] 肖振军, 吕才典. 粒子物理学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2016.

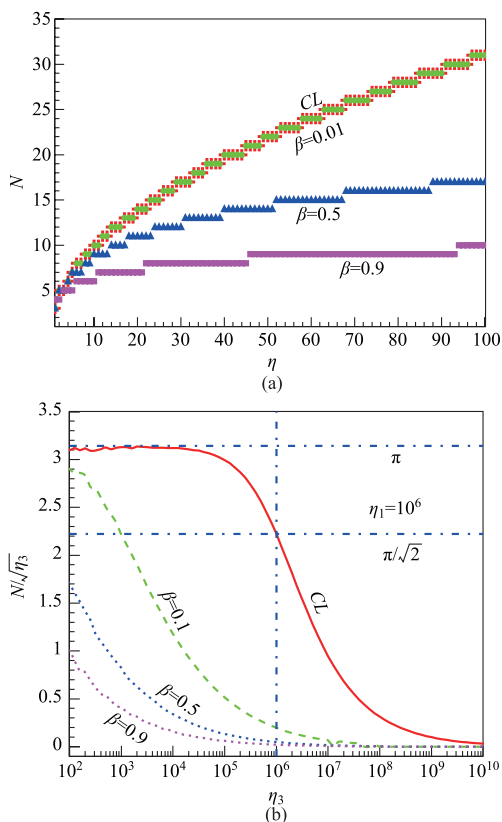


图10 经典情况和相对论修正比较图
(a) 两体碰撞经典与相对论的对比; (b) 三体碰撞经典与相对论的对比