

非完全弹性碰撞问题的讨论

李济魁 张福林

(天津大学理学院, 天津 300072)

摘 要 一维对心碰撞根据机械能的改变分成完全弹性碰撞、非完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞三种情况。本文通过比较完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞能量损失的差别, 引入恢复系数对这三种情况给出统一的描述。恢复系数的取值有助于我们更好的理解这三种碰撞的区别和联系。并且, 这一做法可以自然地与质心参考系、质心运动定理和柯尼希定理等基本概念相联系。本文最后将恢复系数推广到普遍的非对心碰撞中。

关键词 碰撞; 质心系; 恢复系数

DISCUSSION ON THE PROBLEM OF INCOMPLETE ELASTIC COLLISION

LI Jikui ZHANG Fulin

(School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract According to the change of mechanical energy, one-dimensional centripetal collision can be divided into elastic collision, perfectly inelastic collision and non-perfectly elastic collision. In this paper, these collisions have been described in a unified way by the restitution coefficient, which is introduced by comparing the energy loss of elastic collision and perfectly inelastic collision. The value of the restitution coefficient can help us understand the difference and connection between these collisions. Moreover, this approach can be naturally related to the basic concepts including the center-of-mass system, the theorem of motion of center-of-mass and the Koenig theorem. Finally, the coefficient of restitution is extended to the general non-central collisions.

Key words collision; center-of-mass system; coefficient of restitution

在不受外力的碰撞问题中总是存在着动量守恒, 但是动能却不一定会守恒, 我们希望能用一个简单的量来完整的描述两体的碰撞问题。对于不同的碰撞, 求解的方法并不相同, 这突出了不同碰撞之间的区别, 但是削弱了碰撞之间的共性, 会使得初学者无法对碰撞有一个整体的把握。而恢复系数 e 的应用, 使得我们可以利用同一方程组来求解不同的碰撞。在从实验室系引入恢复系数 e 的过程中, 我们会自然地观察到一些物理量的形式在质心系中有更好的解释。质心系中的质心

运动定理(即牛顿第二定律)可以直接推导出动量守恒。柯尼希定理则将系统的动能分为两部分。这与我们在实验室系中将会损失的能量和保持不变的能量分开是对应的。本文第二小节将从质心系的角度简单地讨论恢复系数的引入。在第三小节中, 我们将对非对心碰撞进行简单的讨论。

1 实验室系中的碰撞

为了简化问题, 我们考虑一维的对心碰撞(见图 1)。

收稿日期: 2021-03-02; 修回日期: 2021-07-19

基金项目: 天津大学 2021 年本科教育教学改革研究项目(新时代下一流课程大学物理课程组建设与实践, 面向未来智能机器与系统平台的大学物理教学改革)

通讯作者: 张福林, 男, 副教授, 主要从事物理教学和量子物理的研究, flzhang@tju.edu.cn。

引文格式: 李济魁, 张福林. 非完全弹性碰撞问题的讨论[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 31-35.

Cite this article: LI J K, ZHANG F L. Discussion on the problem of incomplete elastic collision[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 31-35. (in Chinese)

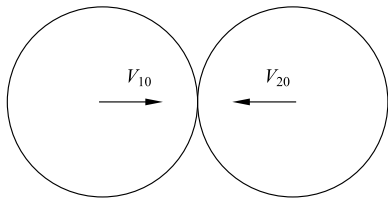


图1 一维碰撞

根据碰撞后动能的情况,将碰撞分为三种。首先是完全弹性碰撞,在力只与球心的距离有关时,压缩过程和弹开的过程每个球受到的影响都是一样的,正好弹开后能回到原来的动能;其次是非完全弹性碰撞,当弹开时受到的力小于压缩时受到的力,弹开后小球的动能小于原来的动能出现了动能的损失;最后我们将动能损失最大的情况称为完全非弹性碰撞,两个小球碰撞后粘在一起。

在这个系统中,令 m_1 为第一个小球的质量, v_{10} 为第一个小球的初始速度, v_1 为第一个小球碰撞后的速度; m_2 为第二个小球的质量, v_{20} 为第二个小球的初始速度, v_2 为第二个小球碰撞后的速度。因为碰撞中不受外力,所以有动量守恒

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

但是动能在这三种情况下却并不都是守恒的。对于完全弹性碰撞,有动能守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

对于完全非弹性碰撞,动能不守恒,并且动能损失最大,利用碰撞后两个小球速度相同 $v_1 = v_2 = v$ 来计算动能的损失,由动量守恒得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v \quad (3)$$

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

在碰撞中,损失的动能 ΔE_k 为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)得

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 + m_2) v_{10}^2 + m_2 (m_1 + m_2) v_{20}^2}{m_1 + m_2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_{10}^2 + m_2^2 v_{20}^2 + 2 m_1 m_2 v_{10} v_{20}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_{10} - v_{20})^2 \end{aligned} \quad (6)$$

最大的动能损失 $\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_{10} - v_{20})^2$ 和最小的动能损失 0 (能量守恒) 这两种极端的情况已经给出,对于非完全弹性碰撞,我们希望找到一个合适的参数来描述能量非最大损失的碰撞。下面观察碰撞前后的动能,并且希望能从动能的形式上看出会损失的能量是由什么参数决定的。碰撞前的动能为

$$\begin{aligned} E_{k0} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \Delta E_k \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \end{aligned} \quad (7)$$

虽然这个结果是从完全非弹性碰撞中得到的,但是这样的形式完全由初始时的参数(初速度)来描述,与碰撞的具体形式无关,并且用来分析碰撞的过程会非常方便。因此,碰撞后的动能也可以写作这种形式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式(7)和式(8)的第一项由动量守恒保证,在这三种情况下都是相等的。第二项决定了碰撞过程能量是否守恒,并直接给出了能量不守恒时的能量损失。只有第二项相等时,有能量守恒。所以在式(2)描述的动能守恒中,真正由动量守恒决定的应该是第二项。第二项相等才是动能守恒的单独要求。动能守恒时,式(7)和式(8)的第二项相等,式(2)描述的动能守恒可以写为

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad (9)$$

当动能损失最大的时候,由相对速度表示的这一项应该为零,这部分能量在碰撞中全部损失了,即

$$0 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad (10)$$

观察式(9)和式(10)并考虑能量损失非最大的情况,我们可以用一个在 $[0, 1]$ 之间的一个参数来描述碰撞后由相对速度表示的那部分能量。这个参数就是牛顿引入的恢复系数 e , $e \in [0, 1]$ 。那么对于普遍的碰撞,这部分能量可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \times e^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

在这里我们要注意的,虽然恢复系数在式(11)是由碰撞前后的速度表示的,但是这里只是一个比值定义,恢复系数只由系统中物体本身的性质来决定,恢复系数决定了碰撞的结果。当 $e=1$ 时,对应完全弹性碰撞;当 $e=0$ 时,对应完全非弹性碰撞;当 $e \in (0,1)$ 时,对应非完全弹性碰撞。在由动量守恒定律约束并且已知初始速度的一维碰撞中,只需要一个参数就可以完全描述碰撞。这个参数就是恢复系数 e 。下面利用动量守恒和恢复系数来计算碰撞后的速度。化简式(11)得

$$-e \times (v_{10} - v_{20}) = v_1 - v_2 \quad (12)$$

这里取负号用来表示碰撞后相对速度改变方向。将式(12)与动量守恒式(1)联立解得

$$\begin{cases} v_1 = v_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+e)(v_{10} - v_{20}) \\ v_2 = v_{20} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+e)(v_{10} - v_{20}) \end{cases} \quad (13)$$

由此可知,恢复系数决定了碰撞的过程,同时一个小球的质量、初始的相对速度、恢复系数越大,碰撞后另一个小球的速度改变越大。

2 质心系

式(7)和式(8)这样表示动能的形式与柯尼希定理^[1,2,3]是一样的。系统在实验室系的动能分为两部分:一部分是相对速度决定的,相对于质心系的动能、另一部分是随质心整体平动的动能,即

$$E_k = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \mu u^2 \quad (14)$$

其中, $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ 为两个小球的折合质量, $u = v_{10} - v_{20}$ 为相对速度, $M = m_1 + m_2$ 为系统的总质量, $V_c = (m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) / (m_1 + m_2)$ 为质心的速度,等号右边的第一项对应了式(7)和式(8)的第一项,即质心的动能,在碰撞中保持不变,第二项对应了在碰撞中会损失的能量。在我们讨论的两体碰撞问题中,采用这样一个坐标系——质心系,事情就会变得更清楚。在质心系中,根据柯尼希定理,我们可以直接写出式(7)和式(8),而不需要从式(3)开始的推导。从质心的运动定理

出发我们可以得到为什么完全非弹性碰撞的能量损失最大,并且可以直接看到式(11)表示的能量损失。

质心运动定理为

$$F_{\text{外}} = m a_c \quad (15)$$

在没有外力的两体碰撞中,质心的加速度等于零, $a_c = 0$ 。即,质心的速度和动能都不变。所以在碰撞中会损失的能量只能是相对于质心系的动能 $E_{\text{相对}} = \frac{1}{2} \mu u^2$ 。用 $e^2 \times \frac{1}{2} \mu u^2$ 表示碰撞后的相对动能

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \\ &= e^2 \times \frac{1}{2} \mu u^2 \\ &= e^2 \times \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \end{aligned} \quad (16)$$

那么能量的损失为

$$\Delta E_k = (1 - e^2) \times \frac{1}{2} \mu u^2 \quad (17)$$

当两个小球做完全非弹性碰撞时, $V_c = v_1 = v_2$,碰撞后相对于质心系的动能为零,能量损失最大。很自然的是,这里引入的系数 $e \in [0,1]$,就是上面提到的恢复系数。

我们在展示了实验室系中的两体碰撞后,在这里又简单地讨论了使用质心系引入恢复系数的方便。下面我们将恢复系数推广到普遍的碰撞。

3 非对心碰撞

对心碰撞是较为理想的情况。在生活中遇到的碰撞都是非对心碰撞(比如日常打台球)^[4]。在本节中,我们将根据上述结论对非对心碰撞做一些简要的讨论,如图2所示。

若两球发生非对心碰撞,速度会不在原来的方向。首先,假设两球初速度在水平方向,并且两球在碰撞中只受到沿球心连线方向的弹力,由受力分析可知,碰撞后两个小球的速度只能在两球心的连线和水平速度构成的平面上。所以两小球的速度总在同一平面上,不妨取此平面为 xy 平面(见图3)。这样便成了二维的问题(在这里我们只考虑了两球的速度与球心的连线处在同一平面的情况,因为即使在碰撞中还有垂直于球心连线方

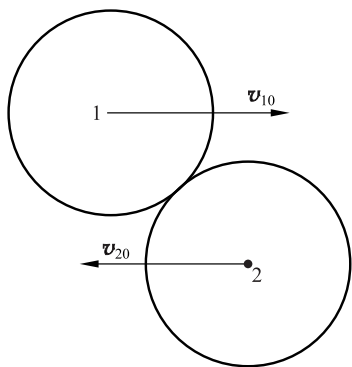


图2 非对心碰撞

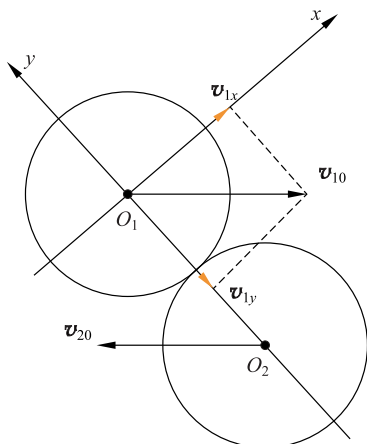


图3 非对心碰撞速度分解

向的速度,但是这个方向不受力,速度不会发生变化,因此不会对结果产生影响)。令 m_1 为第一个小球的质量, v_{10} 为第一个小球的初始速度, v_1 为第一个小球碰撞后的速度; m_2 为第二个小球的质量, v_{20} 为第二个小球的初始速度, v_2 为第二个小球碰撞后的速度。 V_c 为碰撞前质心的速度, V'_c 为碰撞后质心的速度。

若两个小球发生非对心碰撞,则

$$V_c = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$V'_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

根据质心运动定理式(15),外力为零,加速度为零, $V_c = V'_c$, 即

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (18)$$

由上式可知,不管是在对心碰撞中还是在非对心碰撞中,牛顿第二定律都可以保证系统满足动量守恒。由柯尼希定理可知,系统的动能 $E_k = \frac{1}{2} \mu u^2 + \frac{1}{2} M V_c'^2$ 。显然,不管是完全弹性碰撞的

动能守恒还是完全非弹性碰撞的能量损失 $\frac{1}{2} \mu u^2$,

在非对心碰撞中并不会有所不同。所以对于非完全弹性碰撞,碰撞后系统相对于质心系的动能仍然可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \times E^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

同对心碰撞中的思路相同,引入新的参数 E 来表征碰撞中的能量损失处在弹性碰撞和完全非弹性碰撞之间。但是碰撞前后的相对速度却不一定反向,如果想知道碰撞后小球相对速度的改变,还需要更多的碰撞细节,比如两个小球球心的高度、小球碰撞时沿与球面相切的方向是否存在其他的力等等。即式(19)不能直接地写成式(12)。

在这里我们求解一种特殊情况下的碰撞。假设碰撞前球心连线的方向是已知的,并且在碰撞中小球只受到沿球心连线方向的弹力。在图3中,我们将两个球心的连线方向设为 y 轴。与球心连线方向垂直的方向为 x 轴。将两球的速度沿该坐标轴分解,如图3所示, $v_{10} = v_{1x} + v_{1y}$, $v_{20} = v_{2x} + v_{2y}$ 。受力分析,系统不受外力,碰撞过程中小球1只会受到沿着 y 轴负方向的力,同样小球2只会受到沿着 y 轴正方向的力。因此 v_{1x} 和 v_{2x} 在碰撞过程中始终保持不变。这样我们就可以将整个碰撞看作 y 轴方向上的一维对心碰撞。令 v'_{1y} 为碰撞后小球1在 y 轴的速度, v'_{2y} 为碰撞后小球2在 y 轴的速度。根据前面的结论式(13)有

$$v'_{1y} = v_{1y} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + e) (v_{1y} - v_{2y}) \quad (20)$$

$$v'_{2y} = v_{2y} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + e) (v_{1y} - v_{2y}) \quad (21)$$

利用恢复系数 e 解出 y 方向的碰撞后,就可以知道整个非对心碰撞的结果。但是由于系统多了一个方向的自由度,不再满足式(12),联立式(20)和式(21)得

$$v'_1 - v'_2 = -e(v_{10} - v_{20}) + (1 + e)(v_{1x} - v_{2x}) \quad (22)$$

所以,式(12)变成了式(22)。将式(22)中的矢量

写为坐标的形式, $v_{10} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix}$, $v_{20} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix}$, $v'_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v'_{1y} \end{bmatrix}$, $v'_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v'_{2y} \end{bmatrix}$ 。于是式(22)可以写为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 &= \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{2x} \\ -e(v_{1y} - v_{2y}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{2x} \\ v_{1y} - v_{2y} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}) \quad (23)
 \end{aligned}$$

于是我们得到 $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix}$, 并将其称为二维恢复矩阵。式(23)可以写为

$$\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 = E \cdot (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}) \quad (24)$$

当 $v_{1x} = v_{2x} = 0$ 时, 非对心碰撞变为对心碰撞, 式(24)展开为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v'_{1y} - v'_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{1y} - v_{2y} \end{bmatrix}$$

即

$$v'_{1y} - v'_{2y} = -e(v_{1y} - v_{2y}) \quad (25)$$

式(25)与式(12)是一样的。

在考虑普遍的三维碰撞时, 我们在实验室中观察两个球体。这时我们只需要在图 2 的情况下, 为两个球添加沿垂直于纸面的方向的速度即可。我们始终取两个球心的连线方向为 y 轴, 而平行于纸面的速度是任意的。类似二维情况的讨论, 假设初始速度为 $\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{1x} + \mathbf{v}_{1y} + \mathbf{v}_{1z}$, $\mathbf{v}_{20} = \mathbf{v}_{2x} + \mathbf{v}_{2y} + \mathbf{v}_{2z}$ 。而会改变的速度为 $\mathbf{v}_y$, 与式(20)和式(21)相同。将速度写为矢量的形式,

$$\mathbf{v}_{10} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_{20} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v'_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v'_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix},$$

同理我们有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 &= \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{2x} \\ -e(v_{1y} - v_{2y}) \\ v_{1z} - v_{2z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}) \quad (26)
 \end{aligned}$$

于是我们得到 $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 并将其称为

三维恢复矩阵。式(23)可以写为

$$\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 = E \cdot (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}) \quad (27)$$

当 $v_{1z} = v_{2z} = 0$ 时, 三维非对心碰撞变为二维非对心碰撞形式; 当 $v_{1z} = v_{2z} = 0, v_{1x} = v_{2x} = 0$

时, 三维碰撞变为一维对心碰撞。

在这样的非对心碰撞中, 如果知道两个小球的速度方向和两个球心连线方向(碰撞细节), 碰撞依然可以使用对心碰撞中的恢复系数 e 来描述。如果想要非对心碰撞和对心碰撞结果的形式保持一致, 那么就需要引入一个同时由物体本身的性质和碰撞细节(两个球心连线方向等)决定的恢复矩阵 E 。

4 结语

在本文中, 我们首先从实验室系出发, 在一维对心碰撞中引入了恢复系数 e 来统一描述弹性碰撞、完全非弹性碰撞和非完全弹性碰撞, 提供了一种认识这三种碰撞的新角度。然后利用质心运动定理和柯尼希定理简化了上述过程, 使其更容易理解。最终沿着相同的思路将恢复系数推广到非对心碰撞。

生活中有诸多碰撞的现象。例如, 台球属于二维非对心碰撞的问题, 通常情况下两个台球碰撞的接触面的法线方向可以认为是本文讨论中定义的 y 轴。并且, 碰撞的问题在物理中是非常基本的模型, 可以用于得到理想气体的温度与分子平均平动动能之间的关系^[5]。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 138-144.
- [2] 王向贤, 程民治, 朱仁义. 一个不容忽视的教学问题——巧用柯尼希定理求解两体碰撞[J]. 物理与工程, 2008, 18(4): 18-20. WANG X X, CHENG M Z, ZHU R Y. An indispensable teaching problem—Skill fully use the Koenig theorem to solve the binary Collision[J]. Physics and Engineering, 2008, 18(4): 18-20. (in Chinese)
- [3] 陈刚, 阮中中. 柯尼希定理运用于两体问题的讨论[J]. 物理与工程, 2010, 20(1): 21-22+31. CHEN G, YUAN Z Z. Discussion on the Koenig theorem applied to two-body problem[J]. Physics and Engineering, 2010, 20(1): 21-22+31. (in Chinese)
- [4] GREINER W, BROMLEY D. Classical mechanics: Point particles and relativity[M]. New York: Springer-Verlag, 2004: 141.
- [5] 费恩曼, 莱顿, 桑兹. 费恩曼物理学讲义(第1卷)[M]. 郑永令, 华宏鸣, 吴子仪, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013: 405-408.