

演绎性拓展：马克思的生产函数思想与经济增长模型的内在逻辑^{*}

张忠任^{**}

【摘要】本文指出,《资本论》中蕴含着丰富的线性生产函数思想。本文的主要目的就是尝试把生产函数理论与再生产理论有机地联系起来。虽然对马克思线性生产函数的一些指数化尝试尚未尽如人意,但是关于生产函数的研究进展显示:线性生产函数和指数型生产函数都属于 CES 型生产函数的特例,从而两者在这一意义下可以统一起来,这样就为以马克思生产函数来构筑 CGE 模型提供了可能性。当生产函数进化到更加具有一般性的 VES 型,马克思生产函数与其他相关生产函数之间所存在的内在联系也开始变得更加清晰,由此在数学形式上把马克思生产函数转化为 VES 型生产函数格式也成为了可能。而基于两种资本(不变资本和可变资本)构筑的马克思生产函数不需要借助于在统计上无法实现的实物量体系,在应用上具有先天优势,并具有多元方程组特征,适用于反映多个部门的产业结构。更重要的是,马克思在把多个部门抽象为两大部类的基础之上所构筑的再生产模型是马克思生产函数的实用模式之一,是产业结构分析的有效工具。本文在理论上奠定了以马克思生产函数思想充实政治经济学应用体系的必要基础,并在方法论上提示了怎样将之用于政策分析的线索,显示出充分的可行性。总之,生产函数问题是随着数学与经济学相融合的进展在政治经济学研究中所触发的一个新认识,处于对马克思主义经济学的继承与发展的结合点上,正在逐步形成一个前景广阔的新研究领域。

【关键词】线性生产函数;欧拉定理;CES 生产函数;再生产;两大部类

^{*} 作者感谢 2024 年国家社会科学基金重大项目《数字时代马克思主义基本理论创新发展研究》(项目批准号:24&ZD010)子课题《再生产理论创新》的资助。

^{**} 张忠任,大阪数理经济学研究所首席研究员,E-mail:zzr20120816@gmail.com。

引文格式:张忠任. 2025. 演绎性拓展:马克思的生产函数思想与经济增长模型的内在逻辑[J]. 政治经济学季刊,4(3):75-106.

Cite this article: ZHANG Z R. 2025. Deductive expansion: The inner logic of Marx's production function thought and economic growth models[J]. *Political Economy Quarterly*, 4(3): 75-106. (in Chinese)

本文所提出的课题几乎是全新的尝试,迄今为止,鲜见有人从生产函数的角度对马克思主义经济学进行过系统研究。通过分析马克思的生产函数思想,我们可以加深对马克思经济理论的认识,特别是可以进一步拓展源于再生产方式的经济增长模型,并且有利于与其他学派的经济理论作对比分析。

一、生产函数思想的由来与演化

生产函数(production function)思想是数学中的函数概念在生产研究上的一种应用,所反映的是在技术水平不变的条件下,一定时期内,所投入的 n ($n \geq 1$) 种生产要素量与可能达到的最大产量(或者产出)之间的一一对应关系。也就是说,它是反映既定生产技术条件下投入和产出间的数量关系的一种函数。这里自变量是 n ($n \geq 1$) 种生产要素,因变量是产量(或者产出)。理论上的生产函数一般采用实物量,而在现实应用中则多采用价值量。

生产函数的应用范围包括企业、产业和社会等,本文侧重讨论社会生产函数。

按照张忠任(2024)的总结,熊彼特([1954]1996, p. 403)指出,生产函数的最初思想可以追溯到法国重农学派重要的代表人物之一杜阁(Anne Robert Jacques Turgot, 1727—1781)关于收益递减规律的阐述:在当等量的资本——劳动数量在这里也是一样,连续投在一块土地上时,则每一次投下资本所得到的产量,开始是不断增加,一直到达增产量与资本增量之比为最大的一点,但是超过这一点后,再投下等量的资本,所得的增产量就会不断下降。这个渐减的增量数列最后必趋近于零。熊彼特认为这一表述最符合收益递减法则的本意,不过,他并没有给出为何得出这一结论的根据。

斯坦利明确了杜阁关于收益递减规律(law of diminishing returns)的阐述发表于 1767 年(Stanley, 1993)。杜阁的叙述大意如下(译自法文):地球的肥力就像弹簧一样,人们通过连续加载相同的重量来努力弯曲它。如果这个重量很轻并且弹簧不是很灵活,那么第一个负载的作用可能几乎为零。当重物足够强大以克服第一个阻力时,可以看到弹簧以合理的方式屈服并弯曲;但是,当它弯曲到某个点时,它就会产生抗力,会开始抵抗施加在它上面的压力,以前会导致一英寸凹陷的重物现在几乎不能让它移动一根发丝。总之效果会越来越小。注意:这一论述并未收入杜阁([1770]1997)的名著《关于财富的形成和分配的考察》(原文为法语: *Réflexions sur la formation et la distribution des richesses*, 1770)之中。

熊彼特还指出,杜阁列举了 1900 年左右美国经济学家所说的“比例变化法则”的一个特殊例子。这一法则也可以用不同的概念,以稍稍不同的方式来表达。熊彼特还说这一法则出现于 19 世纪末,现在叫作“生产函数”,表示产品数量和以不同比例配合起来的生产要素数量之间的技术关系。不过,他在该书中

并没有明确指出“生产函数”的概念究竟是谁提出来的。经考证,“生产函数”的概念是1894年最早由英国经济学家菲利普·亨利·维克斯蒂德(Philip Henry Wicksteed, 1844—1927)提出来的(Wicksteed, 1894, p. 4)。维克斯蒂德还给出了生产函数的表达式:

$$P = f(a, b, c, \dots)$$

不过,杜阁从收益递减规律出发的生产函数是基于农业所考虑的。据深山(2013)考证,经德国经济学家欧根·施马伦巴赫(Eugen Schmalenbach, 1873—1955)和康拉德·梅勒罗维奇(Konrad Mellerowicz, 1891—1984)的认可,把杜阁的生产函数推广到了工业^①。

熊彼特还指出,杜阁的生产函数特别巧妙的地方在于,在收益递减的阶段前插进了收益递增的阶段。也就是说承认了一个事实,即收益递减并不是从投下第一副可变生产要素的剂量以后立即就起作用的,而是在达到某一点以后才开始起作用的^②。

一般说来, n 个变量的生产函数,可以表述为

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

如果一个生产函数满足如下条件($\forall \lambda > 0$),称为规模报酬不变:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

如果一个生产函数满足如下条件($\forall \lambda > 0$),则称为规模报酬递增:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) > \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

如果一个生产函数满足如下条件($\forall \lambda > 0$),则称为规模报酬递减:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) < \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

生产函数主要有3种类型,线性生产函数、指数生产函数以及固定投入比例生产函数,我们会在后文中按照顺序陆续介绍。这些类型最终又都被CES生产函数所统一,我们将在本文最后一节讨论这个问题。

下面来考虑生产函数的等产量曲线。所谓等产量曲线(isoquant),指在技术水平不变的条件下,生产同一产量的两种生产要素投入量的不同组合所产生的轨迹。等产量曲线与原点的距离的远近体现表示产量水平的高低,离原点越远代表产量越大。

注意:等产量曲线所反映的是实物量关系,属于技术效率问题。按照投入的生产要素之间相互替代的程度,可以把等产量曲线划分为三种类型。

当投入生产要素之间存在不完全替代关系,等产量曲线的形状一般为向原

^① 值得一提的是,德国经济学家埃里希·谷腾堡(Erich Gutenberg)(1897—1984)曾经一度做过这种推广,后来又否定了杜阁这一观点。

^② 熊彼特还强调:杜阁是用产品的连续增量而不是用平均产品(即每单位可变要素的产品)来陈述他的法则的。这说明他实际上已经使用了边际分析,而现代技术的使用所能改进的只是他的陈述方式而已。

点凸出的曲线。

当投入生产要素之间完全可以替代,等产量曲线的形状则是一条直线。

当投入要素之间完全不能替代,等产量曲线的形状是一条直角线,此时为固定投入比例生产函数。也就是说,在每一个产量水平上任何一对要素投入量之间的比例都是固定的(意味着技术不变)。假定生产过程中只使用 x_1 和 x_2 两种要素,则固定投入比例生产函数的通常形式为: $Q = Q(x_1, x_2) = \min(x_1/\alpha, x_2/\beta)$, 其中, α 和 β 通常作为 x_1 和 x_2 的生产技术系数,表示生产 1 单位产品所需要的固定的 x_1 和 x_2 的投入量。

对于固定投入比例生产函数来说,当生产要素都增加 λ 倍时,

$$Q(\lambda x_1, \lambda x_2) = \min\left(\frac{\lambda x_1}{\alpha}, \frac{\lambda x_2}{\beta}\right) = \lambda \min\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right) = \lambda Q(x_1, x_2)$$

所以固定投入比例生产函数是规模报酬不变的。

设可微生产函数为: $Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对其取全微分,在同一条等产量线上有:

$$dQ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

如果生产函数 $Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足: $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $\lambda > 0$, 则该生产函数被称为 s 次齐次生产函数。 s 被称为齐次度(degree of homogeneity)。

齐次生产函数是一种很特殊的生产函数,具有很多特点。特别是,规模报酬不变的齐次生产函数满足欧拉定理(Euler's Theorem),其含义是:在完全竞争条件下,假设长期中规模报酬不变,则全部产品正好足够分配给各种生产要素。所以此定理也被称为“产品分配净尽定理”(英语一般使用: Euler's Theorem of Distribution)。其数学含义是,对于任意 1 次齐次生产函数 $q = f(x, y)$, 有

$$\frac{\partial q}{\partial x}x + \frac{\partial q}{\partial y}y = q$$

我们以两个变量 x, y 的 1 次齐次生产函数为例来说明欧拉定理(高鸿业, 2000, pp. 343-345)。假设 x 表示资本, y 表示资本劳动, 则 $\frac{\partial q}{\partial x}$ 意味着资本的边际产品, 而 $\frac{\partial q}{\partial y}$ 是劳动的边际产品, 完全竞争条件下, 二者恰好等于资本和劳动的单位价格。全部产品恰好足够分配给两种生产要素。

一般意义下的欧拉定理是这样考虑的: 对于任意齐次度 s 的生产函数即 s 次齐次生产函数 $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来说, 也就是在 $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $\lambda > 0$ 的条件下, 有

$$sf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

二、线性的马克思生产函数及其指数化

在很多著述中,都把 $c+v+m=w$ 称为马克思的价值等式,虽说这种表述并没有问题,因为马克思用数字来表述的这种关系,比比皆是,尤其在《资本论》第2卷当中。不过,恐怕鲜有人知,在《资本论》中,并不存在用字母写成的等式 $c+v+m=w$ 。用字母写成的此等式左端部分的 $c+v+m$ 第一次出现在《资本论》第1卷中(马克思和恩格斯,1972,p. 238),马克思的用法是“它的价值= $c+v+m$ ”。请注意这种用法,因为式 $c+v+m$ 的部分在等式的右端。

在《资本论》第3卷中才第一次出现了(马克思和恩格斯,1974,p. 30)

$$W=c+v+m \quad (2-1)$$

这里, c 是不变资本, v 是可变资本, m 是剩余价值。

注意,(2-1)这种表述方式,与 $c+v+m=w$,是有本质上的区别的。 $c+v+m=w$ 只是一个等式,而(2-1)则是一种典型的生产函数的表述方式,而且是一种齐次的二元线性生产函数(*Linear Production Function*)。马克思有时为了分析的方便,也曾假定不变资本部分等于零。于是,预付资本就从 $c+v$ 简化为 v ,产品价值 $c+v+m$ 就简化为价值产品 $v+m$ 了(马克思和恩格斯,1972,p. 242)。这时,马克思生产函数就化为

$$W=v+m \quad (2-2)$$

就(2-1)而言,由于剩余价值 m 并不是独立的,因为, $m=ev$, e 是剩余价值率,其决定比较复杂,在这里暂时可以把 $(1+e)$ 看作一个系数,这样, $c+v+m=c+(1+e)v$ 。而因变量则是 W ,表示社会总产品或社会总产值。于是, $W=c+(1+e)v$ 这是一种线性生产函数,自变量是不变资本 c 和可变资本 v ;因变量是社会总产品或社会总产值 W 。

线性生产函数是生产函数的一种特殊形式,描述了投入和产出之间的线性关系^①。最简单的一元线性生产函数只有一种投入,可以表示为: $f(x)=ax$,它显示了一种比例关系,其图形是一条通过原点的直线。如果投入 x 表示劳动,则 a 意味着劳动生产率。

而一般的多元线性生产函数可表述为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$$

当常数项 $b=0$ 的时候则为齐次线性生产函数。此时,由于

^① 不过,需要注意的是,马克思的生产函数表示为价值量(W ,其计量单位是劳动时间或货币单位)而不是一般生产函数所采用的使用价值(效用)量下的总产出(Q ,其计量单位是实物单位:吨或者公尺等)。当然价值生产函数和使用价值生产函数之间是可以互相转化的。一般说来, $W_i=Q_i\pi_i$,这里 π_i 是单位商品价值量。详见张思任(2021)。

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda a_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

所以,齐次线性生产函数是规模报酬不变的。

导入剩余价值率 e , 则(2-1)可以改写成

$$W = W(c, v) = c + (1 + e)v \quad (2-3)$$

显然有

$$W(\lambda c, \lambda v) = \lambda c + (1 + e)\lambda v = \lambda [c + (1 + e)v] = \lambda W(c, v)$$

或者

$$W(\lambda v) = (1 + e)\lambda v = \lambda W(v)$$

从这里也可以看出,作为线性生产函数的马克思生产函数是规模报酬不变的。

下面我们来证明马克思生产函数满足欧拉定理。为此,分别对公式(2-3)中的 c 和 v 求偏导数可得

$$\frac{\partial W}{\partial c} = 1 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 1 + e$$

从而可知

$$\frac{\partial W}{\partial c}c + \frac{\partial W}{\partial v}v = c + (1 + e)v = W$$

需要注意的是, $\frac{c}{v}$ 就是资本有机构成。从短期来看,可以假定资本有机构成不变,则马克思生产函数等产量线就是属于固定投入比例生产函数那种直角线。如果以可变资本为横轴,以不变资本为纵轴,则资本有机构成就是马克思生产函数的扩展线的斜率。

不过,从长期来看,在马克思那里,不变资本和可变资本是具有可替换性的^①。因为不变资本和可变资本之间存在的是不完全替代关系,所以等产量曲线的形状一般为向原点凸出的曲线。此时,过扩展线上某一点的切线的斜率就是资本有机构成。

需要注意的是,马克思生产函数,适用于多部门的情形^②,也就是说,具有线性方程组的特征。而上述许多生产函数往往都只是用一个方程来反映全社会的情形。其实,用于多部门分析的 Leontief 生产函数,也正是源于马克思的两

① 在马克思那里,不变资本和可变资本的可替换性反映在资本有机构成会发生变化上。马克思曾阐述过:“如果这种增值或贬值以同等程度影响资本的一切部分,利润也就会相应地表现为加倍的或减半的货币额。但是,如果它包含着资本有机构成的变化,就是说,使可变资本部分对不变资本部分的比率提高或降低,那末,在其他条件不变的情况下,利润率就会随着可变资本的相对提高而提高,随着可变资本的相对降低而降低。”(马克思和恩格斯,1974, p. 158)可见不变资本和可变资本是具有可替换性的。

② 例如,马克思曾经多次列举过5个部门的数据,都可以表述为线性方程组形式(马克思和恩格斯,1974, pp. 174-176)。而后文中将阐述的马克思再生产模型更是典型的线性方程组。

大部类分析。

把线性的马克思生产函数予以指数化,是马克思主义经济学研究进行国际接轨的一种尝试。日本经济学者大西广通过对柯布-道格拉斯生产函数(简称C-D生产函数)重新定义,建立起指数型马克思生产函数。为此,我们先阐述一下柯布-道格拉斯生产函数。

C-D生产函数是由 Charles Wiggins Cobb(1875—1949)和 Paul Howard Douglas(1891—1976)在1928年根据统计数据验证而确立的^①,被广泛用于表示两种或多种投入(特别是资本和劳动)的数量与产出数量之间的技术关系。其一般表达式为^②

$$Y(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

这里:

Y = 总产出(1年);

L = 劳动投入(1年工作人时);

K = 资本投入(机器、设备和建筑物等);

A = 全要素生产率。

参数 α 和 β 分别是劳动和资本的产出弹性,是由技术确定的常数,相当于总产出对生产中所投入的劳动或资本水平变化的反应的灵敏度,例如当 $\alpha = 0.75$ 时,意味着劳动 L 的投入每增加1%总产出将增加0.75%。

由于劳动和资本同时扩大 λ 倍的时候

$$Y(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda L)^{\alpha}(\lambda K)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$$

所以,如果 $\alpha + \beta < 1$,则规模报酬递减;如果 $\alpha + \beta > 1$,则规模报酬递增;如果 $\alpha + \beta = 1$,则规模报酬不变,此时满足欧拉定理^③。

参数 α 和 β 一般采用最小二乘法估出^④。当年,柯布和道格拉斯所作出来的估值是 $\alpha = 3/4$ 和 $\beta = 1/4$ 。

① 根据 Douglas 的说法,函数形式本身是由 Philip Wicksteed(1844—1927)最早提出来的,现在有些相关研究提出了更多更详细的线索,这里不予赘述。

② C-D生产函数也可以扩展为 n 个变量:

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

③ 由于

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$$

从而可知

$$\frac{\partial Y}{\partial L}L + \frac{\partial Y}{\partial K}K = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} \cdot L + \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1} \cdot K = (\alpha + \beta)AL^{\alpha}K^{\beta} = Y$$

④ 对 $Y(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ 两边取对数可得

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(K)$$

日本学者大西广从 2002 年开始,阐述了他对马克思劳动价值论的基本认识,并特别关注了最优资本劳动比率(资本有机构成)问题(大西和山下, 2002a; 三土和大西, 2002, 第 3 章)。然后从大西和山下(2002a)开始,对 C-D 生产函数作了新的解释,发表了一系列研究成果^①,之后在大西(2012, 第 4 章)中作了一个总结。

Y 表示消费资料总产量, L 表示劳动投入量 s , s 表示总劳动中用于消费资料生产的比率($0 \leq s \leq 1$), K 表示生产手段投入量, A 表示全要素生产率。参数 α 和 β 分别是资本和劳动的产出弹性。于是有

$$Y = AK^{\alpha}(sL)^{\beta}$$

令 $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$, δ ($0 < \delta < 1$) 表示折旧率, B 表示劳动生产率, 则有

$$\dot{K} + \delta K = B(1 - s)L$$

由此他导出了最优资本劳动比率(资本有机构成)为(下式中 ρ 是时间偏好率):

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{*} = \frac{B\alpha}{(\alpha + \beta)\delta + \beta\rho}$$

据此,大西(2012)还进一步导出了简单再生产(如表 1 所示)和扩大再生产(如表 2 所示)两种情况下,对应最优状态的劳动投入构成。

表 1 最优状态下的劳动投入构成(简单再生产)

	c	$v + m$
第 I 部类	0	$\left(\frac{\delta\alpha}{(\alpha + \beta)\delta + \beta\rho}\right)L$
第 II 部类	$\left(\frac{\delta\alpha}{(\alpha + \beta)\delta + \beta\rho}\right)L$	$\left(1 - \frac{\delta\alpha}{(\alpha + \beta)\delta + \beta\rho}\right)L$

来源:译自大西(2012)第 118 页。

表 2 最优状态下的劳动投入构成(扩大再生产)

	c	v	m	总计
第 I 部类	0	$\left(\frac{\delta K}{B} + sL\right)(1 - s)$	$(1 - s)\left[(1 - s)L - \frac{\delta K}{B}\right]$	$(1 - s)L$
第 II 部类	$\frac{\delta K}{B}$	$\left(\frac{\delta K}{B} + sL\right)s$	$s\left[(1 - s)L - \frac{\delta K}{B}\right]$	$\frac{\delta K}{B} + sL$
全社会	$\frac{\delta K}{B}$	$\frac{\delta K}{B} + sL$	$(1 - s)L - \frac{\delta K}{B}$	$\frac{\delta K}{B} + L$

来源:译自大西(2012)第 129 页。

^① 主要有:大西和山下(2002a, 2002b);山下和大西(2003);大西(2005);大西和金江(2008);大西(2010)。

之后,大西还运用 C-D 生产函数的分析手法讨论了资本有机构成的提高与相对过剩人口规律、平均利润率下降规律以及先富/后富等问题^①。

尽管在大西的分析结果中不乏饶有兴味之处,但是因为他是通过强行重新定义 C-D 生产函数而建立起的马克思生产函数,总有略显牵强的感觉。与此相比,曾尔曼从马克思的价值等式出发尝试去沟通与 C-D 生产函数的关系,就多了一层理论上必要的衔接手续。曾尔曼通过定义 $p' = \frac{M}{C+V}$, $P' = \frac{Q}{C+V} = 1 + p'$, $\beta = \frac{C}{C+V}$, 提出 C-D 生产函数化之后的马克思的生产函数(曾尔曼, 2010, 2020)为

$$W = BC^{\beta}V^{1-\beta}$$

不过该公式的脉络并不够清晰^②。

当然,从公式(2-3)出发,令 $c = \ln(C)$, $v = \ln(V)$, $W = \ln(w)$, 可得

$$\ln(w) = W = W(c, v) = c + (1 + e)v = \ln(C) + (1 + e)\ln(V)$$

于是有

$$w = CV^{1+e}$$

由此可以勉强把线性的马克思生产函数比较合理地转化为 C-D 型生产函数。不过, $c = \ln(C)$ 与 $v = \ln(V)$ 的经济学含义需要有一个合理的解释,有待于进一步的研究。

三、从特殊到一般的生产函数

在上一节的分析中我们看到,线性的马克思生产函数的指数化问题,(C-D 生产函数化)问题并未得到彻底解决。不过,这并不排除线性的马克思生产函数与 C-D 生产函数之间还存在另一种必然联系,下面来说明这一问题。

这一分析之所以成为可能,是因为生产函数从特殊到一般的研究取得了长足的进步。

生产函数的第一次一般化是由于 CES(Constant Elasticity of Substitution)函

① 见大西(2012, pp. 133-140)。延伸阅读:山下等(2004);孙世强和大西广(2014);乔晓楠和何自力(2017)。

② 且不管 B 的含义,我们对该公式两端取自然对数可得

$$\ln(W) = \ln(BC^{\beta}V^{1-\beta}) = \ln(B) + \beta\ln(C) + (1-\beta)\ln(V)$$

等式右边的“ $\beta\ln(C) + (1-\beta)\ln(V)$ ”无法与 $C+V$ 建立联系,按照曾尔曼的符号,除非

$$C+V+M = (1+p')(C+V) = P'(C+V) = P'[\beta C + (1-\beta)V]$$

但是这是不能成立的,因为 $C+V \neq \beta C + (1-\beta)V$ 。

数的出现,该函数最早是由曾经作过 Leontief 的研究助理的索罗 (Robert Merton Solow, 1924—2023) 提出来的。索罗 (Solow, 1956) 提出了一个具有两个生产要素的 CES 生产函数,然后在 1961 年被四位经济学家(后来被简称为 ACMS),即阿罗 (Kenneth Joseph Arrow, 1921—2017)、钱纳里 (Hollis Burnley Chenery, 1918—1994)、明哈斯 (Bagicha Singh Minhas, 1921—2005) 加上索罗自己所推广 (Arrow et al., 1961)。

两个生产要素的 CES 生产函数可如下所示:

$$Q = F [\delta_1 K^\rho + \delta_2 L^\rho]^{\frac{s}{\rho}} \quad (3-1)$$

其中, Q 表示产量, F 表示要素生产率, δ_i 表示比例参数 (一般 $\delta_1 + \delta_2 = 1$), K 、 L 表示生产要素 (资本与劳动) 的投入量, ρ 表示替代参数 ($\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$), σ 表示替代弹性 ($\sigma = \frac{1}{1-\rho}$), s 表示生产函数的同质化程度, 同质化程度 $s = 1$ (恒定的规模报酬), $s < 1$ (规模报酬递减), $s > 1$ (规模报酬递增)。

当 $\rho = 1$ 时 Q 为线性的或者完全替代生产函数, 可以证明, 当 ρ 趋向于 0 时 Q 为柯布-道格拉斯生产函数; 而 ρ 趋向于负无穷大时则 Q 为固定投入比例生产函数。

当 $F = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1 + e$, $\rho = 1$, 且 $s = 1$ 的时候, 两个生产要素的 CES 生产函数可以化为

$$Q = K + (1 + e)L$$

令 $K = c$, $L = v$, $Q = W$, 我们就得到了马克思生产函数 $W = c + (1 + e)v$ 。

而当 $F = A$, 比例参数 $\delta_1 = \alpha$, $\delta_2 = \beta$, 替代参数 ρ 趋于 0, 生产函数的同质化程度 $s = 1$ 的时候, 两个生产要素的 CES 生产函数 (3-1) 趋于 C-D 生产函数, 即有^①

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} A [\alpha K^\rho + \beta L^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = AK^\alpha L^\beta$$

在这里我们看到, 马克思生产函数和 C-D 生产函数都可以一般化到 CES 生产函数 (3-1)。可以考虑把马克思生产函数一般化为如下 CES 生产函数形式:

$$Q = F [c^\rho + (1 + e)v^\rho]^{\frac{s}{\rho}} \quad (3-2)$$

当 ρ 趋向于负无穷大时, Q 化为 Leontief 生产函数, 即第 1 节中介绍过的固定投入比例生产函数。既然, Leontief 生产函数和线性的马克思生产函数都

① 这一结果用 Matlab 能够算出来。另外, 高木 (1971) 给出过一种不用求极限的算法。他令 $x = \frac{K}{L}$, $\lambda = \alpha + \beta$, $A = \frac{\beta}{\alpha}$ 。先求出 $\frac{f'}{f} = \frac{\lambda}{x(1+Ax^\rho)}$, 当 $\rho = 0$ 的时候, $\frac{f'}{f} = \frac{\lambda}{x(1+A)}$, 积分可得 $f = \gamma x^{\frac{\lambda}{1+A}}$, 这里是积分常数, 变量替换后便可得 $Y = \gamma K^\alpha L^\beta$ 。

属于 CES 生产函数的特例,两者就都被 CES 生产函数统一起来了。而由于

$$c_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

所以 Leontief 生产函数与马克思生产函数是兼容的,特别是在部门分类的意义下,可以理解为马克思生产函数从两大部类到 n 个部门的具体化^①。

生产函数的第二次一般化是由于 VES (Variable Elasticity of Substitution) 生产函数的出现,根据 Constantin Chilarescu(2021)的考证,该函数最早是由 Liu and Hildebrand (1965) 提出,之后有 Lu (1967)的贡献,Sato and Hoffman (1968)以及 Revankar (1971)作了进一步的开发。

CES(Constant Elasticity of Substitution)的含义是不变替代弹性,VES 生产函数的出发点则在于取消这一假定,VES (Variable Elasticity of Substitution) 的含义是可变替代弹性。

在 Sato 和 Hoffman (1968)中,假定 $\sigma=\sigma(t)=a+b \cdot t$,便得到

$$Y=B(\lambda L^{\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}}+(1-\lambda)K^{\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}})^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-1}} \quad (3-3)$$

与前述 CES 生产函数(3-1)即 $Q=F[\delta_1 K^\rho+\delta_2 L^\rho]^{\frac{s}{\rho}}$ 相比,显然其中的联系主要在于在(3-3)中, $\delta_1=\lambda, \delta_2=1-\lambda, s=1$,还有需要注意的是, $\frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-1}$ 源于

前面定义过的 $\rho=\frac{\sigma-1}{\sigma}$ 。由此可知,当 $b=0$ 时,则 $\sigma=\sigma(t)=a$ 退化为不变替代弹性,从而(3-3)退化为(3-1),即 VES 生产函数退化为 CES 生产函数。做一下变量替换,就可以将马克思生产函数进一步一般化为如下 VES 生产函数形式:

$$W=B(\lambda v^{\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}}+(1-\lambda)c^{\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}})^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-1}} \quad (3-4)$$

与此相比,需要强调的是,马克思的生产函数思想并不局限于单个方程,当扩展为方程组形式的时候,就是有名的马克思再生产图式或模型,下节将进行具体分析。

四、方程组形式的马克思生产函数： 再生产模型及其平衡条件

方程组形式的马克思生产函数,即再生产模型是就社会总产品而定义的。

^① 关于投入产出理论与马克思经济学的渊源、关系,可参见:晋彤驹(1981);廖才茂(1985);王恺(1982);Leontief(1936;1937;1938)

在马克思主义再生产理论中,社会总产品指社会各物质生产部门在一定时期(通常为 1 年)所生产的全部物质资料的总和,是一个非常重要的概念。这里所说的社会各物质生产部门,通常指农业、工业、建筑业、运输邮电业和商业(包括饮食业和物资供销业)五大物质生产部门。

可以从两个侧面价值形态和实物形态来进一步阐述社会总产品这一概念。

在价值形态上,社会总产品的价值表现为以货币表现的各物质生产部门的总产值之和,所以也称社会总产值。社会总产值 w 由 3 个部分,即不变资本 c 、可变资本 v 和剩余价值 m 构成: $w=c+v+m$ 。其中 $(v+m)$ 是新创造的价值,被称为国民收入^①。

需要强调一下,两大部类是一种最基本、最重要的产业结构,不过,两大部类却是一种理论抽象,在现实当中则很难划分。例如粮食,直接用作食物属于第Ⅱ部类,而若用作食品厂的原料则属于第Ⅰ部类。也就是说,在现实当中根本就不存在泾渭分明的两大部类。过去我们曾经长期把重工业作为第Ⅰ部类,而把轻工业和农业作为第Ⅱ部类,是很不准确的。不过,钟契夫(1982)已经找到了一种方法:针对闭锁经济系统(不包含对外贸易),通过投入产出系数分别计算出生产资料 and 消费资料的比重(系数),就可以利用投入产出表,以第Ⅱ部类生产资料总量的计算作为出发点,来比较科学地估算两大部类的数据。藤森赖明(Fujimori, 1992)也从生产资料和消费资料的比重(系数),利用投入产出表,以第Ⅰ部类生产资料总量的计算作为出发点,提出了异曲同工的估算两大部类数据的方法,并将这种方法扩展到了开放经济系统(即包含了对外贸易)。李帮喜(2012)利用藤森赖明(Fujimori, 1992)的两大部类估算方法,基于大道理论(Turnpike Theory)首次对中国经济的大道路径进行了估算,并将这一成果反映在藤森赖明和李帮喜(2014)中。

在实物形态上,社会总产品按照其最终经济用途被划分为两大部类。第Ⅰ部类为生产资料的生产;第Ⅱ部类为消费资料的生产。

马克思正是从两大部类出发采用方程组方式建立起再生产模型的。模型如下:

$$\begin{cases} \text{I} : c + v + m = w \\ \text{II} : c + v + m = w \end{cases}$$

这是一种目前在我国的政治经济学教科书中仍然在沿用的表示方法。不过,这种表示方法用起来并不太方便,尤其是它不能明确反映出各年之间的时

^① 需要强调的是,社会总产值与现在常用的 GDP(国内生产总值)有很大的不同。首先,社会总产值严格说应该是按照价值(劳动价值)或者其货币表现来计算的,而 GDP 则属于按照生产价格的货币表现来统计的。即便不考虑价值(劳动价值)与生产价格的区别问题,他们的统计口径也是不同的。GDP 大致相当于国民收入 $(v+m)$ 加上折旧,当然在统计上还有一些细微区别。

间关系,从而容易在分析中产生误解。因此,我们导入时间因素^①予以改进如下:

$$\begin{cases} c_1^{(t)} + v_1^{(t)} + m_1^{(t)} = w_1^{(t)} \\ c_2^{(t)} + v_2^{(t)} + m_2^{(t)} = w_2^{(t)} \end{cases} \quad (4-1)$$

把生产函数从单个方程扩展为方程组,是一个重要的飞跃。这一突破是马克思借鉴了魁奈(François Quesnay; 1694—1774)的《经济表》(Tableau économique, 1758)所采用的分析手法而开拓的^②。但是,马克思的再生产模型不仅远远超越了魁奈,而且比侧重数学的一般生产函数分析更加深刻:因为在马克思的再生产理论中经济学分析更为重要。

马克思从社会总产品补偿(即社会总产品的实现问题)的角度,来分析社会资本再生产。为了保障社会资本再生产的顺利进行,两大部类的产品就必须进行交换,由此才能实现价值上的补偿和实物上的替换。这些交换包括第Ⅰ部类内部的交换、第Ⅱ部类内部的交换,以及两大部类之间的交换。

社会再生产主要分为两种基本类型:简单再生产和扩大再生产。简单再生产指生产过程在原有规模上的重复,而扩大再生产就是生产过程比原有规模增大了的再生产。

我们首先来分析简单再生产的平衡条件(亦称实现条件)。马克思在《资本论》第2卷中,把简单再生产的平衡条件概括为 $I(v+m)=IIc$,通常都把这一条件理解为两大部类之间的当年交换关系,用本文的符号表示出来就是 $v_1^{(t)}+m_1^{(t)}=c_2^{(t)}$ 。在现行的政治经济学教科书中把这一平衡条件图示(数据是马克思的)为

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 4000c + \boxed{1000v + 1000m} & = 6000w \\ & \downarrow & \\ \text{II} & \boxed{2000c} + 500v + 500m & = 3000w \end{array} \quad (4-2)$$

① 森岛通夫曾经试图把差分导入马克思的再生产分析之中(Morishima, 1973), 尽管他的分析没有到位[详见张忠任(2004a)]。导入时间因素之后, 在推导过程中就可以形成差分, 而将之用于分析简单再生产的平衡条件是张忠任(1995)首次给出的。

② 马克思在 1863 年 6 月 18 日给恩格斯的一封信中说：“我想要一个复式簿记的样本（附有解说），我在阐明魁奈医生的《经济表》时有用”。而在 1863 年 7 月 6 日给恩格斯的另一封信中则说道：“附上一份‘经济表’，这是我用来代替魁奈的表的”。分别见《马克思恩格斯全集》第 30 卷第 252 页和第 358 页（马克思和恩格斯，1975）。此时马克思已经做出了一张超越了魁奈《经济表》的新型经济表，相当于 1861—1863 手稿中汇总了“第 1-3 草图”的“再生产总过程的经济表”，见《马克思恩格斯全集》第 48 卷第 166-168 页及第 172 页（马克思和恩格斯，1985）。

制条件。如果容许负的增长率,即便在 $v_1^{(0)} + m_1^{(0)} = c_2^{(0)}$ (第 0 年表示初始年)的条件下,扩大再生产也是可能的(参阅表 3)。

表 3 $v_1^{(0)} + m_1^{(0)} = c_2^{(0)}$ 下的再生产推移

	年	c	v	m	w	增长率 g
部门 I	0	4000	1000	1000	6000	
	1	4160	1040	1040	6240	4%
	2	4326	1082	1082	6490	4%
部门 II	0	2000	500	500	3000	
	1	1840	460	460	2760	-8%
	2	1914	478	478	2870	4%

如果把时间因素导入简单再生产的平衡条件,简单再生产就会被牢牢地限制住,不再会发生上述那种问题。如下所示:

I
(第 0 年)

II

I
(第 1 年)

II

$4000c + \boxed{1000v + 1000m} = 6000w$

$2000c + 500v + 500m = 3000w$

$4000c + 1000v + 1000m = 6000w$

$\boxed{2000c} + 500v + 500m = 3000w$

(4-3)

这样,我们可以把简单再生产的平衡条件严密地定义为两大部类之间的前
后年的交换关系,即 $v_1^{(t)} + m_1^{(t)} = c_2^{(t+1)}$ 。

下面分析扩大再生产平衡条件,为此,首先规定几个符号。 e 表示剩余价值率(各部门的剩余价值率被假定为相等的,马克思最常使用的是 $e = 100\%$)。 k_i 表示第 i 部类的资本有机构成,在一般情况下, $k_1 \neq k_2$, 即两大部类的资本有机构成是不同的^①。 $\Delta c_i^{(t)}$ 、 $\Delta v_i^{(t)}$ 和 $\alpha_i^{(t)}$ 分别表示第 i 部类的追加不变资本、可变资本和积累率, $\frac{m}{x}$ 为资本家消费。

马克思的扩大再生产的平衡条件为

$$I \left(v + \Delta v + \frac{m}{x} \right) = II (c + \Delta c)$$

(4-4)

^① 日本经济学家置盐信雄等把 $k_1 = k_2$ 作为研究马克思再生产理论的基本前提,是不具有一般性的,从而其结论也有相当大的局限性。参见置盐(1988, p. 94)。

用本文的符号表示出来就是

$$v_1^{(t+1)} + (1 - \alpha_1)m_1^{(t)} = c_2^{(t+1)} \quad (4-5)$$

它还可以改写成一种最为简洁的方式:

$$c_2^{(t+1)} = w_1^{(t)} - c_1^{(t+1)} \quad (4-6)$$

下面我们从投入产出表的角度来分析一下扩大再生产平衡条件的实质。两大部类的投入产出表^①如表4所示。

表4 两大部类的投入产出表(转置表)

	部门 I	部门 II	可变资本	剩余价值	社会总产值
部门 I	c_1	0	v_1	m_1	w_1
部门 II	c_2	0	v_2	m_2	w_2
最终需求	y_1	y_2			
社会总产值	w_1	w_2			

于是有

$$\begin{cases} y_1 = w_1^{(t)} - (c_1^{(t)} + c_2^{(t)}) = \Delta c_1^{(t)} + \Delta c_2^{(t)} \\ y_2 = v_1^{(t)} + \Delta v_1^{(t)} + v_2^{(t)} + \Delta v_2^{(t)} + (1 - \alpha_1)m_1^{(t)} + (1 - \alpha_2)m_2^{(t)} \end{cases} \quad (4-7)$$

(4-7)中的第1个式子相当于扩大再生产的平衡条件(4-6)^②;而第2个式子中的 $(1 - \alpha_i)m_i^{(t)}$ 则为资本家消费,在《资本论》中的记号为 $\frac{m}{x}$ 。

下面我们来看一下扩大再生产的平衡条件与宏观经济学的国民收入“三面相等原则”(即国民收入的三个方面:生产=收入=支出的原则;Principle of Equivalent of Three Aspects)的关联性。把(4-7)的两个式子相加经过化简可得

$$y_1 + y_2 = v_1^{(t)} + v_2^{(t)} + m_1^{(t)} + m_2^{(t)} \quad (4-8)$$

(4-8)的左边, $y_1 + y_2$ 为总支出, (4-8)的右边, $v_1^{(t)} + v_2^{(t)} + m_1^{(t)} + m_2^{(t)}$ 为总收入,因此(4-8)相当于总收入=总支出。由此我们看到马克思的扩大再生产平衡条件与宏观经济学的国民收入“三面等价法则”实有异曲同工之妙。

把(4-7)的两个式子分别相加还可以直接得到

$$y_1 + y_2 = \Delta c_1^{(t)} + \Delta c_2^{(t)} + v_1^{(t)} + \Delta v_1^{(t)} + v_2^{(t)} + \Delta v_2^{(t)} + (1 - \alpha_1)m_1^{(t)} + (1 - \alpha_2)m_2^{(t)}$$

把它与(4-8)放在一起将 $y_1 + y_2$ 消掉可得,

$$\Delta c_1^{(t)} + \Delta c_2^{(t)} + \Delta v_1^{(t)} + \Delta v_2^{(t)} = \alpha_1 m_1^{(t)} + \alpha_2 m_2^{(t)} \quad (4-9)$$

这实际上就是宏观经济学中的投资=储蓄的法则。

① 第一个把马克思的两大部类的再生产关系用投入产出比表正确地予以表达的是萨缪尔森(Samuelson, 1957, p. 47)。

② 注意: $c_1^{(t)} + c_2^{(t)} + \Delta c_1^{(t)} + \Delta c_2^{(t)} = c_1^{(t+1)} + c_2^{(t+1)}$ 。

五、再生产图式与经济增长模型化问题

我们先总结一下,在马克思的再生产体系下存在哪些基本变量关系。它们主要有:

$$\begin{aligned} m_i^{(t)} &= ev_i^{(t)} \\ c_i^{(t)} &= k_i v_i^{(t)} \\ \alpha_i m_i^{(t)} &= \Delta v_i^{(t)} + \Delta c_i^{(t)} \end{aligned}$$

基于以上变量关系,我们可以导出

$$(1 + k_i) \Delta v_i^{(t)} = \Delta c_i^{(t)} + \Delta v_i^{(t)} = \alpha_i^{(t)} m_i^{(t)} = e \alpha_i^{(t)} v_i^{(t)} \quad (5-1)$$

从而有

$$\frac{\Delta v_i^{(t)}}{v_i^{(t)}} = \frac{\Delta c_i^{(t)}}{c_i^{(t)}} = \frac{e \alpha_i^{(t)}}{1 + k_i} \quad (5-2)$$

令 $g_i (i=1,2)$ 表示两大部类的经济增长率, g 表示社会总产值的经济增长率,则有^①

$$g_i = \frac{\Delta w_i^{(t)}}{w_i^{(t)}} = \frac{e \alpha_i^{(t)}}{1 + k_i} \quad (i=1,2), \quad g = \frac{\Delta w^{(t)}}{w^{(t)}} = \frac{e \alpha^{(t)}}{1 + k} \quad (5-3)$$

于是,马克思的经济增长模型就可以表示为

$$w_i^{(t+1)} = \left(1 + \frac{e \alpha_i^{(t)}}{1 + k_i}\right) w_i^{(t)} \quad (i=1,2) \quad (5-4)$$

$$w^{(t+1)} = \left(1 + \frac{e \alpha^{(t)}}{1 + k}\right) w^{(t)} \quad (5-5)$$

从经济增长模型(5-4)可知,在马克思的再生产体系下,第Ⅰ部类的积累率 α_1 被作为外生变量。整个经济增长由第Ⅰ部类所主导。整个再生产过程都是由第Ⅰ部类的不变资本 c_1 所生成的。 c_1 是生成因子, α_1 是增长因子。具体来说,首先, v_1 、 m_1 , 进而 w_1 都是由 c_1 所生成的。这是因为

$$v_1 = \frac{1}{k_1} c_1, \quad m_1 = ev_1 = \frac{e}{k_1} c_1, \quad w_1 = \left(1 + \frac{1}{k_1} + \frac{e}{k_1}\right) c_1$$

令 $h_i = 1 + \frac{1}{k_i} + \frac{e}{k_i}$, 则初始年(第0年)的 $w_1^{(0)} = h_1 c_1^{(0)}$ 。

下面我们再来看一下第Ⅱ部类的情况。为了阐述得清晰易懂,我们先令 $\beta_1 =$

^① 该公式最早见于 Wilhelm (1971)。在国内的相关文献中最早见于雍文远的《社会必要产品论》(雍文远, 1985, pp. 295-298), 不过未注明出处。之后见于石景云发表在《中国社会科学》的“马克思社会再生产理论中的增长公式”(石景云, 1988), 不过也未注明出处。注意, (5-3) 的实质不过是经济增长率公式的一种表述形式, 将之理解为经济增长模型的见解是肤浅的。

$\left(1 + \frac{e\alpha_1}{1+k_1}\right)$ 。毫无疑问初始年(第0年)的 $c_2^{(0)}$ 、 $v_2^{(0)}$ 、 $m_2^{(0)}$ 以至于 $w_2^{(0)}$ 均与 $c_1^{(0)}$ 无关。但是,从扩大再生产的第1年开始, $c_2^{(0)}$ 就是由 $c_1^{(0)}$ 生成的了。这是因为由(4-7),知

$$c_2^{(1)} = w_1^{(0)} - c_1^{(1)} = (h_1 - \beta_1)c_1^{(0)}$$

$c_1^{(0)}$ 正是通过(4-7)被传递到第Ⅱ部类中去成为第Ⅱ部类的生成因子的^①,参见图1 马克思再生产体系的生成关系。

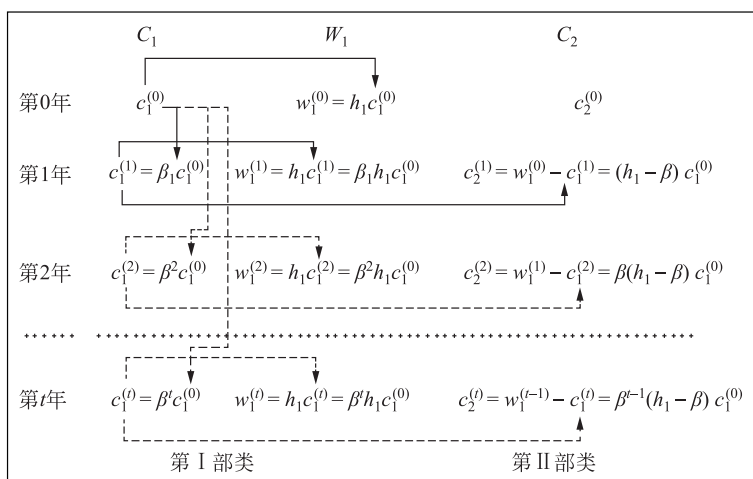


图1 马克思再生产体系的生成关系

出处：参照藤本乔雄教授原图制作。

总之,从扩大再生产的第1年开始,在第Ⅰ部类,从 $c_1^{(1)} = \beta_1 c_1^{(0)}$, $v_1^{(1)} = \frac{1}{k_1} c_1^{(1)} = \frac{\beta_1}{k_1} c_1^{(0)}$ 出发有, $m_1^{(1)} = e v_1^{(1)} = \frac{e\beta_1}{k_1} c_1^{(0)}$, $w_1^{(1)} = h_1 c_1^{(1)} = h_1 \beta_1 c_1^{(0)}$; 在第Ⅱ部类经(4-7)的传递同样有, $c_2^{(1)} = (h_1 - \beta_1) c_1^{(0)}$, $v_2^{(1)} = \frac{1}{k_1} c_2^{(1)} = \frac{1}{k_1} (h_1 - \beta_1) c_1^{(0)}$, $m_2^{(1)} = e v_2^{(1)} = \frac{e}{k_1} (h_1 - \beta_1) c_1^{(0)}$, 从而, $w_2^{(1)} = h_2 c_2^{(1)} = h_2 (h_1 - \beta_1) c_1^{(0)}$ 。也就是说,整个扩大再生产体系,都是由 $c_1^{(0)}$ 生成的。

由前所述第Ⅰ部类的增长公式为

$$w_1^{(t+1)} = \left(1 + \frac{e\alpha_1}{1+k_1}\right) w_1^{(t)} = \beta_1 w_1^{(t)} \quad (5-6)$$

^① 马克思的再生产体系是由第Ⅰ部类的不变资本 c_1 所生成一事,是由日本国冈山大学经济学部教授藤本乔雄先生于1998年在一封信中首次给出了雏形,详见张忠任(2004a, p242)。

再把 $c_i = \frac{w_i}{h_i}$ 导入(4-6)中可得^①

$$\frac{w_2^{(t+1)}}{h_2} = w_1^{(t)} - \frac{w_1^{(t+1)}}{h_1} \quad (5-7)$$

把(5-6)和(5-7)加起来,就构成方程组形式的马克思的经济增长模型:

$$\begin{aligned} w_1^{(t+1)} &= \beta_1 w_1^{(t)} \\ w_2^{(t+1)} &= h_2 \left(1 - \frac{\beta_1}{h_1} \right) w_1^{(t)} \end{aligned}$$

改写成矩阵形式则为

$$\begin{pmatrix} w_1^{(t+1)} \\ w_2^{(t+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ h_2 \left(1 - \frac{\beta_1}{h_1} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(t)} \\ w_2^{(t)} \end{pmatrix} \quad (5-8)$$

由此也可以把模型理解为由 $w_1^{(0)} = \left(1 + \frac{1}{k_1} + \frac{e}{k_1} \right) c_1^{(0)}$ 生成的。模型(5-8)是收敛的。为了证明这一点,令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ h_2 \left(1 - \frac{\beta_1}{h_1} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$\mathbf{A}^n = \beta_1^{n-1} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ h_2 \left(1 - \frac{\beta_1}{h_1} \right) & 0 \end{pmatrix} = \beta_1^{n-1} \mathbf{A}$$

所以马克思的经济增长模型(5-8)是收敛的。

六、再生产模型的自动调节与最大增长率问题

威廉·克雷勒(Krelle, 1971)^②没有涉及马克思再生产理论中的调节问题。森岛通夫倒是注意到了这一点,但是,由于他没有完全理解马克思的再生产思想而主观地假定“两大部类的积累率相等”,从而得出一个错误结论:认为马克

① 一个重要说明,当笔者把 $c_i = \frac{w_i}{h_i}$ 导入(4-6)中的时候,出现了一个笔误:把 $\frac{w_2^{(t+1)}}{h_2} = w_1^{(t)} - \frac{w_1^{(t+1)}}{h_1}$ 错标为 $\frac{w_2^{(t+1)}}{h_2} = w_1^{(t)} - \frac{w_2^{(t+1)}}{h_1}$,这一笔误大约从笔者 2004 年的相关论著中一直延续到 2019 年 10 月 19 日才被日本大西广教授发现。不过,幸运的是,这一笔误虽然是一个瑕疵,却对推导出来的模型本质没有什么影响,特别是没有影响到该模型收敛的结论。

② 威廉·克雷勒(Wilhelm Krelle, 1916—2004)是德国经济学家。

思的扩大再生产体系是不稳定的。他明明看到了“在马克思的经济中有明显的均衡增长倾向”,并承认,这种倾向看上去远比新古典经济学家所主张的收敛性更强,因为不均衡增长的状态仅仅 1 年就消失不见了。但是,他却认为这种现象是不正常的,出现这种奇怪的结果,并不是由于马克思所选择的数据特殊,而是由于其投资函数的特殊性(Morishima,1973)。需要强调的是,构建能够反映马克思的扩大再生产的模型,必须既能够体现平衡功能,又能够具有增长作用。马克思的扩大再生产平衡条件只对再生产能够顺利进行起决定作用,却不提供增长的动力。再生产的扩大或增长,来自一个增长因子,而森岛正是漏掉了的这个增长因子,才导致了他的一系列错误结论^①。

下面,我们来详细讨论一下马克思再生产体系中的调节问题。

在《资本论》第 2 卷第 21 章例 1 之 2 中,有一个很有趣的现象,即两大部类第 1 年的经济增长率虽然不同,但是从第 2 年起却变得一致了,并且保持不变(参见表 5)。

表 5 自动调节的数例

	年	c	v	m	w	增长率 g	比重 θ
部门 I	0	4000	1000	1000	6000		66.70%
	1	4400	1100	1100	6600	10.00%	67.30%
	2	4840	1210	1210	7260	10.00%	67.30%
部门 II	0	1500	750	750	3000		33.30%
	1	1600	800	800	3200	6.70%	32.70%
	2	1760	880	880	3520	10.00%	32.70%
社会总产值	0	5500	1750	1750	9000		
	1	6000	1900	1900	9800	8.90%	
	2	6660	2090	2090	10780	10.00%	

出处:作者自制。

森岛(Morishima,1973)也看到了这一现象,但是,他却认为是不正常的,把问题错误地归结为马克思的投资函数的特殊性,从而失掉了揭示其内在机制的机会。其实,如果运用价值规律来考虑这个问题,会得出完全不同的结论。为了说明这个问题,我们来考虑一下 3 组不同的数据。第 1 组数据(A)就是《资本论》第 2 卷第 21 章例 1 之 2 的数据,原封不动,属于第 II 部类生产过剩的情况;第 2 组数据(B),属于第 II 部类生产不足的情况;第 3 组数据(C)则为两大部

^① 对森岛的相关批评,详见张忠任(2004a, pp. 244-247)。

类都供求平衡的情况^①。

(第 0 年的 3 组不同数据)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A)} \quad \begin{array}{l} \text{I } 4000c + 1000v + 1000m = 6000w \\ \text{II } 1500c + 750v + 750m = 3000w \end{array} \\ \text{(B)} \quad \begin{array}{l} \text{I } 4000c + 1000v + 1000m = 6000w \\ \text{II } 1400c + 700v + 700m = 2800w' \end{array} \\ \text{(C)} \quad \begin{array}{l} \text{I } 4000c + 1000v + 1000m = 6000w \\ \text{II } 1455c + 727v + 727m = 2909w'' \end{array} \end{array} \right\} \quad (6-1)$$

但是 3 组数据虽然不同,第 1 年的再生产结果却都是相同的,仿佛数据完全相同一样。

我们怎样理解不同数据出现相同再生产结果这一现象呢?首先,唯有价值理论中的实现理论才能予以说明。因为这一结果意味着,在(A)的场合,II $1500c + 750v + 750m = 3000w$ 和 II $1455c + 727v + 727m = 2909w''$ 所起的作用完全一样,也就是说,第 II 部类生产过剩,投入的劳动总量虽然是 3000,但是过剩的 91 单位的价值未能实现,只实现了 2909 单位,第 1 年的社会总产值表面上看是 $6000 + 3000 = 9000$,所起的作用却相当于 $6000 + 2909 = 8909$ 。

在(B)的场合,I: $1400c + 700v + 700m = 2800w'$ 和 II: $1455c + 727v + 727m = 2909w''$ 所起的作用完全一样,也就是说,由于第 II 部类生产不足,投入的劳动总量虽然是 2800,但是在交换中却实现了 2909 单位,多出了 109 单位,第 1 年的社会总产值表面上看是 $6000 + 2800 = 8800$,所起的作用却相当于 $6000 + 2909 = 8909$ 。

但是,注意:这里说的是“相当于”而不是“等于”。这里所反映的还不是市场价值的过程,(A)场合的 $6000 + 3000 = 9000$ 或者(B)场合的 $6000 + 2800 = 8800$ 所投入的劳动量都是真实的,与(C)场合的 $6000 + 2909 = 8909$ 所投入的劳动量并不相同。也就是说,(A)场合的 91 单位的劳动量不会凭空消失,(B)场合也不会凭空多出来 109 单位的劳动量。

那么,为什么会出现这种现象呢?从数学上来看,这是一个自动控制的过程。而其原理则在于,如前所述,马克思的整个扩大再生产体系,都是由 $c_1^{(0)}$ 生成的,从再生产的第 1 年起,已经与初始年第 II 部类的的数据大小无关(初始年第 II 部类的的数据只对其资本有机构成和剩余价值率起决定作用)。从而,这一自

^① 如果用再生产平衡条件公式(4-4)来详细说明的话,第 II 部类生产过剩的情形相当于 $I(v+m) < II(c+\Delta c)$,第 II 部类生产不足的情形相当于 $I(v+m) > II(c+\Delta c)$,至于两部类供求平衡的情形则相当于 $I(v+m) = II(c+\Delta c)$ 。第 3 组数据(C)的数据作了四舍五入。实际为:II $1454.54 + 727.27 = 2909.09$ 。

动控制过程乃是一个由生成因子和增长因子通过特定的传递机制(再生产平衡条件)而生成的递增过程。

而从经济学上来看,这是一个自我调节的过程。在扩大再生产的第1年,无论第Ⅱ部类生产过剩也好,生产不足也好,为了扩大再生产能够顺利进行,都只能按照第Ⅰ部类的扩大再生产要求来提供消费资料与之进行交换。当第Ⅱ部类生产过剩时,资本家就多消费一些,少投资一些;而当第Ⅱ部类生产不足时,资本家就少消费一些,多投资一些。总之,让第Ⅱ部类的资本家充当了调节者^①。

整个调节过程表现为,第Ⅰ部类的积累率给定以后,通过扩大再生产的平衡条件的反馈,第Ⅱ部类的积累率被如下公式决定^②:

$$\alpha_2 = \frac{1+k_2}{e} \left[\left(\frac{1+e}{k_1} - \frac{e\alpha_1}{1+k_1} \right) \frac{c_1^{(0)}}{c_2^{(0)}} - 1 \right] \quad (6-3)$$

在(6-3)里,我们看到,第Ⅱ部类的积累率 α_2 是由第Ⅰ部类的积累率 α_1 决定的^③,由这一作为 α_1 的函数的 α_2 决定第Ⅱ部类的增长率,使之符合第Ⅰ部类的增长要求。 α_2 的这种函数功能,起到一种自动控制作用,使两大部类的关系能够自动地由偏离化为均衡。

公式(6-3)显然给出了一条直线^④,如图2中的AB线所示。

现在,我要提出一个很有意思的问题:对于任意的数据能否求出其恰好符

① 仅仅让第Ⅱ部类的资本家担任调节者确实是不合理的。因为第Ⅱ部类的资本家绝不会有那么高的“觉悟”,也不会那么听话。这件事如果交给市场来决定,市场应该能够拿出一个使两大部类的资本家都能接受的方案,但是这种方案意味着两大部类的积累率将会相同。说到这里反应快的读者可能会质问我:这么一来不就同森岛一样了吗?我的回答是,不一样!请注意,我这里说的是由市场来决定,而不是像森岛那样使之强行相等。我们将在讨论市场价值和生产价格时解决这一问题。

② (6-3)是从(5-4)和(5-7)推导出来的。具体推导过程是这样。首先把(5-4)代入(5-7),即把 $w_1^{(t+1)} = \left(1 + \frac{e\alpha_1}{1+k_1}\right) w_1^{(t)}$ 和 $w_2^{(t+1)} = \left(1 + \frac{e\alpha_2}{1+k_2}\right) w_2^{(t)}$ 带入到 $\frac{w_2^{(t+1)}}{h_2} = \frac{w_1^{(t+1)}}{h_1}$ 中可得

$$\frac{\left(1 + \frac{e\alpha_2}{1+k_2}\right) w_2^{(t)}}{h_2} = \frac{\left(1 + \frac{e\alpha_1}{1+k_1}\right) w_1^{(t)}}{h_1}$$

然后利用 $h_i = \frac{1+k_i+e}{k_i}$ 以及 $w_i^{(t)} = h_i c_i^{(t)}$ 的关系可得

$$\left(1 + \frac{e\alpha_2}{1+k_2}\right) c_2^{(t)} = \frac{1+k_1+e}{k_1} c_1^{(t)} - \left(1 + \frac{e\alpha_1}{1+k_1}\right) c_1^{(t)}$$

由此化简,让 $t=0$ 就可以得到公式(6-3)了。

③ 用数学语言来说,就是 α_2 是 α_1 的函数, α_1 是自变量, α_2 是因变量。

④ 如果把(6-3)改写为如下形式,可能更容易看得清楚。

$$\alpha_2 = \frac{1+k_2}{e} \left(\frac{(1+e)c_1^{(0)}}{k_1 c_2^{(0)}} - 1 \right) - \left(\frac{(1+k_2)c_1^{(0)}}{(1+k_1)c_2^{(0)}} \right) \alpha_1$$

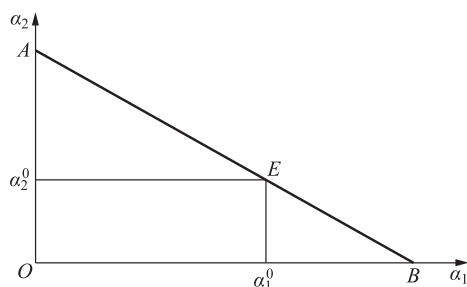


图 2 积累率的调节机制

图片来源:作者自制

合均衡再生产的要求(即从第 1 年开始两大部类的增长率就相同,并且一直保持不变)的第 I 部类积累率 α_1 ? 回答是肯定的。计算公式如下:

$$\alpha_1^* = \frac{1 + k_1}{e} \left(\frac{w_1^{(0)}}{c_1^{(0)} + c_2^{(0)}} - 1 \right) \quad (6-4)$$

而

$$g^* = \frac{w_1^{(0)}}{c_1^{(0)} + c_2^{(0)}} - 1 \quad (6-5)$$

就是符合任意数据均衡再生产的要求的经济增长率,我们不妨把 g^* 称之为均衡增长率。

在上面例子中的(A)组数据,可求得 $\alpha_1^* = 0.45$,均衡增长率为 9.09% 。而对于(B)组数据来说, $\alpha_1^* = 0.5$,均衡增长率为 11.1% 。从这里可以看出,当第 I 部类份额较大时,均衡增长率为高。在我国曾经讨论过多年的所谓“生产资料优先增长原理”,看来确实属于马克思的再生产体系。但是,这只不过是出于马克思的分析手法的局限性所带来的意外结果,从马克思的辩证分析体系来看,他绝不会片面强调生产资料优先增长。

在任何一个经济体系中,最大增长率总是一个诱人的题目。而在马克思的扩大再生产体系中,最大增长率是由第 I 部类的最大积累率决定的。下面,我们来考察一下最大积累率问题。很明显,第 1 年的生产资料的最大可能投入量为 $w_1^{(0)} - c_1^{(0)} - c_2^{(0)}$,因此第 I 部类的最大积累率为

$$\alpha_1^{\max} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k_1}\right) (w_1^{(0)} - c_1^{(0)} - c_2^{(0)})}{m_1^{(0)}} \quad (6-6)$$

注意:第 I 部类对消费资料的投资是生产资料投资的 $\frac{1}{k_1}$ 。在《资本论》第 2 卷第 21 章例 1 之 2 中,马克思用的积累率为 0.5 并非最大积累率。在该例中,最大

积累率为 0.625。顺便说一下,在马克思的再生产体系中,最大经济增长率是由 $\alpha_1^{\max}$ 决定的,即 $g^{\max} = \frac{e\alpha_1^{\max}}{1+k_1}$ 。在上例中,最大经济增长率应为 12.5%。关于最大经济增长率的计算,有一个更为的简便公式^①

$$g^{\max} = \frac{w_1^{(0)} - c_2^{(0)}}{c_1^{(0)}} - 1 \quad (6-7)$$

当第 I 部类取最大积累率时,第 II 部类在扩大再生产的第 1 年为零增长(即简单再生产)。

其实,在以上的讨论中其实已经包含了两大部类的最优比例问题。我们在计算第 3 组数据(C)的时候,实际上已经运用过这种方法。第 3 组数据(C)就体现着两大部类能够保持均衡增长的最优比例。

我们把两大部类的份额分别用 $\theta_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$ 和 $\theta_2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$ 来表示。在马克思的再生产模式中,参照系是第 I 部类,或者说第 I 部类占主导作用,第 II 部类的生产过剩或者生产不足,只是相对于第 I 部类而说。因此,不存在第 I 部类的生产过剩或者生产不足问题,问题只存在于第 II 部类。从而两大部类的最优比例问题只讨论第 II 部类的份额就行了。

考虑到当数据条件满足(4-4)或(4-6)时,会有

$$c_2^{(0)} = \frac{(1+k_1)w_1^{(0)}}{1+k_1+e\alpha_1} - c_1^{(0)} \quad (6-8)$$

再利用一下前面使用过的 c 和 h_i 的关系,不要忘了 h_i 的定义,可将(6-8)化为

$$w_2^{(0)} = h_2 w_1^{(0)} \left[\frac{(1+k_1)}{1+k_1+e\alpha_1} - \frac{1}{h_1} \right] \quad (6-9)$$

再令 $\lambda_{a_1} = h_2 \left[\frac{(1+k_1)}{1+k_1+e\alpha_1} - \frac{1}{h_1} \right]$, 可得

$$\theta_2^* = \frac{w_2^{(0)}}{w_1^{(0)} + w_2^{(0)}} = \frac{\lambda_{a_1}}{1 + \lambda_{a_1}} \quad (6-10)$$

这就是第 II 部类的标准份额。显然第 I 部类的标准份额为

① 这一公式是基于第 I 部类的生产资料的增量导出来的。为了最大经济增长率,第 I 部类可以把可能使用的全部生产资料用于自身的扩大再生产,从而有第 I 部类的生产资料的最大(注意:不等于合理)增量 $g^{\max} c_1^{(0)}$ 为:

$$g^{\max} c_1^{(0)} = w_1^{(0)} - c_1^{(0)} - c_2^{(0)}$$

所以有

$$g^{\max} = \frac{w_1^{(0)} - c_1^{(0)} - c_2^{(0)}}{c_1^{(0)}} = \frac{w_1^{(0)} - c_2^{(0)}}{c_1^{(0)}} - 1$$

$$\theta_1^* = \frac{w_1^{(0)}}{w_1^{(0)} + w_2^{(0)}} = \frac{1}{1 + \lambda_{\alpha_1}} \quad (6-11)$$

也就是两大部类的最优比例。

λ_{α_1} 显然是 α_1 的函数, 对应于不同的 α_1 有不同的 λ_{α_1} 。 λ_{α_1} 是由 α_1 决定的。换句话说就是, 不同的第 I 部类积累率, 对第 II 部类的要求也不同。从这一意义上说, 在扩大再生产中, 第 II 部类的生产过剩或者生产不足, 只是相对于第 I 部类的积累率而言。在第 I 部类的某积累率下的第 II 部类的生产过剩, 在第 I 部类的另一积累率下可能会是第 II 部类的生产不足。

现在, 我们再回头看一下(6-1)中的 3 组数据。把第 I 部类作为参照系, 在积累率 $\alpha_1 = 0.5$ 时, 根据公式(6-10)和(6-11), 两大部类的最优比例为(0.6735, 0.3265)。(A)组数据的第 II 部类的份额为 $\theta_2 = 0.3333$, 大于标准份额的 0.3265, 说明第 II 部类生产过剩。而(B)组数据的第 II 部类的份额为 $\theta_2 = 0.3182$, 小于标准份额的 0.3265, 说明第 II 部类生产不足。(C)组数据的两大部类的比例恰好与最优比例一致。

如果令 $\alpha_1 = 0.3$, 则不仅(A)组数据, 连(C)组数据也变为第 II 部类生产不足。此时的最优比例为(0.6437, 0.3563)。

要求两大部类积累率相同的所谓均衡积累率问题在日本曾经讨论多年(参见图 3 均衡积累率的形成)。如果不考虑两大部类的资本有机构成相同即 $k_1 = k_2$ 的情形, 那么在剩余价值率相等的前提下, 只有在两大部类的增长率不相同即 $g_1 \neq g_2$ 的时候, 才有可能。这时, 如果由市场决定的话, 均衡积累率 α 可以由如下公式求出:

$$\alpha = \frac{(v_1 + m_1) - c_2}{\frac{k_1 m_1}{1 + k_1} + \frac{k_2 m_2}{1 + k_2}} \quad (6-12)$$

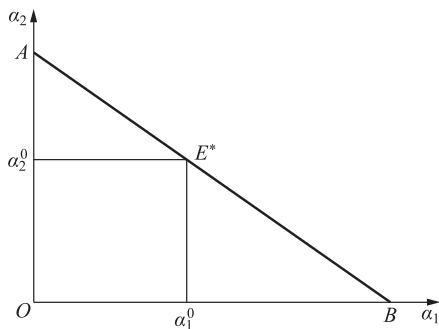


图 3 均衡积累率的形成

图片来源:作者自制

这时的均衡点相当于 AB 线上的能使 $\alpha_1^0 = \alpha_2^0$ 的 1 点,不过两大部类增长率并不同。(6-1)中的 3 组数据中(A)组数据的均衡积累率为 0.38462,(B)组数据的均衡积累率为 0.47368。

由(6-9),我们还可以导出马克思经济增长模型的收敛范围,也就是自动调节的数据界限。作为积累率虽然我们可以认为 $0 \leq \alpha_1 \leq 1$,但是考虑到第 1 年的生产资料的最大可能投入量为 $w_1^{(0)} - c_1^{(0)} - c_2^{(0)}$,所以第 I 部类积累率的范围为 $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^{\max}$,这里 $\alpha_1^{\max}$ 是我们在前面定义过的第 I 部类最大积累率。于是

$$h_2 \left[\frac{(1+k_1)}{1+k_1+e\alpha_1^{\max}} - \frac{1}{h_1} \right] w_1^{(0)} \leq w_2^{(0)} \leq h_2 \left[1 - \frac{1}{h_1} \right] w_1^{(0)} \quad (6-13)$$

七、基本结论

本文相当于在更具有一般性的层次上、从新的视角把张忠任(1995,2004b)与张忠任(2024)的结论统一起来,或者说,在张忠任(2024)的延长线上重新认识了张忠任(1995)首次把差分方程导入马克思再生产图示研究中所得出的基本数学关系式以及张忠任(2004b)基于再生产平衡条件推导出的两大部类关系式和矩阵形式的马克思经济增长模型,由此从张忠任(2024)的角度也就是从生产函数的理念得出了一些引人深思的新结论。下面简要地作一下总结。

生产函数思想源于古典政治经济学者。在《资本论》第 3 卷中第一次出现的公式 $W=c+v+m$ 就属于典型的线性生产函数表述。而用字母写成的所谓马克思价值等式 $c+v+m=w$ 这种表述方式在《资本论》中并不存在。

为了利用基于 C-D 生产函数所开发出来的一系列分析手法,出现了一些把线性的马克思生产函数进行指数化的尝试(例如大西广的研究等),尽管得出一些有趣的结果,但是实际上并没有严谨地给出一个能够联系线性生产函数与指数型生产函数的分析过程,显得有些牵强。

而随着对生产函数从特殊到一般的研究的进展,揭示了线性生产函数和指数型生产函数(特别是 C-D 生产函数)都属于 CES 型生产函数的特例,从而可以认识到两者(特别是线性马克思生产函数与 C-D 生产函数)之间存在着上层联系,即线性生产函数和指数型生产函数可以在 CES 型生产函数下统一起来。

而 CES 型生产函数又属于 VES 型生产函数的特例,从而在数学形式上线性的马克思生产函数可以升级到 CES 型以及 VES 型,由此进一步揭示了马克思生产函数与其他相关生产函数之间存在某些内在联系。

马克思的再生产模型,是基于两大部类分析而构筑的方程组形式的生产函数。运用经济分析的手段,通过两大部类的交换关系,导出简单再生产和

扩大再生产的平衡条件,并蕴含着自我调节机制,体现了数学和经济学的完美结合。

下面简单谈一下与此相关的几个研究课题。

投入产出理论中起关键作用的 Leontief 生产函数本来就是基于马克思再生产模型开发出来的,把两大部类模型具体化到了 n 个部门的投入产出方法具有很强的实用性。从其应用所必须依赖的投入产出表导出的投入系数矩阵起着关键性的作用。投入系数矩阵的重要意义其实在于它反映了马克思所强调的“自然的体系”^①。如果能够借鉴马克思的分析方法来阐明两大部类模型具体化到了 n 个部门后的平衡条件,则将对 n 部门产业政策分析产生很大的作用,这在生产函数的研究上将具有跨时代的重要意义,是一个难度较大的前沿研究课题。

几乎与投入产出模型同时开发出来的联合生产(Joint Production)模型,假定一个生产部门可以生产多种产品(例如羊毛和羊肉)(冯·诺依曼,[1945—1946]2013),能够反映更为复杂的经济现象,比投入产出模型更为具体。尽管张忠任(2013)已经指出联合生产与马克思主义经济学是兼容的,但是迄今为止仍然驻足于理论分析,还远远没能达到投入产出方法那样的实用阶段,很期待能开发出基于马克思再生产理论的联合生产型生产函数,尤其是对资源环境研究将具有十分重要的意义。

与投入产出模型相比,CGE 模型的理念发生了实质性的变化,用账户的收入与支出取代了投入与产出的关系,用 SAM 表取代了投入产出表,从而克服了投入产出表第Ⅳ象限不能使用的缺陷,加强了政策分析功能。由于在 CGE 模型的构筑中起关键作用的 CES 型生产函数与线性的马克思生产函数存在内在联系,如果能够把马克思经济学的理念导入宏观闭合所需要的前提中,则有可能为政治经济学研究开发出适用于政策分析的另一种有效工具,尤其是关于财税政策与社会福利政策等领域。

总之,生产函数问题是政治经济学研究的一个新领域,源于随着数学与经济学相融合的进展而触发的对马克思主义经济学的新认识,是一个处于对马克思主义经济学的继承与发展的结合点上的、前景广阔的新课题,既可以在新的维度上拓展马克思主义经济学理论,也可以进一步完善马克思主义经济学的应

^① 马克思指出,“社会分工则以生产资料分散在许多互不依赖的商品生产者中间为前提”。并且,“每一个商品生产者都必须生产一种使用价值,即满足一种特殊的社会需要,而这种需要的范围在量上是不同的,一种内在联系把各种不同的需要量连结成一个自然的体系”。投入产出表充分反映了这一“自然的体系”。参见马克思和恩格斯(1972, pp. 393-394)

用体系,特别是可以为经济政策的制定或分析提供新的工具或手段,使经济理论更好地服务于现实经济问题的解决。

参考文献

- 杜阁. 1997. 关于财富的形成和分配的考察[M]. 南开大学经济系经济学说史教研组,译. 北京:商务印书馆.
- (original language) TURGOT A R J. 1770. *Réflexions sur la formation et la distribution des richesses*[M].
- 冯·诺依曼. 2013. 一般经济均衡的一个模型[J]. 张忠任,余斌,译. 学习与探索, (1):91-95.
- (original language) von NEUMANN J. 1945—1946, 1937. A model of general economic equilibrium[J]. *The Review of Economic Studies*, 13(1): 1-9.
- 高鸿业. 2000. 西方经济学[M]. 2版. 北京:中国人民大学出版社.
- GAO H Y. 2000. *Western economics* [M]. 2nd ed. Beijing: China Renmin University Press. (in Chinese)
- 晋彤驹. 1981. “投入产出法”的由来和发展[J]. 经济问题, (2).
- JIN T G. 1981. The origin and development of the input-output method[J]. *On Economic Problems*, (2). (in Chinese)
- 廖才茂. 1985. 投入产出法与马克思主义经济理论[J]. 赣江经济(现刊名企业经济), (12).
- LIAO C M. 1985. Input-output method and Marxist economic theory [J]. *Enterprise Economy*, (12). (in Chinese) *GanJiang Economy*
- 马克思,恩格斯. 1972. 马克思恩格斯全集 第23卷[M]. 北京:人民出版社.
- 马克思,恩格斯. 1974. 马克思恩格斯全集 第25卷[M]. 北京:人民出版社.
- 马克思,恩格斯. 1975. 马克思恩格斯全集 第30卷[M]. 北京:人民出版社.
- 马克思,恩格斯. 1985. 马克思恩格斯全集 第48卷[M]. 北京:人民出版社.
- 乔晓楠,何自力. 2017. 唯物史观、动态优化与经济增长——兼评马克思主义政治经济学的数学化[J]. 经济研究, (8).
- QIAO X N, HE Z L. 2017. Historical materialism, dynamic optimization and economic growth: A comment on the mathematization of Marxist political economy[J]. *Economic Research Journal*, (8). (in Chinese)
- 石景云. 1988. 马克思社会再生产理论中的增长公式[J]. 中国社会科学, (2).
- SHI J Y. 1988. The growth formula in Marx's theory of social reproduction[J].

- Social Sciences in China*, (2). (in Chinese)
- 孙世强, 大西广. 2014. 日本马克思学界对社会再生产理论研究的新闻释及启示——基于最优经济增长模型视角[J]. 马克思主义研究, (8).
- SUN S Q, Onishi Hiroshi. New interpretations and insights from Japanese Marxist scholars on the theory of social reproduction[J]. *Studies on Marxism*, (8). (in Chinese)
- 藤森赖明, 李帮喜. 2014. 马克思经济学与数理分析[M]. 北京: 中国社会科学文献出版社.
- YORIAKI Fujimori, LI B X. 2014. *Marxist economics and mathematical analysis*[M]. Beijing: Social Sciences Academic Press. (in Chinese)
- 王恺. 1982. 论“投入——产出”分析与马克思再生产理论的关系[J]. 求是学刊, (1).
- WANG K. 1982. On the relationship between input-output analysis and Marx's theory of reproduction[J]. *Seeking Truth*, (1). (in Chinese)
- 雍文远. 1985. 社会必要产品论[M]. 上海: 上海人民出版社.
- YONG W Y. 1985. *Theory of socially necessary products*[M]. Shanghai: Shanghai People's Publishing House. (in Chinese)
- 约瑟夫·熊彼特. 1996. 经济分析史(第一卷)[M]. 北京: 商务印书馆.
- (original language) SCHUMPETER J A. 1954. *History of economic analysis*[M]. SCHUMPETER E B, ed. New York: Oxford University Press.
- 曾尔曼. 2010. 重建个人所有制的技术进步路径——马克思生产函数理论导引[J]. 前沿科学, (4).
- ZENG E M. 2010. The technical progress path to rebuild the personal ownership—An introduction of Marx production function theory[J]. *Frontier Science*, (4). (in Chinese)
- 曾尔曼. 2020. 马克思主义创新经济学导引——《资本论》之公理化体系暨量子政治经济学原理[J]. 厦门科技, (2).
- ZENG E M. 2020. An introduction to Marxist innovative economics—The axiomatic system of capital and the principles of quantum political economy[J]. *Xiamen Science & Technology*, (2). (in Chinese)
- 张忠任. 1995. 马克思经济增长模型的自控特性及其启示[J]. 当代经济研究, (4).
- ZHANG Z R. 1995. The self-regulating characteristics of Marx's economic growth model and its implications[J]. *Contemporary Economic Research*, (4). (in Chinese)
- 张忠任. 2004a. 百年难题的破解——价值向生产价格转形问题的历史与研究

- [M]. 北京:人民出版社.
- ZHANG Z R. 2004a. *Solving a century-old problem: The history and research of the transition from value to production price*[M]. Beijing: People's Publishing House.
- 张忠任. 2004b. 马克思再生产公式的模型化与两大部类的最优比例问题[J]. 政治经济学评论, (2).
- ZHANG Z R. 2004b. The model of Mark's reproduction function with the optimal ratio of two [J]. *China Review of Political Economy*, (2). (in Chinese)
- 张忠任. 2013. 论联合生产与马克思主义经济学的兼容性[J]. 社会科学战线, (3).
- ZHANG Z R. 2013. On the compatibility of joint production and Marxist economics[J]. *Social Science Front*, (3). (in Chinese)
- 张忠任. 2021. 一个必要的超越:第二种含义社会必要劳动时间问题解析[J]. 政治经济学研究, (1):18-30.
- ZHANG Z R. 2021. A necessary transcendence: Analysis of socially necessary labor time in the second meaning[J]. *Chinese Journal of Political Economics*, (1):18-30. (in Chinese)
- 张忠任. 2024. 马克思生产函数思想的延伸探索[J]. 中国经济研究, 3(2).
- ZHANG Z R. 2024. An extended exploration on Marx's thought of production function[J]. *Journal of Chinese Economy*, 3(2). (in Chinese)
- 钟契夫,等. 1982. 投入产出原理及其应用[M]. 北京:中国社会科学出版社.
- ZHONG Q F, et al. 1982. *The principle of input and output and its application*[M]. Beijing: China Social Science Press. (in Chinese)
- ARROW K J, CHENERY H B, MINHAS B S, et al. 1961. Capital-labor substitution and economic efficiency[J]. *Review of Economics and Statistics*.
- CHILARESCU C. 2021. A production function with variable elasticity of substitution greater than one[J]. *Papers*, DOI: 10.48550/arXiv.2103.08679.
- FUJIMORI Y. 1992. Wage-profit curves in a von Neumann- Leontief model: Theory and computation of Japan's economy 1970—1980 [J]. *Journal of Applied Input-Output Analysis*, 1(1): 43-54.
- KRELLE W. 1971. Marx as a growth theorist[J]. *German Economic Review*, 9(2).
- LEONTIEF W. 1936. Quantitative input and output relations in the economic system of the United States[J]. *Review of Economics and Statistics*, 18(3):

- 105-125.
- LEONTIEF W. 1937. Interrelation of prices, output, savings and investment[J]. *Review of Economics and Statistics*, 19(3): 109-132.
- LEONTIEF W. 1938. The significance of Marxian economics for present-day economic theory[J]. *The American Economic Review*, 28(1): 1-9.
- LIU T C, HILDEBRAND H. 1965. *Manufacturing Production Functions in the United States 1957*[M]. Ithaca: Cornell University Press.
- LU Y. 1967. Variable elasticity of substitution production functions, technical change and factor shares[R]. ISU General Staff Papers.
- MORISHIMA M. (= 森島通夫, 1973). *Marx's economics—A dual theory of value and growth*[M]. Cambridge: Cambridge University Press; 117-128.
- REVANKAR N S. 1971. A class of variable elasticity of substitution production functions[J]. *Econometrica*, 39(1).
- SAMUELSON P A. 1957. Wages and interest: A modern dissection of Marxian economic models[J]. *American Economic Review*, 47.
- SATO R, HOFFMAN R F. 1968. Production functions with variable elasticity of factor substitution: Some analysis and testing[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 50(4).
- SOLOW R M. 1956. A contribution to the theory of economic growth[J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1).
- STANLEY L B. 1993. Retrospectives the law of diminishing returns[J]. *Journal of Economic Perspectives*, 7(3).
- WICKSTEED P H. 1894. *An essay on the co-ordination of the laws of distribution* [M]. London: Macmillan & Co.
- 大西広. 2005. 市場と資本主義の関係についての史的唯物論的理解について[J]. 季刊経済理論, 42(1).
- 大西広. 2010. 「マルクス派最適成長論」の社会観・人間観: 人間, 自然, 生産の関係と土台・上部構造論についての試論[J]. 経済論叢, 184(4).
- 大西広. 2012. 『マルクスの経済学』[M]. 東京: 慶應義塾大学出版会.
- 大西広, 金江亮. 2008. 「マルクス派最適成長論」の到達点と課題[J]. 立命館経済学, 56(5,6).
- 大西広, 山下裕歩. 2002a. 時間選好率格差、階級分裂および初期資産格差の「マルクス・モデル」への影響: 結果の所得格差と径路の最適性について[R]. 京都大学 working paper No. J-28.

- 大西広, 山下裕歩. 2002b. マルクス経済学の再構成 : 史的唯物論、労働価値説、剰余価値説[R]. 京都大学 working paper No. J-20.
- 高木尚文. 1971. VES生産関数[J]. 成城大學經濟研究, (36).
- 李帮喜. 2012. 線型經濟理論と中国經濟のターンパイク: Marx, Sraffa, von Neumannを基礎として、早稲田大学博士学位論文(経済学)、学位の種類: 博士(経済学)、授与年月日: 2012/6/20; 早大学位記番号: 新 6030.
- 三土修平, 大西広. 2002. 経済学(新しい教養のすすめ)[M]. 京都: 昭和堂.
- 山下裕歩, 大西広. 2003. 「マルクス・モデル」の諸性質と生産要素としての労働の本性[J]. 經濟論叢, 172(3).
- 山下裕歩, 大西広, 茹仙古丽・吾甫尔. 2004. 关于马克思最优增长论的解释—最优迂回生产程序的资本主义数学模型[J]. 海派经济学, 11.
- 深山明. 2013. グーテンベルク生産論の意義[J]. 同志社商学, 64(6)期.
- 置塩信雄. 1988. 経済学[M]. 東京: 大月書店.

Deductive Expansion: The Inner Logic of Marx's Production Function Thought and Economic Growth Models

ZHANG Zhongren

(Institute of Mathematical Economics Osaka, Osaka, Japan)

Abstract: This paper shows that the idea of the production function originated with classical political economists. The formula $W=c+v+m$, which appears for the first time in Volume 3 of Capital, is a typical expression of a linear production function. Although some attempts to exponentiate the Marxian production function (e. g., the study of Onishi Hiroshi) are not yet satisfactory, the progress of the study of the production function from the particular to the general reveals that both the linear production function and the exponential production function (especially the C-D production function) belong to the special case of the CES-type production function, and the two are united in this sense. When the production function is further generalized to the VES type, the intrinsic connection between Marx's production function and other related production functions becomes clear. Marx's model of reproduction is also a kind of production function, which is a production function in the form of a set of equations constructed by Marx by using the means of economic analysis to derive the equilibrium conditions of simple

reproduction and expanded reproduction, which contains the self-regulating mechanism, through the exchange relationship between the two categories. In conclusion, the production function is a new field of political economy research, originated from the new understanding of Marxist economics triggered by the progress of the fusion of mathematics and economics, and it is a promising new subject in the combination of the inheritance and the development of Marxist economics. It can not only expand the theory of Marxist economics in a new dimension but also further improve the application system of Marxist economics, especially providing new tools or means for the formulation or analysis of economic policies, so that economic theories can better serve the solution of real economic problems.

Keywords: linear production function; Euler's theorem; CES production function; reproduction; the Two sectors