



深入理解“拓展的麦克斯韦方程组” ——2.0 版

王 青

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘 要 笔者进一步的理解, 针对运动介质拓展的麦克斯韦方程组除 $\mathbf{P}_s$ 项之外的部分, 是可以以用非常规的伽利略变换重新定义电磁场的场强, 来构造出的不具有显式协变性的方程组, 也称赫兹方程。它们与标准的麦克斯韦方程组完全等价, 只是场量定义不同所给出的方程组变形表达。赫兹方程与实验并不相符, 只有把伽利略变换扩充成洛伦兹变换, 经过相对论修正后才与实验相符合。

关键词 麦克斯韦方程组; 拓展; 赫兹方程; 等价; 相对论修正

DEEPLY UNDERSTANDING “EXPANDED MAXWELL EQUATIONS” —VERSION 2.0

WANG Qing

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract According to author's further understanding, extended Maxwell equations for the moving media except $\mathbf{P}_s$ terms, is the non-covariant equations, or Hertz equations, constructed by redefining strengths of electro-magnetic fields through unusual Galilean transformation. They are equivalent to the standard Maxwell equations, with different field strength definitions which lead deformation of equations. Hertz equations do not consistent with experiment data, except we change Galilean transformation to Lorentz transformation and include in corrections of special relativity.

Key words Maxwell equations; extended; Hertz equations; equivalent; corrections of special relativity

当前“运动介质上的麦克斯韦方程组”引发社会尤其是学术界和高校针对电磁学和电动力学的讨论热潮, 作为在清华教这两门课的教师, 从业三十多年第一次看到这样的景象, 激动兴奋之余, 总怕错过这个千载难逢的机遇, 希望为深度理解这两门课的核心内容做点事情, 达到在社会上宣传、

科普电磁场的观念及其理解和表达的目的。

电磁学从初中起就开始进入物理课的教学大纲, 到高中加深, 大学再进一步深化, 后继接续更加理论化的电动力学课。这两门课在这些年大学的物理课教学中, 相对量子物理(或近代物理)和量子力学, 属于不那么受到待见、经常会被打压的

收稿日期: 2022-01-30

作者简介: 王青, 男, 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会主任, 教育部义务教育物理课程标准修订组成员, 清华大学物理系教授, 主要从事理论物理的科研和教学工作, 研究方向为量子场论与基本粒子理论, wangq@mail. tsinghua. edu. cn。

引文格式: 王青. 深入理解“拓展的麦克斯韦方程组”——2.0 版[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 3-6.

Cite this article: WANG Q. Deeply understanding “Expanded Maxwell equations”—Version 2.0[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 3-6. (in Chinese)

课程。师生们觉得它内容陈旧、难度大,学生不爱学,老师不爱教。早在2013年教育部高等学校大学物理教学指导委员会华东地区工作委员会针对国内高校最密集的华东地区六省一市中的53所高校的师生发放的四千多份调查问卷统计中^[1],超过半数多的回复把电磁学列为大学物理最难学的内容。各校针对教学改革的资源投入多向其他物理内容倾斜。这次学术界的争议显示了经典的电磁学及其后继的经典电动力学理论课在科技前沿的作用和影响,是非常好的促进学生和教师重新重视这两门课的机会。

近十年来,为了提升学生对这两门课的兴趣,笔者在清华大学物理系开设的以电磁学为主的《费曼物理学II》课上从2014年起,《电动力学》课上从2018年起,实行在课堂上教师不再按传统方式授课,而完全改为讨论的问题驱动式的互动教学。在这两门课中最核心的内容是麦克斯韦方程组,而它所讨论的电场和磁场是物理学的基础。在笔者所开展的针对它们的课堂讨论中,场的变换和场理论的协变性及麦克斯韦方程组等都是难点,从图像上不太容易理解。为此,笔者几年前曾以“理解经典电磁学理论”为题撰写了专门的教学文章^[2]。前些日子,结合近期关于“拓展的麦克斯韦方程组”^[3]的争议,又撰写了题为“理解王中林院士‘拓展的麦克斯韦方程组’”的文章^[4]。本以为事情到此为止,因为看到不少读者评价文章^[4]“把事情说清楚了”。新近又看到中科院理论物理所的同行人放到arXiv网站上,被人们误解为支持王院士工作的两篇文章^{[5][6]}及其所引用的相关文献,促使笔者更深度地思考文章^[4]中的理解。发现确有值得深度挖掘之处,而且这些进一步的理解对前面提到的场的变换和场理论的协变性及麦克斯韦方程组的观念和图像是一种冲击,有利于我们在电磁场的教学中更好地理解以及看待、定义和表达它们。本文即在这些背景考虑之下,在文章^[4]的讨论基础上,作为对这几天的后续发展的回应,结合关于“拓展的麦克斯韦方程组”的争议,进一步开展一些更深入的学术讨论。

在文章^[4]中,笔者指出对运动的电磁场可以给出两种描述方式:一种是理论物理中标准的参考系变换方式(这时场和时空坐标都要参与参考系的变换),从实验室参考系变换到运动者(介质)静止的系中;另一种是运动的场线方式,通过使坐

标含时间来反映运动(和质点运动学的讨论模式相仿),这时场对时间的求导需要考虑进坐标含时间的额外贡献(类似于流体力学的随体导数)。针对电磁场,笔者指出两种描述是不等价的,因为电磁场的场强不是参考系变换下的标量,形象地说它们在变换下不再是刚性不变的。进一步笔者分两种情形进行了简单分析:一种是参考系变换代表真实的物理,另一种是参考系变换不代表真实的物理。鉴于后者过于奇葩,不为学界所接受,本文只限于讨论前者,很多做理论物理的人认为只要承认标准的变换方式,也就是前者就足够了,不再有兴趣深入探究其他另类的描述。在文章^[4]中我们也同样地,对这种情况只讨论到这时运动的场线不再代表在运动的场点上所真实感受到的电磁场(那它究竟代表什么没再探究),就此打住、没继续深入。本文从这里出发,接着往下进行详细的分析和讨论。

之所以要如此咬文嚼字、追根求底地深入进行死缠烂打,原因是王院士的拓展,及最新的讨论^{[5][6]}及其所引用的早期文献目标都最后是这个运动的场线框架。很多人询问这些新出现的文章是否意味笔者^[4]中的讨论错了?目前情形下,笔者没有办法回避文献中业已存在的这一类做法,需要正面对,理解和解读它们的含义,特别是要回答当我们认为参考系变换得到的是运动的场点上所真实感受到的电磁场时,与它不同的运动的场线所代表的究竟是个什么样的场?这些是文章^[4]和本文的题目所特别指明,而在文章^[4]中尚未完成的内容。

在文章^[4]中,我们曾引用费曼的说法,说明对电磁场,运动的场线是不存在的。这是不是就把运动场线的做法一锤打死了呢?果真如此,如何理解一直还有这么多人在沿着这个路线持续在做讨论呢?

注意到费曼的讨论是在假定运动的场线描述和参考系变换描述等价的前提下进行的。他是用变换到运动者静止的参考系的结果来审视和评判所谓运动场线的正确性的。这个等价细化起来具体就是:在观察者静止的实验室参考系看到的运动的场完全等效于在观察者运动(实际是站在运动的介质上)的参考系看到的静止的场,这实际是一种相对性原理的表达形式。从这个意义上,目前所要坚持讨论的内容,即运动的场线描述不再

与参考系变换等价的情形,已经破坏了费曼所依据的前提,或者说明显地破坏了相对性原理。目前的状态变成,如果承认相对性原理,按费曼的讨论,运动的场线根本不该存在,因此沿这种思路的讨论是错误的;不承认相对性原理,虽然运动的场线不再受费曼讨论结果的约束,可确实破坏了更加基本的相对性原理。初看起来,怎么讨论似乎都有问题,由此,运动的场线的讨论是不是就真的完全错了呢?

在物理理论的表达中,相对性原理明显地显示出来的描述被称作理论的协变表达,这时理论的数学表达式在任何一个惯性系里都是完全形式上一样的,这是理论物理学家十分喜欢的一种优美的理论表达方式,此次争论异议方所参考比较多的文章[7]就是以这种方式来进行讨论的。同时在理论描述中,也存在着大量非协变的理论表达。在这类描述中,在不同的惯性参考系中,理论的数学表达式并不一样,相对性原理在这里正确与否需要额外地去讨论和证明,这时即使最后相对性原理被证明仍是在理论中正确的也是以隐性的方式。对像麦克斯韦方程组这样的基本理论,物理学家们相信相对性原理一定是存在的,因此除了像费曼那样追求明显地实现相对性原理外,即使理论的表达表面上看似不显式地满足相对性原理,我们也必须证明它是以隐性的方式被内在满足的。如果达不到这一点,也就是理论怎么样都无法满足相对性原理,这个理论可能就真的彻底地错了。

从坚持相对性原理的角度,只要证明运动场线的描述可以通过方程的变形和物理量的重新定义转化为参考系变换的结果,则说明运动的场线描述不过是针对目前问题的一种相对性原理变形的“非协变”表达而已。事实上[5][6]都是从标准的参考系的洛伦兹变换出发,通过重新定义场量,“推导出”王院士所给出的所谓的赫兹方程。在这个意义上,麦克斯韦方程组的运动的场线描述只不过是换种等价的表达方式而已,不应被看做是拓展。

特别地,在文章[5]中,法拉第电磁感应定律在实验室系中(用不带撇的变量描述),和固定在介质上随介质运动参考系中(用带撇的变量描述)都是满足相对性原理的标准形式:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla' \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= -\frac{\partial \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad t' = t\end{aligned}\quad (1)$$

而运动的场线的电场强度 $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ 和磁感应强度 $\mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$ 被定义为一个由逆变换坐标给出的场(由此我们称其为非常规变换所给出的定义),由[5]中的式(2.9)给出,为:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}', t') &\equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', t') \\ \mathcal{B}(\mathbf{r}', t') &\equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', t')\end{aligned}\quad (2)$$

或

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) \quad \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)\quad (3)$$

从这样定义的运动电磁场出发,由式(1)给出的法拉第电磁感应定律,很容易就导出赫兹方程:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) &= \\ = -\frac{d\mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{dt} &= \\ = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) &= \\ = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \\ = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]\end{aligned}\quad (4)$$

实际上在电磁学里由式(4)等号右边的第一项,即传统的磁感应强度随时间的变化项,所产生的电场叫感生电场,而由式(4)等号右边的第二项所产生的电场叫动生电场,它们都是电磁学里被广泛讲授和讨论的内容。

式(4)是在取式(1)中的坐标变换为伽利略变换的结果,如果把伽利略变换改为洛伦兹变换,方程就不再只能限制在法拉第电磁感应定律里讨论了。因为会出现电场的时间微商和磁感应强度的空间微商项,需要考虑进其他几个和介质性质有关的麦克斯韦方程组,由此介质的性质就进入了最后的结果。再准确到速度的一阶项的水平上,只须把式(1)中的时间变换式子右边加上一个项

$-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}$ 。文章[5]经过详细的计算给出的最低阶相对论修正结果是在式(4)右边第二项上要乘个修正因子 α ,其中参数 $\alpha = 1 - \frac{1}{\epsilon \mu c^2}$ 。它和早年文

献所给的结果一致。

强调一下如文章[5]所引的文献指出的,赫兹方程并不与实验数据相符合,因此最简单的运动场线方程,也就是拓展的麦克斯韦方程组是不受实验支持的!只有考虑了含因子 α 的修正的方程才与实验相符合。从这里我们看到,即使是介质的低速运动,相对论效应也是非常重要的!

在文章[6]中,明确指出运动场线的方程不对应于我们习惯使用的实验室系或固定在运动介质身上的参考系里所使用的方程组。因为在这两个参考系里,由于相对性原理,方程组的数学形式是完全一样的,都是标准的麦克斯韦方程组。因此要强行制造出这个拓展了的方程组,必须打破习惯了符合相对性原理的选择,来重新定义我们的电磁场。文章[5]是通过改变场强所依赖的坐标,把它们变为逆变换之后的坐标来实现这种重新定义的。如果我们在[5]给出的定义方式上再增做一次正变换(注意整个连场带坐标都做变换,由相对性原理,是保麦克斯韦方程组形式不变的),结果是场要做正变换,而场所依赖的坐标要做一次正变换、一次逆变换,相互抵消,相当于坐标保持不变,因此独立于[5]的选择的另一种是改用变换的场但坐标不变来定义运动的场线(它也是一种非常规性的定义)。这就是文章[6]的选择,具体地:按照[6]所使用的符号,运动的场线的电场强度 $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', t')$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t)$ 被定义为:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', t') &\equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') \\ \mathbf{B}^*(\mathbf{r}', t') &\equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')\end{aligned}\quad (5)$$

则我们得到赫兹方程:

$$\begin{aligned}\nabla' \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', t') &= \nabla' \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') - \nabla' \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')] \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} - \nabla' \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')] \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}^*(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} - \nabla' \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r}', t')]\end{aligned}\quad (6)$$

同样类似地,把式(5)的伽利略变换替换为洛伦兹变换,重新做推导。准到速度的一阶项,可以得到式(6)等号右方第二项前多乘了一个 α 因子的修正。

到此为止,我们给出了两种场强的以参考系变换来重新定义方式,当变换是伽利略变换时,新

定义出的电磁场满足不与实验相符合的赫兹方程,也即目前业界所争论的拓展的麦克斯韦方程组。而当变换是洛伦兹变换时,相对论修正使得所导出的方程改变为与实验相符的扩展了的赫兹方程。这些方程与标准的麦克斯韦方程组完全等价,只是场量重新定义所导致的变形。

致谢:感谢杨金民、王飞、韩涛的有益讨论。

本工作受清华大学2019年本科教改项目ZY01_01《构建以问题引导的三位一体物理学科专业核心课〈电动力学〉的混合式翻转课堂教学体系》支持。

参 考 文 献

- [1] 王亚伟, 乐永康, 钱飒飒, 等. 大学物理、大学物理实验两门课程现状调查报告及总结[J]. 物理与工程, 2016, 26(4): 45-54, 57.
WANG Y W, LE Y K, QIAN S S, et al. Investigation report and summary on present situation of college physics and college physics experiment courses in China[J]. Physics and Engineering, 2016, 26(4): 45-54, 57. (in Chinese)
- [2] 王青. 理解经典电磁学理论[J]. 物理与工程, 2018, 28(3): 10-22.
WANG Q. Understanding classical electromagnetic theory [J]. Physics and Engineering, 2018, 28(3): 10-22. (in Chinese)
- [3] WANG Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system—General theory, mathematical solutions and applications in TENG[J]. Materials Today, 2021.
- [4] 王青. 理解王中林院士“拓展的麦克斯韦方程组”[J]. 物理与工程, 2022: 网络首发.
WANG Q. Understanding classical electromagnetic theory [J]. Physics and Engineering, 2022: online first. (in Chinese)
- [5] WANG F, YANG J M. Relativistic origin of Hertz and extended Hertz equations for Maxwell theory of electromagnetism[J]. arXiv: 2201.10856v2 [physics, class-ph] 27 Jan 2022.
- [6] LI C, PEI J L, LI T J. Comments on the expanded Maxwell's equations for moving charged media system[J]. arXiv: 2201.11520v1 [physics, class-ph] 27 Jan 2022.
- [7] 王雯宇, 许洋. 运动介质洛伦兹协变电磁理论[J]. 物理与工程, 2018, 28(2): 13-25.
WANG W Y, XU Y. Lorentz covariant form of electromagnetism in the moving media[J]. Physics and Engineering, 2018, 28(2): 13-25. (in Chinese)