

混合分班还是分层教学 ——基于同群效应视角的理论研究

张蕊¹ 宋信息²

摘 要 如何实现最优教学一直是教育政策制定者、教育管理者和学生家长关心和争论的话题,但在学术界还缺乏严格的理论分析。本文构建了一个可以在不同教学目标情况下分析两种常用分班教育(混合分班还是分层教学)优劣的模型。该模型在一个简易的框架下充分考虑了影响学生成绩的关键变量,包括老师教学能力、学生学习能力、学生努力程度,以及教育经济学实证文献中强调的同群效应。实证文献中发现的“单交叉”“烂苹果”“分层/分流”等同群效应机制可以在模型中进行灵活设定与分析。该模型可以解释不同分班教育的效果差异,为理解文献中不同的研究发现和为学校管理者选择最优的分班教育模式提供了一个理论分析框架,填补了研究分班教学模式的理论文献空白。

关键词 同群效应;混合分班;分层教学;效率与公平

0 引言

学校教育是一个教育产出的过程,如何利用有限的教育资源实现最优的教育目标是教育管理者面临的核心问题。在教育产出过程中,学校管理者要对不同教学能力的老师和不同学习能力的学生进行排列组合,他们常用的教育管理方法有两种:一是把学生混合分班,二是根据学生学习能力进行分层教学。混合分班的出发点是公平教育,而分层教学可以实现因材施教。以北京市为例,目前很多知名学校如北京四中、北京大学附属中学、北京101中学、北京八一学校等都进行了教学改革,采用了分层教学。北京八一学校校长李希贵说:“学校的改革很大程度上是被逼出来的,因为原来有不少学生在课堂上‘吃不饱’,同时又有些学生听不懂,分层分类教学满足了不同层次学生的需求。”北京市101

1 张蕊,首都经济贸易大学国际经济管理学院副教授,E-mail:ruizhangecon@163.com。

2 宋信息(通讯作者),首都经济贸易大学国际经济管理学院副教授,E-mail:sxx7079@163.com。

中学在其分层教学实施方案中认为:分层教学是按照最优化原则进行的教学实践。是根据学生层次的差异,通过班级组织与教学形式的变化,通过分层组织教学,使不同层次的学生经过努力达到相应的教学目标,体现了“因材施教”的原则,是提高教学效率的有效策略^①。从这些学校每年的升学成绩来看,分层教学似乎取得了很好的效果。

虽然不同的分班模式关乎的是学生的学习成绩和学校管理者的管理目标,但是分层教学在社会上也一直存在争论,对分层教学利弊的研究存在不同的声音:一种是反对的态度,认为分层教学破坏了教育的公平性。例如许双成和张立昌(2015)认为“分层分班教学,作为特殊的教学组织形式,是在班级授课制的基础上畸形发展而来的,在中西部地区优质教育资源短缺的学校中尤为突出。分层分班教学蕴含着非理性的内核,它曲解了因材施教,误解了差异发展,实际上背离了教育公平的精神追求,其恶性膨胀会导致教育异化,应该引起高度的警惕。”佐藤学(2010)也提出了相似的观点。另一种是赞成的态度,认为分层教学对学生可以产生积极的影响。例如北京101中学在其分层教学实施方案中指出“教育平等是近年来我们一直遵循的教育原则。但是,真正的教育平等并不是一刀切实行统一标准,让每个学生都适应统一难度统一进度的课程,而是为每一位学生提供相对适应其本人特点的课程及教学以最大程度激发其潜能。”

目前关于分层教学的各种观点更多地是指出了分层教学的某个方面存在的问题,但缺乏严格且较为系统的逻辑分析,使得我们对混合分班和分层教学的认识还停留在对现象的争论中,所持观点的双方谁也不能说服对方。要想合理地分析混合分班和分层教学,需要在一个统一的逻辑框架中充分考虑学校管理者的决策目标、决定教学效果的主要影响因素,以及这些因素是如何相互作用以决定混合分班与分层教学优劣的。

1 研究视角及文献综述

1.1 研究视角

分层教学与不分层教学对学生成绩的影响主要来自两个方面。第一是师资方面的不同,分层后的不同班级配备的教师能力可能会有不同。第二就是学生层面的不同,包括每个学生学习能力以及同学学习能力的不同。以往探讨学生学习成绩的影响因素时,关注的焦点大多集中在教师的教学能力、学生的学习能力和努力程度对学生的学习成绩有决定性影响(王骏等,2017)。但是教育

^①《北京市第一〇一中学初一数学和英语学科分层教学实施方案(试行)》,2014年。

学和经济学的实证研究皆指出学校教育中的同群效应(peer effects)是影响学生成绩的重要因素^①,即一个学生的学习成绩是受同班同学影响的(Epple and Romano, 2011; Sacerdote, 2011; 张学敏和谭俊英, 2012)^②。所以,给定教师的教学能力和学生的学习能力,不同的分班模式会因为产生不同的同群效应而产生不同的教学效果。

本文的研究目的是基于不同分班策略下的同群效应与教师教学能力、学生学习能力的相互作用来分析混合分班和分层教学哪种分班教育模式可以更好地实现学校管理者教育的目标。我们通过构建模型为分析两种分班教育模式的利弊提供了一个基础理论研究框架。在这一理论模型中我们可以灵活设定学校管理者的目标,但在主要的分析中我们假设学校管理者想要最大化学生的升学率,这也是目前国内绝大部分学校管理者的目标。

在模型中,我们既考虑到学生之间存在学习能力的差异,也考虑到师资的差异,即老师的教学能力存在差异。学生的学习成绩不仅取决于自己的学习能力、努力程度和老师的教学水平,也依赖于同班其他同学的努力程度。学生之间的同群效应有不同的理论机制和实证发现,比如“单交叉”(single crossing)机制认为学生之间的同群效应总是正的,而“烂苹果”(bad apple)机制认为能力低的学生会带来负同群效应,其他的同群效应机制可以参见文献综述部分。我们将以“单交叉”机制作为基准模型进行分析,然后讨论其他同群效应机制的影响。在基准模型里,我们假设班级里的其他同学学习越努力,学生受到他们的正面影响也会更加努力学习,从而提高自己的学习成绩。在不同的分班教育模式下,每个学生会根据自己的学习能力,配备的师资以及身边同学的努力程度来选择自己最优的努力程度。而每个学生自身选择的努力程度与他自己的学习能力、老师的教学水平以及其他同学的努力程度一起决定他的学习成绩。在不同的分班模式下,同样学习能力的学生会取得不同的成绩,这是由于:(1)不同分班模式下身边同学的组成不同,所以同群效应不同,这导致学生的努力程度也会不同,从而使得其最终成绩也有所不同;(2)如果安排教学能力不同的老师给不同班级,也会影响每位学生的努力程度,从而影响学生成绩。在主要分析中,学校管理者的目标是使得该学校的上线率达到最大,所以会选择使得该学校有最大比例的学生达到录取分数线的分班模式。

我们将模型的分析转化为两阶段动态博弈(two-stage dynamic game),在博弈第一阶段学校管理者根据他预期到的不同分班模式下的学习成绩选择混合分班或是分层教学来最大化学校上线率,在博弈第二阶段学生会考虑到老师的

① 中文文献中,同群效应也译作同伴效应或同辈效应。

② 更多相关研究见文献综述。

教学能力、同班同学的学习能力,以及努力程度来选择自己的努力程度。我们使用完美纳什均衡(perfect Nash equilibrium)作为均衡概念,利用逆向归纳法(backward-induction)求解模型的均衡解。

在基于“单交叉”同群效应的基准模型中,我们首先分析师资水平没有差异的情况。发现当学校的学生成绩相对于录取分数线较高,比如省、市重点中学,那么采用混合分班的模式比分层分班模式可以使得更多学生达到录取分数线。而当学校的学生成绩相对于录取分数线较低,比如普通中学,那么采用分层分班模式比混合分班的模式可以使得更多学生达到录取分数线。这是由于分层教学可以让学习能力比较强的学生受益于更强的同群效应从而更大幅度地提高成绩,使得他们的成绩要比混合分班的情况下更好。但是分层教学却会使得学习能力较弱的学生从同群效应中获益更少,成绩要比混合分班的情况下更低。如果学校水平比较高,学习能力比较高的学生即使在同群效应较小的情况下也可以上线,那么学校管理者为了使得更多的学生上线,采用混合分班既不会影响学习能力高的学生上线,还可以使学习能力较低的部分学生受益于更大的同群效应从而提高成绩达到录取分数线。但是如果学校水平比较低,学习能力比较低的学生不管在混合分班还是分层教学的情况下都无法上线,这种情形下学校采用分层教学至少可以使部分学习能力相对优秀的学生受益于更大的同群效应从而提高成绩达到录取分数线。

我们接着分析有师资水平差异的情况。在师资水平存在差异时,分层分班存在两种情况:一是正向匹配分层分班,即安排教学水平高(低)的教师教学习能力高(低)的班级;二是逆向匹配分层分班,即安排教学水平高(低)的教师教学习能力低(高)的班级。在师资水平差异较小时,我们发现:当学校的学生成绩相对于录取分数线较高时,那么采用混合分班的模式可以使得更多学生达到录取分数线;当学校的学生成绩相对于录取分数线较低时,采用正向匹配分层分班模式可以使得更多学生达到录取分数线。而在师资水平差异较大时,我们发现:当学校的学生成绩相对于录取分数线较高时,那么采用逆向匹配分班的模式可以使得更多学生达到录取分数线;当学校的学生成绩相对于录取分数线较低,这时采用正向匹配分层分班模式可以使得更多学生达到录取分数线;而当录取分数线处于中间时,具体哪种分班模式更优是不确定的,这种情况下我们给出了不同分班模式占优的条件。

此外,我们在基于“单交叉”同群效应的基准模型中分析了学校管理者目标是最大化学生总成绩的情况。给定这个目标,我们发现分层分班教学要比混合分班好。这是因为学习能力强的学生可以从同群效应中获益更多,从而更大幅度地提高成绩。而学习能力较弱的学生从同群效应中获益有限,混合分班并不能使他们因为身边存在学习成绩优秀的学生而大幅度提高成绩。这就意味着

我们可以在不额外增加教育资源投入的情况下,仅仅通过调整分班就可以改变教育的产出。

在分析完基于“单交叉”同群效应的基准模型后,我们对其他的同群效应机制进行了分析,重点分析了实证文献中发现的“烂苹果”机制和“分层/分流”(boutique/tracking)机制。在“烂苹果”机制中,能力最低的一部分学生会对其他同学产生负同群效应,这会改变分班模式选择时分数线阈值:如果带来负同群效应的学生数量越多或者负同群效应越大,学校越倾向于选择正向匹配分层教学;如果带来负同群效应的学生数量比较少或者负同群效应比较小,分班的选择则与基准情况相似。在“分层/分流”机制中,所有学生在分层教学时的同群效应大于混合分班时的同群效应,因为分层教学时班里同学能力更接近,这也会改变分班模式选择时分数线阈值:如果分层教学与混合分班时同群效应差别比较大,则分层教学要优于混合分班,而正向匹配还是逆向匹配更好则取决于学生成绩与录取分数线的比较;如果分层教学与混合分班时同群效应差别比较小,分班的选择则与基准情况相似。虽然我们仅重点讨论了“烂苹果”机制和“分层/分流”机制,我们的基准模型也可以用来分析其他可能的同群效应机制,对此我们做了简要讨论。

最后,我们根据模型的分析探讨了如何在分层教学中兼顾效率与公平。我们的分析表明,混合分班作为一种公平的分班教育模式并不总是没有效率的,教育部门可以通过适当的教育管理措施实现效率与公平的兼顾。因此,我们的理论模型具有丰富的政策意义。

1.2 文献综述

本文的研究主要受到教育学与经济学关于同群效应研究的启发。目前国内外的研究以实证研究为主,这些实证研究对同群效应进行了识别与度量,并对学者提出的多种同群效应模型进行了检验。同群的影响存在于教育的各个层面,而且影响到学业成绩、职业选择、毒品使用、未成年人怀孕等多个方面。我们这里主要讨论在中小学中同群效应对学业成绩影响的文献。国外的研究方面,Lazear (2001)提出了“烂苹果”机制,认为一个班里一个或少数能力低的学生会对整个班级带来负面的影响,因为他们的行为干扰了其他同学或者老师需要照顾这部分能力低的学生而影响其他同学。Lavy et al. (2012)用留级学生近似代表低能力学生,发现在初中或高中一个班里留级生的数量越多,对班里同学的学习成绩负面影响越大。Huang and Zhu (2020)利用2013—2014学年中国教育面板调查数据发现七年级学习成绩差的学生对其他学生的学习成绩有显著的负面影响,而这一影响却在九年级学生中不显著。“杰出人物”(shining light)机制与“烂苹果”机制相反,认为一个或少数能力高的学生会对全

班有正的同群效应,但这一理论没有强有力的实证支持。“歧视性对比”(invidious comparison)机制(Byrne, 1996)认为学生会与自己的同学比较,能力高的同学或排名高的同学会给自己带来压力因而产生负的同群效应。Murphy and Weinhardt (2020)、Elsner and Isphording (2017)和 Elsner et al. (2021)等研究了学生在班内相对排名如何影响他们的考试成绩。“分层/分流”机制认为学生与自己能力相同的同学在一起成绩会更好,因为能力相似的学生更容易相互学习与帮助,或者老师教能力相似的学生可以因材施教。Cooley (2010)发现成绩高的学生从成绩高的同群中收益最多。Betts and Shkolnik (2000)使用了美国约100所中学的数据,发现基于能力差异的分层教学对学生的数学平均成绩几乎没有影响,可能的原因是分层班级之间没有教师质量的差异。Figlio and Page (2002)使用了美国一个具有全国代表性的样本,发现分层教学并没有对低学习能力学生的成绩造成负面影响。Vandenberge (2006)使用OECD国家的数据分析了分层教学对15岁学生数学、科学和阅读能力的影响,发现分层教学的影响并不明显。Duflo et al. (2011)在肯尼亚的120所小学做了随机试验,发现分层教学提高了所有学生成绩,因为老师更有动力针对不同能力学生进行教学。“单交叉”机制认为同群效应总是正的。Boozer and Cacciola (2001)利用“小星星项目”(Project Star)中同群的随机安排发现一年级、二年级、三年级中同群平均成绩的影响系数是0.30, 0.86, 0.92。Hanushek et al. (2003)利用美国德州的小学数据研究发现,每个学生的成绩受到他/她同学成绩的正面影响。Ammermueller and Pischke (2009)利用六个欧洲国家的小学数据研究发现,同伴组成测度(measure of peer composition)的标准差每增加1个标准差,学生阅读分数增加0.11个标准差。Burke and Sass (2013)利用美国佛罗里达公立学校的数据也发现学生的成绩受到同班同学的显著影响。不同于以上理论,Carrell et al. (2013)发现高能力的学生会对低能力的学生会有很强的正面影响,而对中等能力学生没影响。Hoxby and Weingarth (2005)发现不能用任何单个同群效应模型解释数据,同群效应可能会通过“单交叉”、“分层/分流”等多种机制共同产生影响。其他国外研究同伴效应对学生成绩影响并发现显著结果的实证研究还包括Gamoran (1987), Hoxby (2000), McEwan (2003), Hanushek and Wößmann (2006), Lu and Anderson (2015)。关于其他的同群理论及其实证证据的英文文献参见Epplé and Romano (2011), Sacerdote (2011), Wennberg and Norgren (2021)。

国内文献方面,张学敏和谭俊英(2012)考察了同群效应对初中生学习成绩的影响,发现以学习成绩来衡量的同伴能力对不同能力的学生有不同程度的影响,并且任何水平的学生都会受益于同质性同伴群体,这一结论支持“分层/分流”机制。袁玉芝(2016)基于上海2012年PISA数据发现作为教育生产函数中

重要因素的同伴对个体的成绩有较大的影响。整体而言,同伴的平均成绩越高,标准差越小,对个体的学业发展越有益,这一发现支持“单交叉”机制。王春超和肖艾平(2019)对小学生随机排座后的学习成绩进行跟踪研究,考察了班级处于高中心性地位的学生对与其座位距离不同的同伴学习成绩的影响。他们发现在班级社会网络中,与高中心性学生每减少1个座位距离,平均成绩可提高0.43~0.78个标准差。而国内关于同群效应对学生其他方面影响的文献包括詹宏毅和陈超群(2017)、王春超和钟锦鹏(2018)和赵颖(2019)。其中詹宏毅和陈超群(2017)和赵颖(2019)考察了同群效应对学生认知能力影响,而王春超和钟锦鹏(2018)考察了同群效应对学生非认知能力影响。关于教育中同群效应的中文文献综述可以参见郑磊(2015)、杜育红和袁玉芝(2016)、崔静和冯玲(2017)、叶星和熊伟(2017)。

以往文献为同群效应这一影响学生成绩的重要因素提供了实证依据,但目前对同群效应和其他影响学生成绩的因素之间的相互作用机制还缺乏研究。而本文把教师教学能力差异、学生学习能力差异以及同群效应这些影响学生成绩的重要因素纳入统一分析框架,考察它们如何相互作用共同决定不同分班模式的优劣。

跟研究分层教学的实证文献相比,关于分层教学的理论分析还十分有限。分析同群效应在教育中影响的开创性理论研究是 Arnott and Rowse (1987),他们分析了基于能力的同群效应下,如何将不同能力的学生分配到不同班级以达到社会最优。在模型中,他们假设每个学生的技能水平或教育结果是班里学生平均能力的增函数,同时也是自己能力和所在班级教育支出的增函数,教育计划者面临的问题是如何把不同能力的学生分到不同班级以及如何分配教育支出使得总社会福利(模型中是总的技能水平)最大化。然而,该模型存在一定局限性。首先,这一模型忽视了学生的努力程度,只有学生能力这一外生变量影响成绩;此外,这一模型假设均值同群效应,不够灵活,很难讨论实证中的同群效应模型;最后,这一模型只关注社会总福利最大化,而忽视了学校管理者的目标是最大化录取率。之后一系列关于教育中同群效应的理论研究都基于该模型,但与本文探讨的问题关系不大。比如, Benabou (1993)假设高技能比低技能对其他人有更大的同群效应,分析了个体获取高技能还是低技能的最优选择以及他们的选择最终如何影响劳动力市场。McMillan (2005)分析了来自高收入家庭学生对教育质量的需求如何影响公立学校与私立学校的教育提供进而影响来自低收入家庭学生的受教育质量。其他的理论拓展参见 Epple and Romano (2011)。与本文研究问题比较相似的文献是陈昊等人(2015)的研究。陈昊等(2015)将学生之间的竞争看作体育赛事的竞争,将不同的分班制度看作

不同的激励机制,通过引入竞赛模型分析不同分班方法的利弊。与陈昊等人(2015)不同,我们的模型考虑的是学生之间的同群效应,他们的努力程度是互补的,而不是竞争性的,这也更符合实证文献的结论;此外,与陈昊等人(2015)相比,我们明确考虑了教师能力的差异和教师资源的约束,这也是决定不同分班模式教学效果的重要因素。

本文构建了一个基础理论框架来比较不同教学目标下分层教学与混合分班教学的效果差异,模型充分考虑了影响学生成绩的关键变量——老师教学能力差异、学生学习能力差异、学生努力程度,并引入了文献中所实证存在的同群效应。我们模型的优势是可以灵活分析同群效应的不同机制。在基准模型中我们分析“单交叉”这一同群效应机制,而在拓展模型中我们分析了“烂苹果”、“分层/分流”等同群效应机制。基于模型分析,我们可以解释不同教学模式的效果差异,也可以根据学校管理者的不同管理目标为其提供教育建议。该模型填补了研究分班教学模式的理论文献空白,为今后关于混合分班和分层教学的研究提供了一个参考框架。

本文余下的结构是:第2部分是基准模型的设定,基准模型假设“单交叉”同群效应机制,将学校分班教学模式的选择转化为一个两阶段纳什博弈;第3部分是基于学校管理者最大化学生升学率的管理目标来求解基准模型,并考虑了教师能力存在差异的情况;第4部分是在基准模型中分析学校管理者最大化学生总体成绩的管理目标时教学模式的选择;第5部分重点分析“烂苹果”、“分层/分流”两种同群效应机制,并简要讨论其他机制的分析;第6部分在本文的分析框架下讨论如何兼顾效率与公平,并提出相应的政策建议。为了便于读者阅读,我们将主要定理的证明放在附录。

2 基准模型设定

假设一所学校由学生与老师组成,学生之间的学习能力和老师之间的教学能力都存在差异。为了分析方便,我们假设学生们的学习能力 a_i 在 $[0,2]$ 上服从均匀分布(uniform distribution)。老师的教学能力有高和低两种,教学能力高的老师的教学能力为 k_h ,教学能力低的老师教学能力为 k_l , $k_h > k_l$ 。两种老师的数量相等,各占总教师数量的一半。在同一个班级内学生之间存在同群效应:即每个学生的学习努力程度会受到同班其他同学努力程度的正面影响。在我们的基准模型中,我们假设“单交叉”同群效应机制,即同群效应总是正的。如果身边同学更加努力学习,“我”也会付出更多努力来学习,正如中国古语中所谓的“近朱者赤,近墨者黑”。

学校管理者需要将学生进行分班教学,我们假设管理者将学生分为两个班,每个班级学生数量相同。学校管理者面对的问题是如何将学习能力有差异的学生进行分班和如何给班级安排教学能力存在差异的教师以使得教学效果达到最好。这里衡量教学效果的标准是有多少同学的成绩比录取分数线高^①。

下面我们来看学生的学习成绩是如何决定的。假设一个学习能力为 $a_i \in [0, 2]$ 的学生 i , 如果他的学习努力程度是 $e_i \in [0, \infty]$, 那么他的学习成绩 y_i 是:

$$y_i = ka_i(e_i + \theta \int_j e_i e_j da_j)$$

其中 $k = \{k_h, k_l\}$ 代表学生 i 所在班级的老师的教学能力。给定老师的教学能力 k 和学生自身的学习能力 a_i , 学生 i 的学习成绩主要受自身的努力程度 e_i 和同群效应的影响。在这里, $\theta \int_j e_i e_j da_j$ 代表了同群效应带来的收益。其中 θ 是个规模参数, 代表同群效应的大小或者重要性, “单交叉”机制认为对于所有的 j , 都有 $\theta > 0$ 。 e_j 代表学生 i 的同学 j 努力程度, 学生 i 所受的同群效应来自于所有同学^②。我们模型中关于同群效应的设定借鉴了多篇探究同群效应的理论文章中的模型设定^③。同时学生 i 的学习成绩也会受教师的教学能力 k 和学生自身的学习能力 a_i 影响。给定同样的学习努力程度, 教学能力更高的老师教的学生成绩更高, 学习能力强的学生成绩更高。

我们假设付出努力程度 e_i 的学生 i 的努力成本是 $\frac{1}{2}ce_i^2$ 。给定这些设定, 我们可以得到学习能力为 a_i 、努力程度为 e_i 、教师教学能力为 k 的学生 i 的效用水平如下:

$$U_i = ka_i(e_i + \theta \int_j e_i e_j da_j) - \frac{1}{2}ce_i^2 \quad (1)$$

学校管理者若要将学生分为两个班, 可供分班的方法有: (1) 将学生混合分班; (2) 根据学生能力进行分层教学^④。同时, 学校管理者还要为不同班级安排老

① 这里的录取分数线可以是大学本科的录取分数线, 也可以是初中升高中的录取分数线。我们这里讨论的是大多数学校的普遍目标。在现实中, 特定学校的目标会有不同, 比如省重点中学的目标是使得更多学生的分数超过 985 或 211 大学的录取分数线。

② 基于学生数量足够多, 学生 i 的学习努力程度相对于同学总体的努力程度小的可以忽略, 所以我们可以近似假设所有同学也包括学生 i , 即 $\int_{j \neq i} e_i e_j da_j \approx \int_j e_i e_j da_j$ 。这样既可以简化数学分析, 也不失一般性。

③ 如 Calvó-Armengol and Zenou (2004), Ballester et al. (2006, 2010) 和 Calvó-Armengol et al. (2009)。

④ 学习能力可以通过学生入学成绩来测度。

师。混合分班时学生和教师都是混合安排的。而根据学生的学习能力进行分班时学校可以分配教学能力高(低)的老师教学习能力高(低)的班级,也可以分配教学能力高(低)的教师教学习能力低(高)的班级^①,我们称前者为正向匹配分层教学,后者为逆向匹配分层教学。学校的决策取决于哪种分班方法能够使得该学校学生的上线率达到最高。

学校的分班问题是一个两阶段博弈:第一阶段学校管理者选择分班方法,是选择混合分班教学还是选择分层分班教学;第二阶段每位学生在自己所分班级选择最优的学习努力程度使得自己的效用最大化,我们采用的均衡概念为完美纳什均衡。为求解完美纳什均衡,我们采用逆向归纳法,先考虑第二阶段博弈的均衡再考虑第一阶段博弈的均衡。

3 基准模型均衡

3.1 第二阶段均衡:学生选择最优学习努力程度

以下我们分别分析在不同分班方法下学生最优的努力程度以及学习成绩。

3.1.1 混合分班

如果学校管理者采取的是对学生和老师进行混合分配,那么每个班的学生学习能力则有高有低,即 $a_i \in [0, 2]$ 。同样,每个班级的教师的教学质量是一个平均水平 $\bar{k} (k_h > \bar{k} > k_l)$,可能某个科目第一个班级的老师水平更高,而另外一个科目则是第二个班级的老师水平更高,综合下来两个班级所匹配的平均师资水平是一样的。这种情况下学生 i 的效用水平为:

$$U_i = \bar{k} a_i \left(e_i + \theta \frac{\int_0^2 e_j da_j}{2} \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (2)$$

给定自己的学习能力 a_i ,老师的教学水平或者质量 $\bar{k}$,还有同班中其他每位同学的努力程度 e_j ,学生 i 选择自己的努力程度 e_i 最大化自己的效用水平。而效用最大化的一阶条件为:

$$\frac{\partial U_i}{\partial e_i} = \bar{k} a_i \left(1 + \theta \frac{\int_0^2 e_j da_j}{2} \right) - c e_i = 0$$

根据计算,我们可得学生 i 的最优反应函数(best response function)如下:

$$e_i = \frac{\bar{k} a_i}{c} \left(1 + \theta \frac{\int_0^2 e_j da_j}{2} \right) \quad (3)$$

^① 老师的教学能力可以通过老师的教学经验、荣誉称号来衡量,比如特级教师、高级教师。

为了计算第二阶段的纳什均衡,我们需要计算所有学生总的努力程度。我们通过对所有学生努力程度,也即公式(3)积分可得所有学生总的努力程度:

$$\int_0^2 e_i da_i = \frac{\bar{k}}{c} \left(1 + \theta \frac{\int_0^2 e_j da_j}{2} \right) \int_0^2 a_i da_i$$

因为 $\int_0^2 e_i da_i = \int_0^2 e_j da_j$, 我们可计算每个班级总努力程度如下:

$$\frac{\int_0^2 e_i da_i}{2} = \frac{\bar{k}}{c - \bar{k}\theta} \quad (4)$$

通过该公式,我们可以看出每个班级总的努力程度会随着该班级教师的平均教学水平 $\bar{k}$ 上升而上升,也会随着同群效应的影响 θ 上升而上升。将公式(4)代入公式(3),我们可以得到学生 i 第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{\bar{k}a_i}{c - \bar{k}\theta} \quad (5)$$

为了使得学生付出的努力为正,我们假设努力的边际成本 c 足够大。计算出均衡努力程度后,我们可以计算学生 i 的学习成绩为:

$$y_i = \bar{k}a_i \left(e_i + \theta \frac{\int_0^2 e_i e_j da_j}{2} \right) = \frac{c(\bar{k}a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta)^2} \quad (6)$$

由公式(5)和公式(6)可知,当教师的平均教学水平越高,学生付出的努力越多,成绩越高。同样,学习能力强的学生学习更努力且成绩更高。

3.1.2 分层教学

分层教学有两种安排:正向匹配,安排教学能力高(低)的老师教学习能力高(低)的学生;或者逆向匹配,安排教学能力高(低)的老师教学习能力低(高)的学生。

(1) 分层教学-正向匹配。在正向匹配下,学校管理者将学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生分配到 A 班,并且安排教学能力为 k_h 的教师给 A 班;将学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生分配到 B 班,并且安排教学能力为 k_l 的教师给 B 班。简单来说,这种情况下,学校管理者把学习能力强高的学生分到一个班级,并且匹配最好的教师资源给这个班级。不同于混合分班的情况,这里给学习能力高的班级安排的所有科目的教师都是最好的。在这种分班情况下, A 班学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生的效用函数为:

$$U_i = k_h a_i \left(e_i + \theta \int_1^2 e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (7)$$

我们用和混合分班相同的计算步骤可以得到 A 班学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{k_h a_i}{c - \frac{3}{2} k_h \theta} \quad (8)$$

学生的学习成绩为:

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_h \theta\right)^2} \quad (9)$$

B 班学生的效用函数为:

$$U_i = k_l a_i \left(e_i + \theta \int_0^1 e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (10)$$

我们用相同的计算步骤可以得到 B 班学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{1}{2} k_l \theta} \quad (11)$$

学生的学习成绩为:

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_l \theta\right)^2} \quad (12)$$

(2) 分层教学-逆向匹配。在逆向匹配下, 学校管理者将学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生分配到 A 班, 安排教学能力为 k_l 的教师给 A 班; 将学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生分配到 B 班, 并且安排教学能力为 k_h 的教师给 B 班。这种情况下, 学校管理者把最好的教师资源给了学习能力比较低的班级。在这种分班情况下, A 班学生的效用函数为:

$$U_i = k_l a_i \left(e_i + \theta \int_1^2 e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (13)$$

我们通过计算可以得到 A 班学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{3}{2} k_l \theta} \quad (14)$$

学生的学习成绩为:

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_l \theta\right)^2} \quad (15)$$

B 班学生的效用函数为:

$$U_i = k_h a_i \left(e_i + \theta \int_0^1 e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (16)$$

我们通过计算可以得到 B 班学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{k_h a_i}{c - \frac{1}{2} k_h \theta} \quad (17)$$

学生的学习成绩为:

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_h \theta\right)^2} \quad (18)$$

3.2 第一阶段均衡:学校选择最优分班策略

3.2.1 基本情形:教师没有教学能力差异($k_h = k_l = k$)

在基本情形中,我们假设老师的教学能力没有差异,他们的教学能力均为 k ,因此分层教学下的正向匹配和逆向匹配没有区别。根据之前所求第二阶段均衡,高学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生在分层教学下的成绩为 $\frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k \theta\right)^2}$,而在混

分班下的成绩为 $\frac{c(ka_i)^2}{(c - k \theta)^2}$;低学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生在分层教学下的均衡成绩为 $\frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k \theta\right)^2}$,而在混合分班下的均衡成绩为 $\frac{c(ka_i)^2}{(c - k \theta)^2}$ 。

首先,我们比较分层教学下和混合分班下学习能力高的学生的学习成绩,发现 $\frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k \theta\right)^2} > \frac{c(ka_i)^2}{(c - k \theta)^2}$,所以学习能力高的学生,即 $a_i \in [1, 2]$ 的学生,在分层教学时的学习成绩更优;同样,我们比较分层教学下和混合分班下学习能力低的学习成绩,发现 $\frac{c(ka_i)^2}{(c - k \theta)^2} > \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k \theta\right)^2}$,所以学习能力低的学生,即 $a_i \in [0, 1]$ 的学生,在混合分班时的学习成绩更优。

我们在图 1 中画出不同学习能力学生不同分班策略下的学习成绩曲线,其中黑色实线为混合分班的成绩分布曲线,深灰色虚线为分层教学的成绩分布曲线。

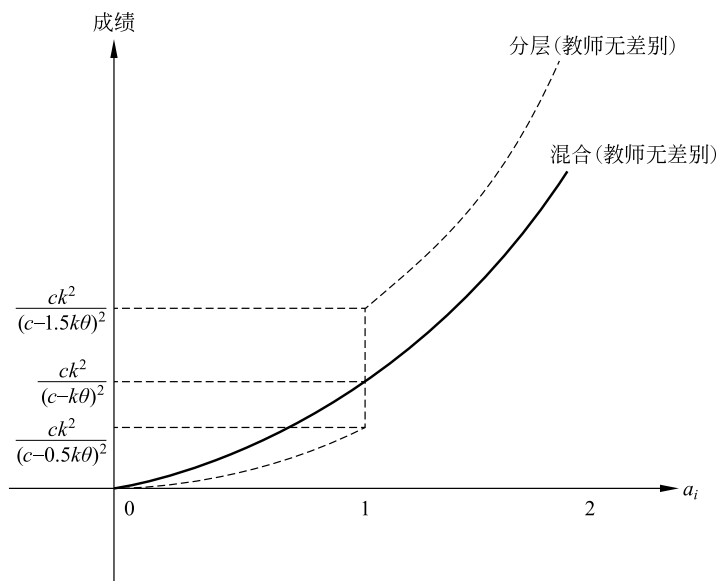


图1 不同学习能力所对应的成绩 ($k_h = k_l = k$)

学校管理者的目标是最大化学校学生的升学率,也就是上线率。学校管理者要采取哪一种分班策略依赖于不同分班策略带来的升学率高低。决定学生升学的录取分数线对于一个学校来说是外生的^①。我们假设学校有一个预期的录取分数线,这一预期可以根据往年的录取分数线估计的^②。如果该学校生源比较好,比如重点中学,则该校大部分学生能通过录取分数线,那么采用混合分班的方法会有更高的升学率。具体来说,假设录取分数线为 L ,我们有如下定理:

定理1: 在老师的教学能力没有差异的情形下:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2}$, 采用混合分班会有更高的录取率。在

这种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \theta \right)$;

(2) 当录取分数线满足 $L \geq \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2}$, 采用分层教学会有更高的录取率。在

这种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \frac{3\theta}{2} \right)$ 。

① 这里我们假设一个学校的考生数量相对于全国或者全省全市所有考生来说数量非常小,所以对录取线的影响可以忽略不计。

② 这一假设是符合现实的,学校往往是根据以往学校的学生上线率以及学生成绩掌握学校分数所处的位置。

定理 1 的证明请见附录。

根据图 1 我们可以看到不同分班方法下录取分数线的高低对录取率的影响。当录取分数线相对于此学校的学生成绩比较低时,比如录取线低于

$$\frac{ck^2}{\left(c-\frac{1}{2}k\theta\right)^2}, \text{混合分班教学会比分层教学有更高比例的学生达到录取分数线;而}$$

$$\text{当录取分数线相对于此学校的学生成绩比较高时,比如高于}\frac{ck^2}{\left(c-\frac{3}{2}k\theta\right)^2}, \text{分层教}$$

学会比混合分班教学有更高比例的学生达到录取分数线。

虽然教师的教学能力没有差异,但不同分班模式产生不同的同群效应,使得混合分班和分层教学成为不同学校的最优选择。分层教学可以让学习能力比较强的学生受益于更强的同群效应从而更大幅度地提高成绩,使得他们的成绩要比随机分班的情况更好。但是分层教学却会使得学习能力较弱的学生从同群效应中获益更少,成绩要比随机分班的情况更低。如果学校水平比较高,学习能力比较高的学生,即使在同群效应较小的情况下也可以上线,那么学校管理者为了使更多的学生上线,采用混合分班既不会影响学习能力高的学生上线,还可以使学习能力较低的部分学生受益于更大的同群效应从而提高成绩达到录取分数线。但是如果学校水平比较低,学习能力比较低的学生不管在混合分班还是分层教学的情况下都无法上线,这种情形下学校采用分层教学至少可以使部分学习能力相对优秀的学生受益于更大的同群效应提高成绩从而达到录取分数线。

3.2.2 一般情形:老师有教学能力差异($k_h > k_l$)

现在我们考虑老师有教学能力差异的一般情形。在以下的分析中我们分别考虑教师间教学能力差异较小的情形与教师间教学能力差异较大的情形。

教师能力差异较小是指逆向匹配分层教学下, A 班中学习能力最差的学生

$$(a_i = 1) \text{ 其成绩也要好于混合分班下的成绩 } \left(\frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2} < \frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \right), \text{ B 班中学习}$$

$$\text{能力最好的学生 } (a_i = 1) \text{ 其成绩也要差于混合分班下的成绩 } \left(\frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} < \right.$$

$$\left. \frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2} \right), \text{ 也即:}$$

$$k_h < \frac{c\bar{k}}{c - \frac{1}{2}\bar{k}\theta} \text{ 且 } k_l > \frac{c\bar{k}}{c + \frac{1}{2}\bar{k}\theta}。$$

换句话说,当教师能力差异较小时,即使安排教学能力低的教师给学习能力高的班级依然可以使得这个班级学生的学习成绩好过混合分班时候的成绩。这是因为学生从同群效应中的获益要大于由于教师能力不足给他们带来的损失。同样,安排教学能力高的教师给学习能力低的班级依然无法使得这个班级的学生学习成绩高于混合分班时候的成绩,这种情况下学生因为同群效应带来的损失要大于教学能力高的教师给他们带来的好处。也就是说即使老师水平更高,但是由于周围同学的学习努力程度低,使得该班级的学生的学习成绩不如身边有成绩优秀学生时的成绩。简单总结来说,在这种情形下,老师教学水平的影响还不如身边同学的影响。

教师能力差异较大是指逆向匹配分层教学下,A班中学习能力最差的学生($a_i=1$)其成绩要差于混合分班下的成绩 $\left(\frac{ck_i^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} < \frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2}\right)$,B班中学习能力

能力最好的学生($a_i=1$)其成绩要好于混合分班下的成绩 $\left(\frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2} <$

$\frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}\right)$,也即:

$$k_h > \frac{c\bar{k}}{c - \frac{1}{2}\bar{k}\theta} \text{ 且 } k_l < \frac{c\bar{k}}{c + \frac{1}{2}\bar{k}\theta}。$$

当教师能力差异较大时,安排教学能力低的教师给学习能力高的班级会使得这个班级部分学习能力处于尾端的学生成绩低于混合分班时候的成绩。这部分学生从同群效应中获益本身就没有学习能力高的学生多,他们的成绩更受教师教学水平的影响。同样,安排教学能力高的教师给学习能力低的班级会使得这个班级部分学习能力高的学生成绩高于混合分班时的成绩,和学习能力高的班级里的学习能力处于尾端的学生一样,学习能力低的班级里学习能力拔尖的学生即使在混合分班的情况下从同群效应中获益也有限,他们的成绩更受教师教学水平的影响。简单总结来说,当教师能力差异较大时,对于一部分学生来说,老师教学水平的影响会大于身边同学的影响。

(1) 教师教学能力差异较小。这种情形下,教学能力高的老师与教学能力

低的老师之间并没有很大教学能力上的差距。比如有五年教龄的老师与有三年教龄的老师之间的教学能力差距并不大。与老师没有教学能力差异时进行分层教学的情况相比,教学能力高(低)的老师教学习能力高(低)的学生这种正向匹配分班安排会使学习能力高的学生学业表现更好,而学习能力低的学生学业表现更差。而安排教学能力高(低)的老师教学习能力低(高)的学生这种逆向匹配分班安排会使能力高的学生的成绩没有正向匹配情况下的成绩好,而能力低的学生成绩则比正向匹配情况下的成绩好。经过分析我们可得如下定理。

定理 2: 在老师的教学能力差异较小的情形下:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2}$, 采用混合分班会有更高的录取率。这

种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\bar{k}} - \theta \right)$;

(2) 当录取分数线满足 $\frac{ck_l^2}{(c-\bar{k}\theta)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$, 采用正向匹配分层分班

和逆向匹配分层分班有相同的录取率,且都比混合分班有更高的录取率,这种情况下的录取率为 $\frac{1}{2}$;

(3) 当录取分数线满足 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$, 采用正向匹配分层分

班会有更高的录取率,这种情况下的录取率为 $\frac{1}{2}$;

(4) 当录取分数线满足 $L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$, 采用正向匹配分层分班会有更高

的录取率,这种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{3\theta}{2} \right)$ 。

定理 2 的证明请见附录。

这一结论跟老师没有教学能力差异下分层教学的情况相似,我们在图 2 中予以展示。分层(高高,低低)表示教学能力高(低)的老师教学习能力高(低)的学生这种正向匹配分层教学方式,分层(高低,低高)表示教学能力高(低)的老师教学习能力低(高)的学生这种逆向匹配分层教学方式。如果录取分数线

相对于此学校的学生成绩比较低,比如低于 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_l\theta\right)^2}$, 那么采用混合分班会有

更高的录取率;如果录取分数线相对于此学校的学生成绩比较高,比如高于

$$\frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}, \text{那么采用正向匹配分层教学会有更高的录取率。}$$

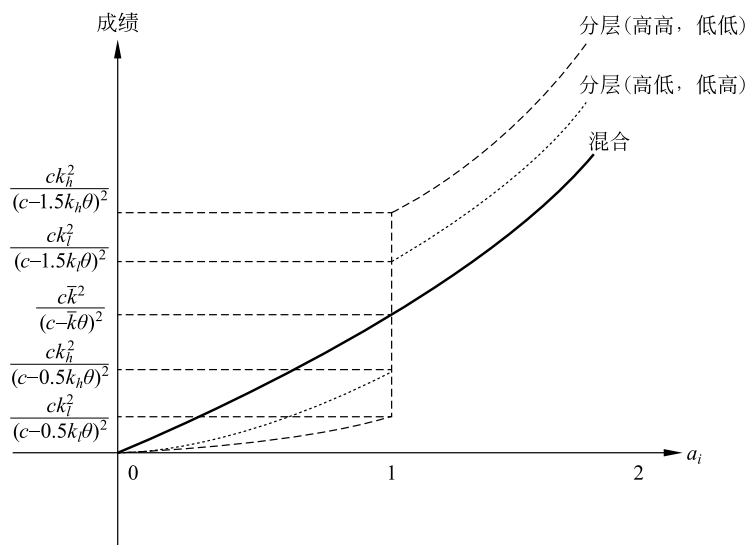


图2 不同学习能力所对应的成绩(教师教学能力差异较小)

(2) 教师教学能力差异较大。如果老师教学能力差异较大,比如说有多年教龄的特级教师的教学能力明显比刚入职不久的年轻教师要高。具体反映在模型中,当 $k_h > \frac{c\bar{k}}{c-\frac{1}{2}\bar{k}\theta}$ 且 $k_l < \frac{c\bar{k}}{c+\frac{1}{2}\bar{k}\theta}$, 安排教学能力高(低)的老师教学

学习能力低的学生这种逆向匹配分层教学会使高学习能力($a_i \in [1, 2]$)学生的学习成绩低(高)于混合分班下的学习成绩,而低学习能力($a_i \in [0, 1]$)学生的学习成绩则优于混合分配下的学习成绩。经过分析我们可得如下定理。

定理3: 在老师的教学能力差异较大的情形下:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$, 逆向匹配分层教学会有更高的录

取率。这种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2}\theta \right)$;

(2) 当录取分数线满足 $L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$, 正向匹配分层教学会有更高的录

取率。这种情况下: 当 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$ 录取率为 $\frac{1}{2}$, 当 $L \geq$

$\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$ 录取率为 $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c}{k_h} - \frac{3}{2}\theta\right)$;

(3) 当录取分数线满足 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_l^2}{(c - k\theta)^2}$, 如果不等式

$$(*) \quad 1 + \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} c \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_h}\right) \geq -\theta \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

成立, 逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则混合分班最优)。这种情况下

的录取率为 $\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2}\theta\right) - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2}\theta\right) \right]$;

(4) 当录取分数线满足 $\frac{ck_l^2}{(c - k\theta)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$, 如果不等式

$$(**) \quad 2 - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_l} - \theta\right) - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_h} - 3\theta\right) \geq 0$$

成立, 逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则正向匹配分层教学最优)。这

种情况下的录取率为 $\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2}\theta\right) - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2}\theta\right) \right]$ 。

定理3的证明请见附录。

我们使用图3进行分析。首先, 我们展示了高教学能力老师所教低学习能力班级中最好学生的成绩 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$ 要低于高教学能力老师所教高学习能力

班级中最差学生的成绩 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$; 其次, 我们展示了低教学能力老师所教低

学习能力班级中成绩最好学生的成绩 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_l\theta\right)^2}$ 要低于低教学能力老师所教高

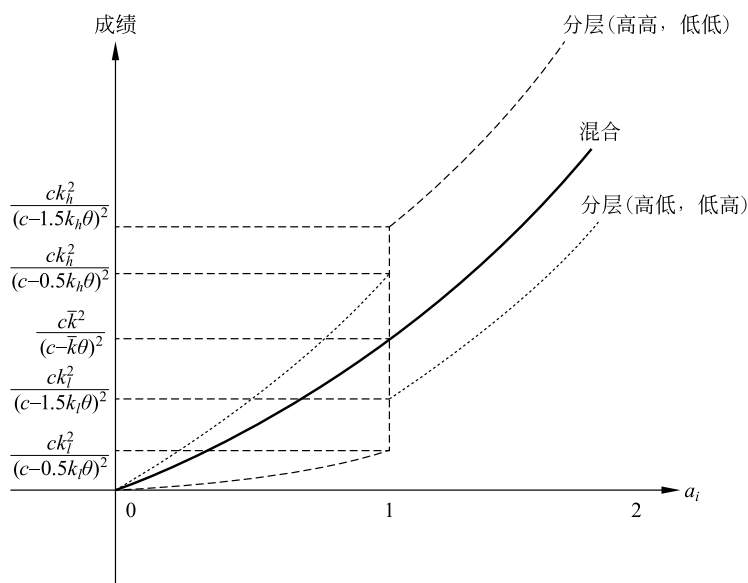


图3 不同学习能力所对应的成绩(教师教学能力差异较大)数值模拟

学习能力班级中成绩最差学生的成绩 $\frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$ 。很显然,当分数线低于

$\frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_l\theta\right)^2}$ 时,采用逆向匹配分层教学可以使得该学校有最多的学生的成绩超

过录取分数线。当分数线高于 $\frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$ 时,采用正向匹配分层教学可以使得

该学校有最多的学生的成绩超过录取分数线。而当分数线处于 $\frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$ 和

$\frac{ck_h^2}{\left(c-k\theta\right)^2}$ 之间时,我们可以比较容易判断采用混合分班要比采用正向匹配分层

教学使学校有更高的录取率。但是我们无法确切判断混合分班和逆向匹配分层教学哪个可以使学校有更高的录取率。这是因为对于学习能力较低,即 $a_i \in [0,1]$ 的学生,逆向匹配分层教学比混合分班教学可以使他们有更高比例的学生成绩高过录取分数线;而对于学习能力较强, $a_i \in [1,2]$ 的学生,混合分班教学比逆向匹配分层教学可以使他们有更高比例的学生成绩高过录取分数线。

线。所以最终哪种分班方式更优要看最终加总的上线率在哪个分班方法下更高。我们通过计算,给出了逆向匹配分层教学占优的条件,即满足不等式(*)。比如当参数 θ 越大,不等式(*)更容易满足,代表逆向匹配分层教学更容易占优。这是因为在这种情况下,学生之间的同群效应更大,安排教学能力很高的老师教学习能力较低的学生会使得这部分学生之间的同群效应显著放大。而学习能力更高的学生之间如果同群效应更大,他们的学习成绩会因为乘数效应显著上升,即使安排教学能力较低的老师对他们学习成绩的影响也会比较有限。这种效应类似于帕累托改善,在不影响一部分学生上线的情况下,通过分班策略使另一部分学生的成绩提高从而提高他们的上线比例,最后提高学生总体的上线率。类似地,而当分数线处于 $\frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2}$ 和 $\frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$ 之间时,我们可以

比较容易地判断采用正向匹配分层教学要比采用混合分班使学校有更高的录取率。但是我们无法确切判断正向匹配分层教学和逆向匹配分层教学哪个可以使学校有更高的录取率。最终哪种分班方式更优要看最终加总的上线率在哪个分班方法下更高。我们通过计算,也给出了逆向匹配分层教学占优的条件,即满足不等式(**)。同样地,当参数 θ 越大,不等式更容易满足,代表逆向匹配分层教学更容易占优。这是因为同群效应很大时,正向匹配分层教学会使学习能力高的班级成绩非常高,全员可以上线,但是学习能力较低的班级成绩会很低,全员无法上线。而逆向匹配分层教学可以通过作用于放大的同群效应而显著提高学习能力较低班级的成绩,使一部分人可以达到录取分数线;同时较大的同群效应也使学习能力较高的班级学生之间有更大的正面影响,使得安排教学能力较低的老师对他们影响也会比较有限。

我们通过数值模拟展示不同分班策略下达到录取线的学生比例。我们设定部分参数值: $\theta=0.1, c=0.5, k_h=2, k_l=1, \bar{k}=1.5$ 。这些参数值满足 $k_h >$

$$\frac{c\bar{k}}{c-\frac{1}{2}\bar{k}\theta} \text{ 和 } k_l < \frac{c\bar{k}}{c+\frac{1}{2}\bar{k}\theta}, \text{ 即教师教学能力差异较大。}$$

$$\text{当录取分数线比较低: } L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} = 4.08, \text{ 我们可以看到安排教学能力}$$

高的老师教学习能力低的学生这种逆向匹配分层分班会有更高的录取率。当

$$\text{录取分数线比较高: } L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} = 12.5, \text{ 我们可以看到安排教学能力高的老}$$

师教学习能力高的学生这种正向匹配分层分班会是最优策略。当录取分数线

$$\frac{ck_l^2}{\left(c-\frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2}, \text{ 即 } 4.08 \leq L \leq 9.18, \text{ 结果并不确定。这是因为在给定}$$

这些参数的条件下,当分数线足够低,比如4.5,这种情况下,不等式(*)成立,

$$\text{因为 } 1 + \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} c \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_h}\right) = -0.25, \text{ 而 } -\theta \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = -0.3, \text{ 所以安排教学水平高的}$$

教师教学习能力低的学生是最优策略。然而当分数线足够高的时候,比如8,这

$$\text{种情况下,不等式(*)不成立,因为 } 1 + \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} c \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_h}\right) = -\frac{2}{3}, \text{ 而 } -\theta \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$-0.4, \text{ 所以混合分班是最优策略。当录取分数线 } \frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c-\frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}, \text{ 即}$$

$9.18 \leq L \leq 12.5$, 结果是确定的。这是因为在目前给定的这些参数的条件下,在 $9.18 \leq L \leq 12.5$ 这个分数段,不等式(**)是不成立的。不等式(**)左边

$$2 - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_l} - \theta\right) - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_h} - 3\theta\right) \text{ 随着录取分数线的提高而下降。当录取分数}$$

$$\text{是 } 9.18 \text{ 时, } 2 - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_l} - \theta\right) - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_h} - 3\theta\right) = -0.223 < 0; \text{ 当录取分数是 } 12.5$$

$$\text{时, } 2 - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_l} - \theta\right) - \left(\frac{L}{4c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2c}{k_h} - 3\theta\right) = -0.75 < 0. \text{ 所以,安排教学能力高的老师}$$

教学习能力高的学生是最优策略。这里的数值模拟运算结果也间接地证明了我们的理论推导结论。

3.3 同群效应的作用

本文基准模型分析在“单交叉”同群效应下该如何分班可以提高上线率。为更清楚地理解同群效应的作用,我们接下来分析没有同群效应时的最优分班策略。为不失一般性,我们在教师有教学能力差异的条件下进行分析。

没有同群效应时, $\theta = 0$ 。这种情况下可得正向分层教学时,高学习能力学

$$\text{生的成绩为 } y_h = \frac{(k_h a_i)^2}{c}, \text{ 低学习能力学生成绩为 } y_l = \frac{(k_l a_i)^2}{c}; \text{ 逆向分层教学时,}$$

$$\text{高学习能力学生的成绩为 } y_h = \frac{(k_l a_i)^2}{c}, \text{ 低学习能力学生成绩为 } y_l = \frac{(k_h a_i)^2}{c}; \text{ 混}$$

$$\text{合分班时,学生的成绩为 } y = \frac{(\bar{k} a_i)^2}{c}。$$

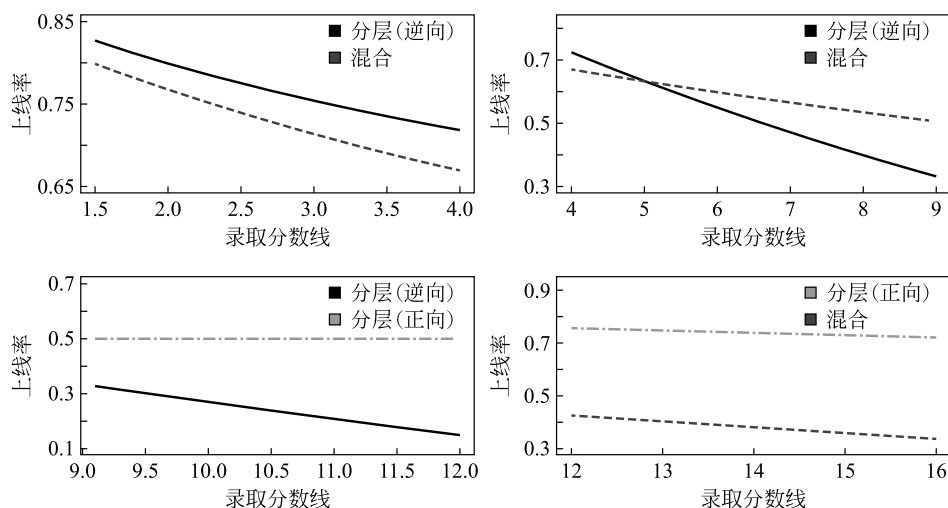


图4 数值模拟结果1

经过计算,我们可以得到如下定理。

定理4:在没有同群效应的情形下:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{k_l^2}{c}$, 逆向匹配分层教学会有更高的录取率。这

种情况下的录取率为 $1 - \frac{1}{2k_h}(cL)^{\frac{1}{2}}$;

(2) 当录取分数线满足 $L \geq \frac{k_h^2}{c}$, 正向匹配分层教学会有更高的录取率。这

种情况下录取率为 $1.5 - \frac{1}{2k_h}(cL)^{\frac{1}{2}}$;

(3) 当录取分数线满足 $\frac{k_l^2}{c} \leq L \leq \frac{\bar{k}^2}{c}$, 如果不等式

$$(*) \quad 1 + (Lc)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k_h} - \frac{1}{k_l} \right) \geq 0$$

成立, 逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则混合分班最优)。这种情况下

的录取率为 $\frac{1}{2} \left[3 - (Lc)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k_h} - (Lc)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k_l} \right]$;

(4) 当录取分数线满足 $\frac{\bar{k}^2}{c} \leq L \leq \frac{k_h^2}{c}$, 如果不等式

$$(**) \quad 2 - (Lc)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_l} \right) \geq 0$$

成立,逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则正向匹配分层教学最优)。这

种情况下的录取率为 $\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - 0.5\theta \right) - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - 1.5\theta \right) \right]$ 。

定理4的证明同定理3,在此不再赘述。当没有同群效应时,影响学生成绩的因素只有学生的学习能力与教师的教学能力。这种条件下,对于每个学生来说,如果所有课程都由教学能力高的老师教,成绩都会好过混合分班教学的情况。同理,对于每个学生来说,如果一半课程由教学能力高的老师教,成绩也会好过所有课程都由教学能力低的老师教的情况。所以在没有同群效应时,不会出现老师教学能力差异较小时,逆向匹配分层教学使得学习能力强的学生的成绩高过混合分班时成绩的情况(如图2所示)。在之前的分析中,当教师教学能力差异不大时,分层教学使得学习能力强的学生之间的正同群效应足够大,以至于他们从同群效应中的获益大于由于教师能力不足带来的损失。当没有同群效应时,这个获益就消失了,只剩下由于教师能力不足带来的损失。

所以,没有同群效应时,我们的情况与原文中教师教学能力差异足够大的情况类似(如图3所示)。影响成绩的因素只有学生的学习能力与老师的教学能力,老师的教学能力差异带来的影响相对于(不存在的)同群效应要足够大,这与图3中教师能力差异足够大的情况一样。

如果在更简单的情况下分析,即教师教学能力无差异的情况,唯一影响学生学习成绩的因素只剩下学生的学习能力,那么这个时候怎么分班上线率都不会发生变化。这种情况下所有的分班策略产生的结果都是一样的。

4 最大化总成绩的管理目标

我们现在从所有学生的学业发展角度出发,在基准模型中探讨分层教学是否能够提高学生总体成绩而不是有多少学生能够达到录取分数线。我们在最简单的情况下进行分析,即教师教学能力没有差别: $k_h = k_l = k$ 。根据之前的分析计算,混合分班教学的情形下,学生的总成绩应为:

$$\int_0^2 \frac{c(ka_i)^2}{(c - k\theta)^2} da_i = \frac{ck^2}{(c - k\theta)^2} \frac{8}{3};$$

而在分层教学的情形下,学生的总成绩应为:

$$\int_0^1 \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} da_i + \int_1^2 \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2} da_i = \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2} \frac{7}{3} + \frac{ck^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} \frac{1}{3}。$$

经过计算,我们可得以下定理。

定理5: 在教师教学水平相同的情形下,分层教学使得学生的总成绩高于

混合分班教学下的总成绩,即 $\frac{ck^2}{\left(c-\frac{3}{2}k\theta\right)^2} \frac{7}{3} + \frac{ck^2}{\left(c-\frac{1}{2}k\theta\right)^2} \frac{1}{3} > \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2} \frac{8}{3}$ 。

定理5的证明请见附录。

所以,如果从学生的整体福利考虑的话,采取分层教学要比混合分班教学的效果好,学生的总成绩更高。这是因为学习能力高的学生更能从同群效应中受益从而大幅度提高学习成绩,而学习能力较低的学生对同群效应反应较小,受益有限,对于这部分学生,分层教学和混合分班教学带来的差别并没有学习能力高的学生在两种分班模式下的差别那么大。

我们通过数值模拟来展示老师存在教学能力差异的情况下不同分班策略下学生的总成绩。我们保留了之前数值模拟运算所采用的参数值,模拟不同分班情况下的学生总成绩。我们发现采用正向匹配分层分班使得学生总成绩最高,采用混合分班使得学生总成绩处于中间,而采用逆向匹配分层分班使得学生总成绩最低。

采用正向匹配分层分班使得总成绩最高的原因是学习能力较高的学生($a_i \in [1, 2]$)从同群效应中受益较大更能较大幅度提高成绩,并且教师教学能力的提高使得每个同学预期自己成绩可以得益于此而提高,从而更加努力学习,而这种行为的变化又会通过同群效应带动身边的同学更加努力学习提高成绩。简单来说,这里的同群效应受益于老师的高水平教学放大地更加明显,从而可以大幅度提高总体成绩。而学习能力较低的学生($a_i \in [0, 1]$)从同群效应中受益有限,即使安排教学能力高的老师教学也无法使得这部分学生受益很多,所以他们的努力程度提高有限,这种情况下的总成绩最低。数值模拟运算的结果也间接证明了我们在假设老师教学水平无差异时得到的结论,使得结论没有失去一般性。

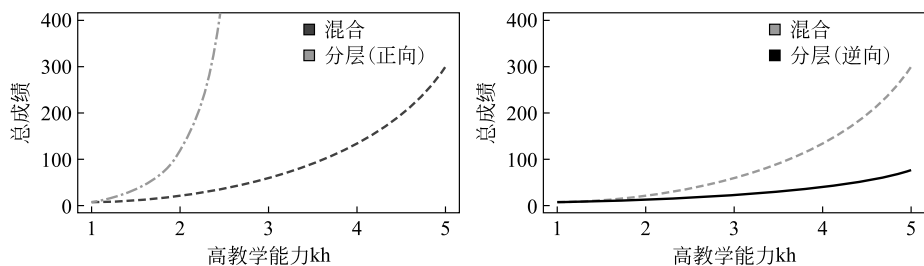


图5 数值模拟结果2

5 模型拓展分析

在论文第2和第3部分的基准分析中,我们假设同学的努力程度增加会提

高本人成绩,同时,这种正溢出效应会随着本人努力程度和能力增加而增加。这种同群效应在实证文献中被称为“单交叉”模型(Hoxby and Weingarth, 2005)。实证文献也发现了其他同群效应机制,包括“烂苹果”模型,“分层/分流”模型,“歧视性对比”模型,“杰出人物”模型等(Sacerdote, 2011)。我们基准模型的优点是可以灵活地将这些同群效应机制进行分析。同群效应的机制在理论上有很多种可能,但正如 Sacerdote (2011) 所提到的,实证上最重要的是“烂苹果”模型和“分层/分流”模型。在这一部分,我们重点考虑如何将“烂苹果”模型和“分层/分流”模型两种同群效应纳入模型,分别分析它们如何影响随机分班与分层教学的优劣,以及与基准情形中“单交叉”模型的不同。同时,我们也简要讨论如何在我们的模型中分析其他同群效应机制。

5.1 “烂苹果”模型

“烂苹果”模型(Lazear, 2001)认为一个或少数能力低的学生会对全班同学带来负面影响。能力低的学生可能通过捣乱行为直接影响其他同学学习,也可能通过降低老师讲课节奏、难度等间接影响其他同学。

我们假设能力低于 ε 的学生为“烂苹果”,学习能力为 $a_i \in [0, \varepsilon]$ 的学生 i 会给班上同学带来负的同群效应 θ_n ,而学习能力为 $a_i \in [\varepsilon, 2]$ 的学生 i 会给班上同学带来正的同群效应 θ_p 。在“单交叉”同群效应的基准模型中,没有“烂苹果”($\varepsilon=0$),只有正的同群效应($\theta=\theta_p$)。学习能力为 a_i 、努力程度为 e_i 、教师教学能力为 k 的学生 i 的效用水平如下:

$$U_i = ka_i \left(e_i + \theta_n \int_{j \leq \varepsilon} e_i e_j da_j + \theta_p \int_{j \geq \varepsilon} e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (19)$$

1) 混合分班

所有“烂苹果”平均分到两个班,每个班级教师的教学质量是一个平均水平 $\bar{k}$ 。这种情况下学生 i 的效用水平为:

$$U_i = \bar{k} a_i \left(e_i + \theta_n \frac{\int_0^\varepsilon e_i e_j da_j}{2} + \theta_p \frac{\int_\varepsilon^2 e_i e_j da_j}{2} \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (20)$$

求解每个学生努力程度的步骤与基准分析相同,不同的是我们需要计算 $[0, \varepsilon]$ 和 $[\varepsilon, 2]$ 两个区间上总的努力程度:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon e_i da_i &= \frac{2\bar{k}\varepsilon^2}{4c - \theta_n \bar{k}\varepsilon^2 - \theta_p \bar{k}(4 - \varepsilon^2)} \\ \int_\varepsilon^2 e_i da_i &= \frac{2\bar{k}(4 - \varepsilon^2)}{4c - \theta_n \bar{k}\varepsilon^2 - \theta_p \bar{k}(4 - \varepsilon^2)} \end{aligned}$$

学生 i 第二阶段的均衡努力程度是:

$$e_i = \frac{\bar{k}a_i}{c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p} \quad (21)$$

学生 i 的学习成绩为:

$$y_i = \frac{c(\bar{k}a_i)^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p\right)^2} \quad (22)$$

当 $\varepsilon=0$ 时, e_i 与 y_i 变为基准情形的数值。

2) 分层教学

(1) 分层教学-正向匹配。在正向匹配分层教学下, 学习能力 $a_i \in [1, 2]$ 的学生在 A 班, 而 A 班里没有“烂苹果”, 这些学生的努力程度与学习成绩跟基准情形下相同, 分别为:

$$e_i = \frac{k_h a_i}{c - \frac{3}{2}k_h \theta_p} \quad (23)$$

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h \theta_p\right)^2} \quad (24)$$

学习能力 $a_i \in [0, 1]$ 的学生在 B 班, 而 B 班中有 ε 数量的“烂苹果”, 这些学生会给同学带来负的同群效应。B 班学生的效用函数为:

$$U_i = k_l a_i \left(e_i + \theta_n \int_0^\varepsilon e_i e_j da_j + \theta_p \int_\varepsilon^1 e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (25)$$

与混合分班下求解类似, 我们可以得到学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_l \theta_n - \frac{1 - \varepsilon^2}{2}k_l \theta_p} \quad (26)$$

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_l \theta_n - \frac{1 - \varepsilon^2}{2}k_l \theta_p\right)^2} \quad (27)$$

(2) 分层教学-逆向匹配。逆向匹配与正向匹配的区别在于教师质量不同, 因此 A 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{3}{2}k_l \theta_p} \quad (28)$$

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l \theta_p\right)^2} \quad (29)$$

B 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_l \theta_n - \frac{1 - \varepsilon^2}{2}k_l \theta_p} \quad (30)$$

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_l \theta_n - \frac{1 - \varepsilon^2}{2}k_l \theta_p\right)^2} \quad (31)$$

我们先考虑老师教学能力没有差异或差异较小的情形 $\left(k_l > \frac{c\bar{k}}{c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p + \frac{3}{2}\bar{k}\theta_p}\right)$

且 $k_h < \frac{c\bar{k}}{c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p + \bar{k}\left(\theta_n \frac{\varepsilon^2}{2} + \theta_p \frac{1 - \varepsilon^2}{2}\right)}$, 分班模式的选择跟基准情况中定

理 1、定理 2 相似。

定理 6: 在老师的教学能力没有差异或差异较小的情形下:

(1) 当录取分数线 $L \leq \frac{c\bar{k}^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p\right)^2}$, 采用混合分班会有更高的录

取率;

(2) 当录取分数线 $L \geq \frac{c\bar{k}^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4 - \varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p\right)^2}$, 采用分层教学会有更高的录

取率, 且正向匹配弱占优于逆向匹配。

这两种情况下的录取率的计算及证明同定理 1、定理 2 相似, 不再赘述。与基准模型里定理 1、定理 2 相比, 这里分数线的阈值更低(如果假设 $\theta = \theta_p$)。“烂苹果”影响了分班线阈值, 在有“烂苹果”情形下, 学校更倾向于采用正向匹配分层教学。而且, “烂苹果”越多或负同群效应绝对值越大, 学校越倾向于采用正向匹配分层教学。

定理 7: 在老师的教学能力差异较大的情形下:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l \theta_p\right)^2}$, 逆向匹配分层教学会有更高的录

取率;

$$(2) \text{ 当录取分数线满足 } L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_h\theta_n - \frac{1-\varepsilon^2}{2}k_h\theta_p\right)^2}, \text{ 正向匹配分层教学方法}$$

会有更高的录取率;

$$(3) \text{ 当录取分数线满足 } \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta_p\right)^2} \leq L \leq \frac{c\bar{k}^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4-\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p\right)^2}, \text{ 如果不}$$

等式

$$(*) \quad 1 + \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} c \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_h}\right) \geq -1.5\theta_p \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

成立, 则逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则混合分班最优);

$$(4) \text{ 当录取分数线满足 } \frac{c\bar{k}^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_n - \frac{4-\varepsilon^2}{4}\bar{k}\theta_p\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{2}k_h\theta_n - \frac{1-\varepsilon^2}{2}k_h\theta_p\right)^2},$$

如果不等式

$$(**) \quad 2 - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \theta_n \frac{\varepsilon^2}{2} - \theta_p \frac{1-\varepsilon^2}{2}\right) - \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - 1.5\theta_p\right) \geq 0$$

成立, 则逆向匹配分层教学会有更高的录取率(否则正向匹配分层教学最优)。

这几种情况下的录取率的计算及证明同定理3, 不再赘述。与基准模型里定理3相比, 这里采用正向匹配分层教学的分数线阈值更低(如果假设 $\theta = \theta_p$), 而且, “烂苹果”越多或负同群效应绝对值越大, 学校越倾向于采用正向匹配分层教学。

我们也可以分析当学校管理者目标是最大化总成绩的情况。我们分析最简单的情况, 即教师教学能力没有差别: $k_h = k_l = k$ 。根据之前的分析计算, 混合

分班教学的情形下, 学生的总成绩应为 $\frac{ck^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{4}k\theta_n - \frac{4-\varepsilon^2}{4}k\theta_p\right)^2} \frac{8}{3}$, 而在分层教学

的情形下, 学生的总成绩应为 $\frac{ck^2}{\left(c - \frac{\varepsilon^2}{2}k\theta_n - \frac{1-\varepsilon^2}{2}k\theta_p\right)^2} \frac{1}{3} + \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta_p\right)^2} \frac{7}{3}$ 。通过比较

可以得知, 分层教学下的学生总成绩更高。而且, “烂苹果”越多或负同群效应绝对值越大, 分层教学优势更大。这也比较容易理解, 与混合分班比, 分层教学把所有“烂苹果”安排在B班, 使得低能力的学生成绩降低, 高能力的学生成绩提高, 但前者降低程度低于后者提高程度, 通过分层教学可以把“烂苹果”的负

同群效应局限在低能力学生范围内,从而提高总成绩。

5.2 “分层/分流”模型

“分层/分流”模型认为当一个学生周围的同学跟他能力相近时他的表现会更好,可能因为在同一水平的同学更容易相互学习和帮助,也可能因为老师更容易针对相同能力的学生进行因材施教。

我们假设混合分班下同群效应为 θ_m ,而分层教学下无论 A 班还是 B 班,同群效应为 θ_t 。因为混合分班下班上同学能力差异较大,而分层教学下班上同学能力差异较小,根据“分层/分流”模型, $\theta_t > \theta_m$ 。

1) 混合分班

这种情况下学生 i 的效用水平为:

$$U_i = \bar{k}a_i \left(e_i + \theta_m \frac{\int_0^2 e_i e_j da_j}{2} \right) - \frac{1}{2} c e_i^2 \quad (32)$$

学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{\bar{k}a_i}{c - \bar{k}\theta_m} \quad (33)$$

$$y_i = \frac{c(\bar{k}a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta_m)^2} \quad (34)$$

2) 分层教学

(1) 分层教学-正向匹配。A 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_h a_i}{c - \frac{3}{2} k_h \theta_t} \quad (35)$$

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_h \theta_t \right)^2} \quad (36)$$

B 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{1}{2} k_l \theta_t} \quad (37)$$

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_l \theta_t \right)^2} \quad (38)$$

(2) 分层教学-逆向匹配。A 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_l a_i}{c - \frac{3}{2} k_l \theta_l} \quad (39)$$

$$y_i = \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_l \theta_l\right)^2} \quad (40)$$

B 班学生的努力程度与学习成绩分别为:

$$e_i = \frac{k_h a_i}{c - \frac{1}{2} k_h \theta_l} \quad (41)$$

$$y_i = \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_h \theta_l\right)^2} \quad (42)$$

同基准模型比,分层教学情况下,无论正向还是逆向匹配,A 班和 B 班成绩都有所提高,这是因为分层教学有更高的同群效应(如果假设 $\theta = \theta_m$)。不同分班模式的优劣仍然可以用基准模型里的方法进行比较。这里我们考虑一种比较有趣的情形:如果教师教学能力没有差异,或差异相对于 θ_l 与 θ_m 的差异较小,我们有

$$\frac{c(\bar{k} a_i)^2}{(c - \bar{k} \theta_m)^2} < \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_l \theta_l\right)^2} < \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_h \theta_l\right)^2}$$

这种情况下,正向匹配或逆向匹配分层教学录取率都比混合分班录取率更高。正向匹配还是逆向匹配更优的条件见如下定理。

定理 8:

(1) 当录取分数线满足 $L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_h \theta_l\right)^2}$, 逆向匹配分层教学会有更高的录取率;

(2) 当录取分数线满足 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2} k_h \theta_l\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_l \theta_l\right)^2}$, 正向匹配与逆向匹配无差异;

(3) 当录取分数线满足 $L \geq \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2} k_l \theta_l\right)^2}$, 正向匹配分层教学会有更高的录取率;

取率。

同样地,我们也可以分析当学校管理者目标是最大化总成绩的情况。我们还是分析最简单的情况,即教师教学能力没有差别: $k_h=k_l=k$ 。根据之前的分析计算,混合分班教学的情形下,学生的总成绩应为 $\frac{ck^2}{(c-k\theta_m)^2} \frac{8}{3}$,而在分层教学

情形下,学生的总成绩应为 $\frac{ck^2}{\left(c-\frac{1}{2}k\theta_l\right)^2} \frac{1}{3} + \frac{ck^2}{\left(c-\frac{3}{2}k\theta_l\right)^2} \frac{7}{3}$ 。通过比较可得,分层

教学下总成绩比混合分班下总成绩高。在基准模型中,混合分班与分层教学有相同的同群效应 θ ,但分层教学使得总成绩更高;而在“分层/分流”模型中,分层教学比混合分班有更大的同群效应($\theta_l > \theta_m$),所以分层教学总成绩会更高。

5.3 其他同群效应模型

同群效应机制在理论上还有其他可能的模型(Sacerdote, 2011),但由于实证证据非常少,而且实证结果没有一致的结论,我们不再展开详细的分析。我们仅简要展示如何在我们的模型里分析这些理论上可能的同群效应机制。

“杰出人物”模型认为一个或少数特别优秀的学生可以给全班同学带来正面影响。这一模型跟“烂苹果”模型是对称的,我们可以假定能力在 $[2-\varepsilon, 2]$ 范围内学生带来更大的正同群效应,学习能力为 a_i 、努力程度为 e_i 、教师教学能力为 k 的学生 i 的效用水平如下:

$$U_i = ka_i \left(e_i + \theta_1 \int_{j \leq 2-\varepsilon} e_i e_j da_j + \theta_2 \int_{j \geq 2-\varepsilon} e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} ce_i^2 \quad (43)$$

其中 $\theta_2 > \theta_1$ 。

“歧视性对比”模型(Byrne, 1996)认为学生会跟其他同学进行比较,如果周围都是比他能力高的,他会有竞争压力、自信心下降,导致对他成绩有负面影响。我们可以假设当学生能力为 a_i 时,能力高于 a_i 的同学给他的同群效应 θ_n 为负值,能力低于 a_i 的同学给他的同群效应 θ_p 为正值。学习能力为 a_i 、努力程度为 e_i 、教师教学能力为 k 的学生 i 的效用水平如下:

$$U_i = ka_i \left(e_i + \theta_p \int_{j \leq a_i} e_i e_j da_j + \theta_n \int_{j \geq a_i} e_i e_j da_j \right) - \frac{1}{2} ce_i^2 \quad (44)$$

6 讨论:兼顾效率与公平

本文基于同群效应的视角构建了理论模型分析不同教学目标下混合分班

与分层教学的优劣。在本文的分析中,教学目标无论是升学率还是总成绩,都是从效率角度考察混合分班与分层教学,但无论是政府还是家长,都希望实现真正的教育公平。当我们讨论教育公平时,指的是教育机会的公平,也即平等地享有相同教育质量的机会。但是由于不同个体的禀赋是有差异的,教育结果很难实现平等。

本文的理论模型分析对于如何兼顾效率与公平有很丰富的政策含义。混合分班是一种比较公平的教育模式,而根据我们之前的分析,混合分班并不总是无效率的。如果学校管理者目标为最大化学生升学率,混合分班可以比分层教学更有效率,也即有更高的升学率。通过基准模型与拓展模型的分析,我们可以知道,混合分班是否更有效率要取决于老师教学能力差异的大小以及学生生源质量。给定生源质量,当老师教学能力差异较大时,混合分班很难比分层教学更有效率。而当老师教学能力没有差异或者差异较小时,如果学校生源质量较好,混合分班会比分层教学更有效率,效率与公平可以得到兼顾。

因此,学校管理者将学生升学率最大化本身并不违背教育公平,在这一目标下,政府教育部门可以通过合理的措施来实现教育公平与效率的兼顾:第一,政府应该将生源均匀地分配给各个学校,而不是人为地将学校划分为三六九等,因为如果一个学校有较差的生源,学校的管理者更有动机去通过分层教学来提高升学率;第二,政府要加大教师培训投入,提升所有老师的教学水平缩小老师教学能力的差异。

附录

定理 1 的证明: (1) 采用分层教学时,B 班,也即学生学习能力低($a_i \in [0, 1]$)的班级,里面成绩最好的学生的成绩是 $y_i(a_i=1) = \frac{ck^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2}$; A 班,也即学生学习能力高($a_i \in [1, 2]$)的班级,里面成绩最差的学生成绩是 $y_i(a_i=1) = \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2}$ 。而采用混合分班时,学习能力为 $a_i=1$ 的学生成绩是 $\frac{ck^2}{(c-k\theta)^2}$ 。我们可以得到:

$$\frac{ck^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} < \frac{ck^2}{(c - k\theta)^2} < \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2}$$

所以当学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 时, $\frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} \leq \frac{c(ka_i)^2}{(c-k\theta)^2}$; 当学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 时,

$$\frac{c(ka_i)^2}{(c-k\theta)^2} < \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2}.$$

由此可得,当录取分数线 $L \leq \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2}$ 时,不管是混合分班还是分层教学,学生能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生全部能够上线,所以最后录取率多少取决于学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生中有多少人上线。由于混合分班下学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生成绩要好于分层教学下的成绩,很明显,混合分班是最优的。相应的录取率是成绩高于这个分数线的学生比例。恰好达到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \theta\right)$ 的学生,所以高于这个分数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \theta\right)$ 。

(2) 当录取分数线 $L \geq \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2}$ 时,只有学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的部分学生成绩能够上线。由于这种情况下分层教学下学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生成绩要好于混合分班下的成绩,很明显,分层教学是最优的。相应的录取率是成绩高于这个分数线的学生比例。恰好达到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \frac{3\theta}{2}\right)$ 的学生,所以高于这个分数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \frac{3\theta}{2}\right)$ 。

定理2的证明: (1) 采用分层教学时, B 班, 也即学生学习能力低 ($a_i \in [0, 1]$) 的班级, 正向匹配下成绩最好的学生的成绩是 $y_i(a_i=1) = \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_l\theta\right)^2}$, 逆向

匹配下成绩最好的学生的成绩是 $y_i(a_i=1) = \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$; A 班, 也即学生学习能力高 ($a_i \in [1, 2]$) 的班级, 正向匹配下成绩最差的学生成绩是 $y_i(a_i=1) =$

$\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$, 逆向匹配下成绩最差的学生成绩是 $y_i(a_i=1) = \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$ 。而采

用混合分班时,学习能力为 $a_i = 1$ 的学生成绩是 $\frac{c\bar{k}^2}{(c-\bar{k}\theta)^2}$ 。如果教师教学能力差异较小,我们可以得到:

$$\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} < \frac{c\bar{k}^2}{(c - \bar{k}\theta)^2} < \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$$

所以当学生学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 时, $\frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_l\theta\right)^2} \leq \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2} \leq \frac{c(\bar{k} a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta)^2}$; 当学生

学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 时, $\frac{c(\bar{k} a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta)^2} < \frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} < \frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$ 。

由此可得,当录取分数线 $L \leq \frac{c\bar{k}^2}{(c - \bar{k}\theta)^2}$ 时,不管是混合分班还是分层教学(正向匹配或逆向匹配),学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生全部能够上线,所以最后录取率多少取决于学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生中有多少人上线。由于混合分班下学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生成绩要好于任何择优分班下的成绩,很明显,混合分班是最优的。相应的录取率是成绩高于这个分数线的学生比例。恰好达到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\bar{k}} - \theta\right)$ 的学生,所以高于这个分数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\bar{k}} - \theta\right)$,这也是录取率。

(2) 当录取分数线满足 $\frac{c\bar{k}^2}{(c - \bar{k}\theta)^2} \leq L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$ 时,不管是混合分班还是

分层教学(正向匹配或逆向匹配),所有学习能力为 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生成绩都达不到录取线;而所有学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生在分层教学(正向匹配或逆向匹配)下的成绩要好于混合分班下的成绩,而且都达到录取分数线。采用正向匹配分层分班和逆向匹配分层分班有相同的录取率,且都比混合分班有更高的录取率,这种情况下的录取率为 $\frac{1}{2}$ 。

(3) 当录取分数线满足 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$ 时,不管是混合分班还是

分层教学(正向匹配或逆向匹配),所有学习能力为 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生成绩都达

不到录取线;而所有学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生在正向匹配分层教学下的成绩要优于逆向匹配或混合分班下的成绩,而且所有学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生在正向匹配分层教学下都会达到录取线。所以采用正向匹配分层分班会有更高的录取率,这种情况下的录取率为 $\frac{1}{2}$ 。

(4) 当录取分数线满足 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2} \leq L$, 只有学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的部分学

生成成绩能够上线。由于这种情况下正向匹配分层教学下学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生成绩要好于逆向匹配分层教学或混合分班下的成绩,很明显,正向匹配分层教学是最优的。相应的录取率是成绩高于这个分数线的学生比例。恰好达到

到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{3\theta}{2}\right)$ 的学生,所以高于这个分

数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{3\theta}{2}\right)$, 这也是录取率。

定理3的证明: (1) 教师教学水平差异比较大的情况下,逆向匹配分层教学会使得学习能力低(高)的学生取得的成绩高(低)于混合分班时他们所取得

的成绩。这是因为当 $\frac{c(k_h a_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} > \frac{c(\bar{k} a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta)^2}$ 和 $\frac{c(k_l a_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} < \frac{c(\bar{k} a_i)^2}{(c - \bar{k}\theta)^2}$ 时,我们都可

以得到以下不等式:

$$\frac{(k_h - k_l)}{(k_h + k_l) k_l} > \frac{\theta}{2c}$$

我们之前已经证明学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生在正向匹配分层教学下的成绩低于混合分班情况下的成绩,而学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生成绩高于混合分班情况下的成绩。

当录取分数线 $L \leq \frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2}$ 时,不管是混合分班还是分层教学,学生能力

$1 \leq a_i \leq 2$ 的学生全部能够上线,所以最后录取率多少取决于学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生中有多少人上线。由于逆向匹配分层教学会使得学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生上线最多,选择这种分班方式是最优的。相应的录取率是成绩高于这个分数线

的学生比例。恰好达到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2}\theta\right)$ 的

学生,所以高于这个分数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right)$ 。

(2) 当录取分数线 $L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2}$ 时,学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生成绩都不能

上线。这种情况下正向匹配分层教学会使学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生成绩要好于混合分班下的成绩,很明显,正向匹配这种分层教学方法是最优的。相应的录取

率是成绩高于这个分数线的学生比例。如果录取分数线 $L \geq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$, 则恰好

达到这个分数线的学生是学习能力为 $a_i = \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{3}{2} \theta \right)$ 的学生,高于这个分

数线的学生比例为 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{3}{2} \theta \right)$; 如果录取分数线 $\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} \leq L \leq$

$\frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_h\theta\right)^2}$, 则超过这个分数线的学生比例为 $\frac{1}{2}$ 。

(3) 当录取分数线 $\frac{ck_l^2}{\left(c - \frac{3}{2}k_l\theta\right)^2} \leq L \leq \frac{ck^2}{(c - k\theta)^2}$ 时,不管是混合分班还是正向

匹配分层教学方式,学生能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生全部能够上线,但是对于学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生,混合分班会使得更多人上线。所以我们只需要比较逆向分层教学还是混合分班。

我们分别计算这两种分班方式下的录取率然后进行比较。逆向匹配分层教学制度下,学习能力低的班级里学习能力 $\left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right) \leq a_i \leq 1$ 的学生能够上线,而学习能力高的班级里的学生 $\left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2} \theta \right) \leq a_i \leq 2$ 的学生能够上线。所以总上线率是:

$$\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right) - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2} \theta \right) \right]$$

而混合分班制度下的上线率是:

$$\frac{1}{2} \left[2 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k} - \theta \right) \right]$$

通过比较两式,我们发现当:

$$\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right) - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2} \theta \right) \right] \geq \frac{1}{2} \left[2 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\bar{k}} - \theta \right) \right],$$

逆向匹配分层教学制度下上线率最高。这个不等式也等同于:

$$1 + \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} c \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k_h} - \frac{1}{k_l} \right) \geq -\theta \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4) \text{ 当录取分数线 } \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2} \leq L \leq \frac{ck_h^2}{\left(c - \frac{1}{2}k_h\theta\right)^2} \text{ 时, 正向匹配分层教学方式下,}$$

学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生全部能够上线,但是混合分班会使得部分学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生无法上线。所以我们只需要比较不同的分层教学方式,是正向匹配还是逆向匹配。

正向匹配分层教学制度下,学习能力 $1 \leq a_i \leq 2$ 的学生都能够上线,而学习能力 $0 \leq a_i \leq 1$ 的学生都不能上线。所以这种情况下的上线率是 $\frac{1}{2}$ 。

逆向匹配分层教学制度下,学生上线率是:

$$\frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right) - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2} \theta \right) \right]$$

通过比较,我们发现当:

$$2 - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_h} - \frac{1}{2} \theta \right) - \left(\frac{L}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{k_l} - \frac{3}{2} \theta \right) \geq 0$$

逆向匹配分层教学制度下上线率最高。

定理5的证明: 在混合分班教学的情形下,学生的总成绩应为:

$$\int_0^2 \frac{c(ka_i)^2}{(c-k\theta)^2} da_i = \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2} \frac{8}{3}$$

而在分层教学的情形下,学生的总成绩应为:

$$\int_0^1 \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} da_i + \int_1^2 \frac{c(ka_i)^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2} da_i = \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2} \frac{7}{3} + \frac{ck^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} \frac{1}{3}$$

$$\text{如果 } \frac{ck^2}{(c-k\theta)^2} \frac{8}{3} > \frac{ck^2}{\left(c - \frac{3}{2}k\theta\right)^2} \frac{7}{3} + \frac{ck^2}{\left(c - \frac{1}{2}k\theta\right)^2} \frac{1}{3}, \text{ 我们则有 } \frac{2}{(c-k\theta)^2} > \frac{7}{(2c-3k\theta)^2} +$$

$\frac{1}{(2c-k\theta)^2}$, 经过简化,我们可得以下不等式:

$$k^3\theta^3 > 12c(k\theta - c)^2$$

它等同于:

$$1 > 12 \frac{c}{k\theta} \left(1 - \frac{c}{k\theta}\right)^2$$

由于 $2c-3k\theta>0$, 我们可得 $\frac{c}{k\theta}>\frac{3}{2}$ 。我们可以推导 $\frac{c}{k\theta}\left(1-\frac{c}{k\theta}\right)^2>\frac{3}{8}$, 所以不等式不成立。

参考文献

- 陈昊, 郑捷, 钟笑寒. 2015. 基于竞赛模型的分层教学激励机制研究[J]. 经济学报, 2(4): 36-61.
- Chen H, Zheng J, Zhong X H. 2015. Incentive mechanism of ability-based grouping: An economic analysis based on contest game [J]. *China Journal of Economics*, 2(4): 36-61. (in Chinese)
- 崔静, 冯玲. 2017. 同群效应研究述评与未来展望[J]. 商业经济研究, (10): 101-103.
- Cui J, Feng L. 2017. Peer effects: Survey and future prospect [J]. *Journal of Commercial Economics*, (10): 101-103. (in Chinese)
- 杜育红, 袁玉芝. 2016. 教育中的同伴效应研究述评: 概念、模型与方法[J]. 教育经济评论, 1(3): 77-91.
- Du Y H, Yuan Y Z. 2016. The review of the research on peer effect in education: Concept, model and method [J]. *China Economics of Education Review*, 1(3): 77-91. (in Chinese)
- 王春超, 钟锦鹏. 2018. 同群效应与非认知能力——基于儿童的随机实地试验研究[J]. 经济研究, 53(12): 177-192.
- Wang C C, Zhong J P. 2018. Peer effects and non-cognitive skills: A randomized field experiment based on children [J]. *Economic Research Journal*, 53(12): 177-192. (in Chinese)
- 王春超, 肖艾平. 2019. 班级内社会网络与学习成绩——一个随机排座的实验研究[J]. 经济学(季刊), 18(3): 1123-1152.
- Wang C C, Xiao A P. 2019. Social networking and academic performance within classroom—An experimental study of random seating [J]. *China Economic Quarterly*, 18(3): 1123-1152. (in Chinese)
- 王骏, 彭顺绪, 原莹. 2017. 重点高中、学校投入与学生学业成绩——基于J市普通高中的—个经验研究[J]. 世界经济文汇, (3): 17-45.
- Wang J, Peng S X, Yuan Y. 2017. Key high schools, school input and students'

- academic performance—An empirical analysis based on high schools in J city[J]. *World Economic Papers*, (3): 17-45. (in Chinese)
- 许双成, 张立昌. 2015. 教育公平之殇——分层分班教学[J]. 西北民族大学学报(哲学社会科学版), (4): 184-188.
- Xu S C, Zhang L C. 2015. The destruction of education equality—On ability-based grouping[J]. *Journal of Northwest University for Nationalities (Philosophy and Social Science)*, (4): 184-188. (in Chinese)
- 叶星, 熊伟. 2017. 国内外同群效应研究综述[J]. 江苏高教, (4): 83-88.
- Ye X, Xiong W. 2017. A survey on peer effects research in China and abroad[J]. *Jiangsu Higher Education*, (4): 83-88. (in Chinese)
- 袁玉芝. 2016. 教育中的同伴效应分析——基于上海2012年PISA数据[J]. 上海教育科研, (3): 30-34, 25.
- Yuan Y Z. 2016. Peer effects in education—An analysis based on 2012 PISA data in Shanghai[J]. *Shanghai Research on Education*, (3): 30-34, 25. (in Chinese)
- 詹宏毅, 陈超群. 2017. 初中生同伴行为与个体认知能力的结构方程分析[J]. 中国人民大学教育学报, (4): 166-177.
- Zhan H Y, Chen C Q. 2017. The SEM analysis between middle school students' peer behaviors and individual cognitive ability[J]. *Renmin University of China Education Journal*, (4): 166-177. (in Chinese)
- 张学敏, 谭俊英. 2012. 同群投入对初中生学习成绩的影响研究[J]. 教育与经济, (4): 21-25.
- Zhang X M, Tan J Y. 2012. Influence of peer inputs on middle school students' achievement[J]. *Education & Economy*, (4): 21-25. (in Chinese)
- 赵颖. 2019. 同群效应如何影响学生的认知能力[J]. 财贸经济, 40(8): 33-49.
- Zhao Y. 2019. How peer effects affect students' cognitive abilities[J]. *Finance & Trade Economics*, 40(8): 33-49. (in Chinese)
- 郑磊. 2015. 教育中的社区效应和同伴效应: 方法、证据及政策启示[J]. 教育学报, 11(5): 99-110.
- Zheng L. 2015. Neighborhood effects and peer effects in education: Methods, evidences, and policy implications[J]. *Journal of Educational Studies*, 11(5): 99-110. (in Chinese)
- 佐藤学. 2010. “分层教学”有效吗? [J]. 钟启泉, 译. 全球教育展望, 39(5): 3-7.
- Sato M. 2010. Is 'ability grouping' effective? [J]. Zhong Q Q, trans. *Global Education*, 39(5): 3-7. (in Chinese)
- Ammermueller A, Pischke J S. 2009. Peer effects in European primary schools: Evidence from the progress in international reading literacy study[J]. *Journal of*

- Labor Economics*, 27(3): 315-348.
- Arnott R, Rowse J. 1987. Peer group effects and educational attainment[J]. *Journal of Public Economics*, 32(3): 287-305.
- Ballester C, Calvó-Armengol A, Zenou Y. 2006. Who's who in networks. Wanted: The key player[J]. *Econometrica*, 74(5): 1403-1417.
- Ballester C, Zenou Y, Calvó-Armengol A. 2010. Delinquent networks[J]. *Journal of the European Economic Association*, 8(1): 34-61.
- Benabou R. 1993. Workings of a city: Location, education, and production[J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(3): 619-652.
- Betts J R, Shkolnik J L. 2000. The effects of ability grouping on student achievement and resource allocation in secondary schools[J]. *Economics of Education Review*, 19(1): 1-15.
- Boozer M A, Cacciola S E. 2001. Inside the 'Black Box' of Project STAR: Estimation of peer effects using experimental data, Discussion Papers. 840 [R]. Yale University.
- Burke M A, Sass T R. 2013. Classroom peer effects and student achievement [J]. *Journal of Labor Economics*, 31(1): 51-82.
- Byrne B M. 1996. Academic self-concept: Its structure, measurement, and relation to academic achievement[M]//Bracken B A. Handbook of Self-concept: Development, Social, Clinical Considerations. New York: John Wiley and Sons, 287-316.
- Calvó-Armengol A, Zenou Y. 2004. Social networks and crime decisions: The role of social structure in facilitating delinquent behavior [J]. *International Economic Review*, 45(3): 939-958.
- Calvó-Armengol A, Patacchini E, Zenou Y. 2009. Peer effects and social networks in education[J]. *The Review of Economic Studies*, 76(4): 1239-1267.
- Carrell S E, Sacerdote B I, West J E. 2013. From natural variation to optimal policy? The importance of endogenous peer group formation [J]. *Econometrica*, 81(3): 855-882.
- Cooley J. 2010. Desegregation and the achievement gap: Do diverse peers help? WCER Working Paper No. 2010-3[R]. Madison: University of Wisconsin-Madison.
- Duflo E, Dupas P, Kremer M. 2011. Peer effects, teacher incentives, and the impact of tracking: Evidence from a randomized evaluation in Kenya[J]. *American Economic Review*, 101(5): 1739-1774.
- Elsner B, Isphording I E. 2017. A big fish in a small pond: Ability rank and human capital investment[J]. *Journal of Labor Economics*, 35(3): 787-828.
- Elsner B, Isphording I E, Zölitz U. 2021. Achievement rank affects performance and major choices in college, CEPR Discussion Paper No. DP16066[R].

- Epple D, Romano R E. 2011. *Peer effects in education: A survey of the theory and evidence* [M]//Benhabib J, Bisin A, Jackson M O. *Handbook of Social Economics* 1A, 1B. Amsterdam: Elsevier, 1053-1163.
- Figlio D N, Page M E. 2002. School choice and the distributional effects of ability tracking: Does separation increase inequality? [J]. *Journal of Urban Economics*, 51(3): 497-514.
- Gamoran A. 1987. The stratification of high school learning opportunities [J]. *Sociology of Education*, 60(3): 135-155.
- Hanushek E A, Kain J F, Markman J M, et al. 2003. Does peer ability affect student achievement? [J] *Journal of Applied Econometrics*, 18(5): 527-544.
- Hanushek E A, Wößmann L. 2006. Does educational tracking affect performance and inequality? Differences-in-differences evidence across countries [J]. *The Economic Journal*, 116(510): C63-C76.
- Hoxby C M. 2000. The effects of class size on student achievement: New evidence from population variation [J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(4): 1239-1285.
- Hoxby C M, Weingarth G. 2005. Taking race out of the equation: School reassignment and the structure of peer effects [R]. Cambridge: Department of Economics, Harvard University.
- Huang B, Zhu R. 2020. Peer effects of low-ability students in the classroom: Evidence from China's middle schools [J]. *Journal of Population Economics*, 33(4): 1343-1380.
- Lavy V, Paserman M D, Schlosser A. 2012. Inside the black box of ability peer effects: Evidence from variation in the proportion of low achievers in the classroom [J]. *The Economic Journal*, 122(559): 208-237.
- Lazear E P. 2001. Educational production [J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 116(3): 777-803.
- Lu F W, Anderson M L. 2015. Peer effects in microenvironments: The benefits of homogeneous classroom groups [J]. *Journal of Labor Economics*, 33(1): 91-122.
- McEwan P J. 2003. Peer effects on student achievement: Evidence from Chile [J]. *Economics of Education Review*, 22(2): 131-141.
- McMillan R. 2005. Erratum to "Competition, incentives, and public school productivity [J]. *Journal of Public Economics*, 89(5/6): 1133-1154.
- Murphy R, Weinhardt F. 2020. Top of the class: The importance of ordinal rank [J]. *The Review of Economic Studies*, 87(6): 2777-2826.
- Sacerdote B. 2011. *Peer effects in education: How might they work, how big are they and how much do we know thus far?* [M]//Hanushek E A, Machin S J, Woessmann L. *Handbook of the Economics of Education*. Amsterdam: Elsevier, 249-277.

- Vandenberge V. 2006. Achievement effectiveness and equity: The role of tracking, grade repetition and inter-school segregation[J]. *Applied Economics Letters*, 13(11): 685-693.
- Wennberg K, Norgren A. 2021. Models of peer effects in education, Working Papers 21/3[R]. Stockholm School of Economics.

Mixing or Ability-based Grouping

—A Theoretical Analysis from the Perspective of Peer Effects

Rui Zhang Xinxi Song

(*International School of Economics and Management, Capital University of Economics and Business*)

Abstract It has always been a concern for and extensively discussed by education policymakers, school administrators and parents on how to achieve the optimal education. In this paper, we construct a model to compare the performance of mixing with that of ability-based grouping under different objectives of the school administrators. The model is tractable, and flexible enough to incorporate the key variables that affect students' performance, including the teachers' quality, students' ability, students' effort and empirically tested peer effects. Different peer effect mechanisms, including single crossing models, bad apple model, and boutique/tracking model can be incorporated into the model and be analyzed. This model makes a novel contribution to the education economics literature by providing a theoretical framework to understand the effectiveness of the most commonly used education methods, to rationalize the various findings in the empirical studies, and to further help school administrators make the best choice.

JEL Classification C72, D85, I21