

用菲涅尔透镜思想减薄凹锥透镜实现环形彩虹

丁锐锋¹ 刘新军¹ 肖志博¹ 李 乐¹ 刘宇浩² 王 瑜¹ 陈奕霖³ 张亦文²

(¹ 天津大学理学院物理系, 天津 300354; ² 天津大学材料科学与工程学院, 天津 300354;

³ 天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072)

摘 要 在光学领域,传统凹锥透镜在制造环形彩虹时存在重量较大的局限。本研究基于菲涅尔透镜设计理念,力求突破这一困境。在研究过程中,我们创新性地将几何光学方法与 Python 编程计算相结合,精准调控齿状结构的位置与角度,成功将凹锥透镜优化为轻薄的齿状透镜,实现了内红外紫且色彩增强的环形彩虹效果。在设计环节,详细阐述了从凹锥透镜到齿状透镜的初步构思。针对初步设计中齿状透镜彩虹效果欠佳的问题,提出多齿齿边出射紫光再会聚的优化方法,深入剖析相邻齿的光路关系,并给出齿状透镜的具体构造流程。为科学评估彩虹效果,通过精确计算红光出射角,确定其在投影屏上的投影范围,并创新性地定义了红光位置的最大颜色数和彩虹环内红色边缘所占比例两个量化参数。借助 TracePro 光线模拟软件验证,在相同投影距离下,齿状透镜相较于传统凹锥透镜,呈现出更为显著的彩虹投影效果。此外,本研究还进一步探究了不同投影屏位置、焦距、齿数以及中心角对彩虹效果的影响,为该领域的后续研究与实际应用提供了全面且有价值的参考依据。

关键词 凹锥透镜;菲涅尔透镜;环形彩虹;光的色散;几何光学;计算机模拟

GENERATING CIRCULAR RAINBOWS THROUGH THINNING CONCAVE CONICAL LENS WITH THE PRINCIPLE OF FRESNEL LENS

DING Ruifeng¹ LIU Xinjun¹ XIAO Zhibo¹ LI Le¹ LIU Yuhao² WANG Yu¹
CHEN Yilin³ ZHANG Yiwen²

(¹ Department of Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300354;

² School of Materials Science and Engineering, Tianjin University, Tianjin 300354;

³ School of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract In optics, traditional concave cone lenses used in circular rainbow generation are limited by their significant weight. This study, inspired by the Fresnel lens concept, aims to overcome this limitation. By integrating geometrical optics with Python programming, we accurately controlled the position and angle of serrated structures, transforming the concave cone lens into a lightweight, serrated lens. This innovation achieves a circular rainbow with an inner red and outer purple color arrangement, along with enhanced color vividness. Our design process began with the initial concept of converting a concave cone lens into a serrated

收稿日期: 2024-11-02

基金项目: 2023 年天津大学理学院本科教学研究项目;2023 年大学生创新创业训练计划项目。

通信作者: 刘新军, xinjun.liu@tju.edu.cn。

引文格式: 丁锐锋,刘新军,肖志博,等. 用菲涅尔透镜思想减薄凹锥透镜实现环形彩虹[J]. 物理与工程,2025,35(4):323-331.

Cite this article: DING R F, LIU X J, XIAO Z B, et al. Generating circular rainbows through thinning concave conical lens with the principle of fresnel lens[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 323-331. (in Chinese)

lens. To address the suboptimal rainbow effect in the initial design, we proposed an optimization method where multiple serrated edges emit violet light that converges again. We thoroughly analyzed the optical path relationships between adjacent serrations and detailed the manufacturing steps of the serrated lens. To scientifically evaluate the rainbow effect, the projection range of red light on the projection screen was determined by accurately calculating the exit angle of red light. Additionally, two quantitative parameters were innovatively defined: the maximum number of colors at the position of red light and the proportion of the red edge within the rainbow ring. Using TracePro optical simulation software, we validated that, under the same projection distance, the serrated lens produces a more pronounced rainbow projection than conventional concave cone lenses. Our study also explored the effects of different projection screen positions, focal lengths, number of serrations, and central angles on the rainbow effect, offering valuable references for future research and practical applications.

Key words concave conical lens; Fresnel lens; circular rainbow; dispersion of light; geometrical optics; computer simulation

在光学领域,利用凹锥透镜制造环形彩虹的研究一直备受关注。前期相关研究文献^[1]针对阳光垂直入射凹锥透镜的光路展开深入分析,成功总结出在进光宽度不受限制时,紫光沿出射边会聚的方法,并基于此获得一系列优化的凹锥透镜。从光学原理层面而言,不同色光叠加会产生白色,所以在追求最佳彩虹效果时,关键在于最大程度减少投射屏彩色圈上各位置的颜色数量。阳光在入射边同一位置便已涵盖所有颜色,经过两次折射后,在出射边会展开形成一个区间,到达投影屏时该区间进一步扩大,且入射边上每个位置的光线在投影屏上都对应一个区间,这些区间错位叠加,最终形成彩虹。基于此原理,通过汇聚沿出射边出射的紫光,可在其他颜色依次展开时增大同色光重叠范围,有效减少白色合成。

经计算发现,当凹锥透镜顶角为 60° ,入射边长为 5cm ,且该边与阳光入射方向夹角为 59.75° 时,在距离凹锥透镜 1.0m 远的投影屏上,能够观察到外圈半径 1.75m 、径向红紫光宽度 0.58m 的环形彩虹,此时红光和紫光的出射角分别为 79.23° 和 90° 。并且,当凹锥透镜顶角减小时,投影屏上环形彩虹的外圈半径和径向宽度会减小,而亮度则会相应增加。

然而,传统用于制造凹锥透镜的光学玻璃 BK7^[2]密度为 2.51g/cm^3 ,经计算,顶角 60° 、入射边长 5cm 的凹锥透镜重量可达 0.69kg 。考虑到光的折射-反射过程仅发生在凹锥透镜的两个光学表面,这就引发思考:能否在拿掉尽可能多光学

材料的同时,保留表面特征以实现环形彩虹的再现?答案是肯定的,但这需要对其微结构进行精细设计,确保光线在投影屏上会聚的同时,还能维持良好的色散功能。

为解决上述问题,本文借鉴菲涅尔透镜的思想,将凹锥透镜减薄成齿状透镜。通过旋转并调整每个相邻齿的位置和角度,运用几何光学方法结合 Python 编程计算,设计出一系列可产生环形彩虹的齿状透镜。同时,使用 TracePro 光线模拟软件对这些齿状透镜进行验证,结果表明,相比凹锥透镜,在相同投影屏距离上,齿状透镜实现了增强的彩虹投影效果。

1 齿状透镜的初步设计描述和投影效果

图 1(a)给出凹锥透镜截面的示意图^[1],三角形 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 以旋转轴 y 轴对称,取连接点 O 为原点,连接角 $\alpha = \angle AOB = \angle COD$,齿尖角 $\theta = \angle OBA = \angle ODC$, $OA = OC$, $OB = OD$ 。

参照菲涅尔透镜设计的思想^[3],去除一些不必要的中间材料,即去除图 1(b)中的阴影部分;再将图 1(b)中剩余的部分“塌缩”到入射面 AOC 上,即可获得初步的齿状透镜,如图 1(c)所示。其截面是沿旋转轴 y 轴对称分布的两串底边依次相连的“锯齿”,每个锯齿的截面为大三角形等比例缩小的小三角形。

y 轴的右边依次是中心齿 OA_1B_1 ,相邻第二锯齿 $A_1A_2B_2$,相邻第三锯齿 $A_2A_3B_3$,其余锯齿

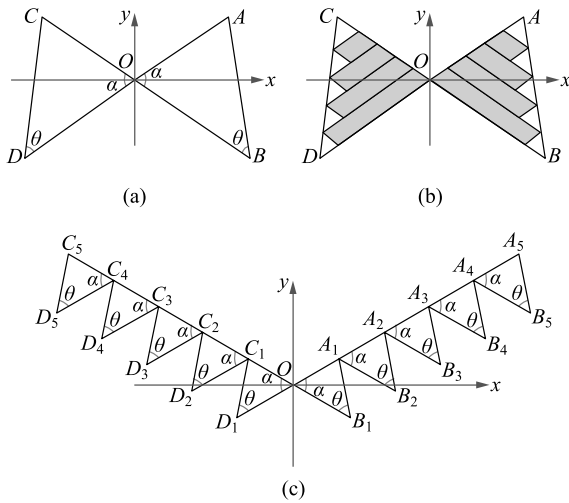


图1 凹锥透镜到齿状透镜的初步设计思路示意图

(a) 减薄之前; (b) 去除阴影部分; (c) 塌缩到入射面上

以此类推直至 $A_{N-1}A_NB_N$, 其中 N 为锯齿个数, 且 $N \geq 1$. y 轴左边的锯齿 OC_1D_1 、 $C_1C_2D_2$ 、 $C_2C_3D_3$ 、 $\cdots$ 、 $C_{N-1}C_ND_N$ 和右边的锯齿完全一致. $N=1$ 时即为单齿凹锥透镜, 如图 1(a) 所示. $N=5$ 时的齿状透镜的截面如图 1(c) 所示, 其 5 个小齿大小形状都相同.

利用 TracePro 光线模拟软件, 在辐照度为 1000 W/m^2 的阳光照射下^[4], 可以在投影屏上获得彩虹效果的真彩色显示, 如图 2 所示. 模拟中给定单齿凹锥透镜的边长 $OA=5 \text{ cm}$ 以及相同 5 齿齿状透镜的齿边长 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=1 \text{ cm}$; 在满足紫光沿出射边 OB 和 $A_{i-1}B_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 出射的前提下, $\alpha=60^\circ$, $\theta=49.21^\circ$ ^[1]. 阳光平行 y 轴分别入射上锥面 AOC 和 A_5OC_5 , 在下面齿状部分出射; 投影屏距离 O 点 10 cm 远且垂直于 y 轴, 其半径设置为 25 cm .

阳光照射下单齿凹锥透镜在投影屏上实现了显著的彩虹光环, 如图 2(a) 所示^[1]. 尽管相同 5 齿齿状透镜的重量减小到 101 g , 但在投影屏上呈现出显著变宽的多重光环, 彩虹效果变差, 如图 2(b) 所示. 单齿凹锥透镜在投影屏上的最大辐照度为 142.7 W/m^2 , 相同 5 齿齿状透镜的最大辐照度下降为 53.8 W/m^2 , 如图 2(c) 所示. 因此, 为了增强齿状透镜的彩虹效果, 必须对每一个小齿的角度和位置进行精细调节.

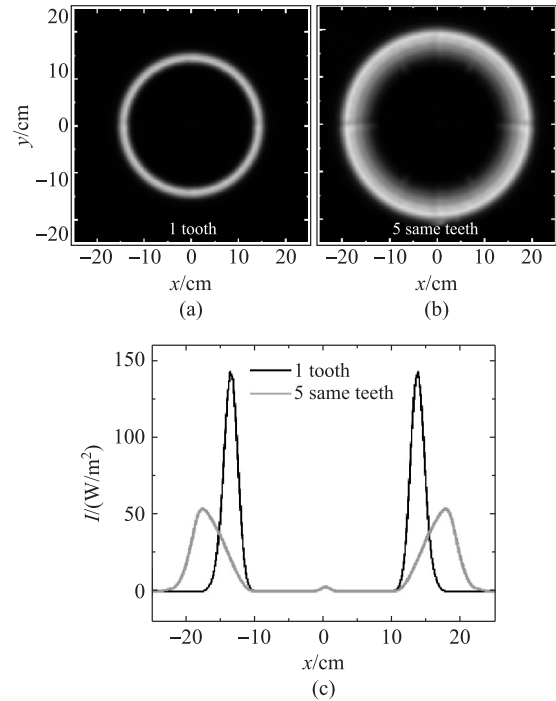


图2 投影效果

(a) 单齿凹锥透镜; (b) 相同 5 齿齿状透镜在投影屏上投影的真彩色显示效果; (c) 强度图

2 根据光路分析调整齿状透镜设计

图 3(a) 给出相同 5 齿齿状透镜的中心齿和相邻第二个齿上的光路示意图. 根据紫光沿着单齿齿边出射并会聚的要求^[1], 中心齿 OA_1B_1 的 OB_1 面上出来的紫光全部会聚于投影屏上 P_1 点, O 点和 B_1 点出射的红光到投影屏上的位置分别为 R_{11} 和 R_{21} ; 第二个锯齿 $A_1A_2B_2$ 的 A_1B_2 面上出来的紫光会聚于投影屏上 P_2 点, A_1 点和 B_2 点出射的红光到投影屏上的位置分别是 R_{12} 和 R_{22} .

R_{11} 到 P_1 之间是中心齿在投影屏上投射的彩环, R_{12} 到 P_2 之间是相邻第二齿在投影屏上投射的彩环. 投影屏的距离较近时, $R_{11}P_1$ 和 $R_{12}P_2$ 不重叠, 而投影屏较远时, $R_{11}P_1$ 和 $R_{12}P_2$ 会发生部分重叠, 但两种情况都不能达到互相增强的效果.

2.1 多齿齿边出射紫光再会聚方法

要使中心齿和相邻第二齿出来的彩虹光环相互增强, 最好的方法就是让各自的紫光会聚点重合, 即 P_1 和 P_2 重合. 因此, 需要顺时针旋转相

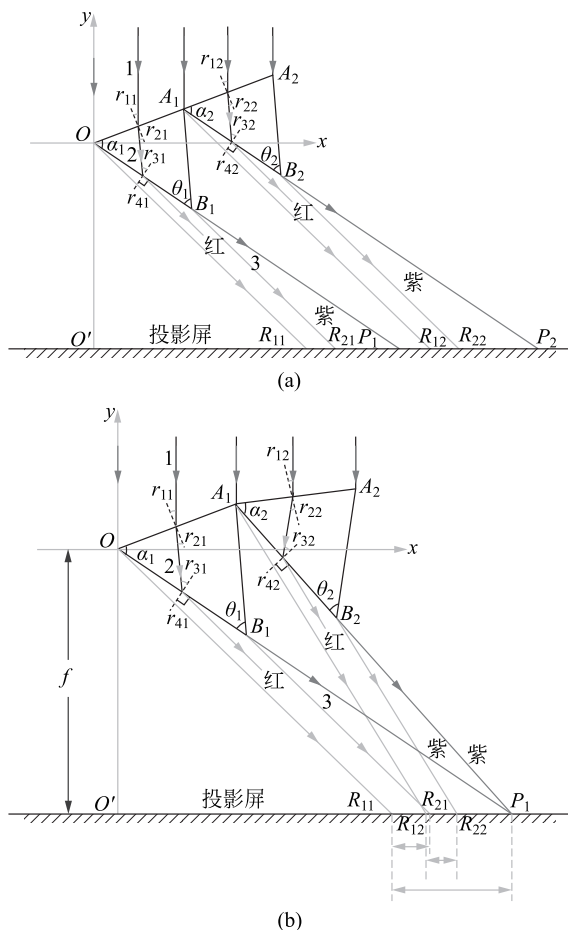


图3 齿状透镜中心齿和相邻第二齿的红(紫)光的光路图
(a) 调整前; (b) 调整后

邻第二齿 $A_1A_2B_2$, 并调整第二齿的连接角 $\angle A_2A_1B_2$ 的大小, 使其沿出射边 A_1B_2 出射的紫光也会聚到 P_1 点。图 3(b) 给出相邻第二齿调整后的光路示意图, $R_{11}P_1$ 和 $R_{12}P_1$ 发生重叠, 达到互相增强的效果。

据此, 在单齿齿边出射紫光会聚的基础上^[1], 本研究提出了多齿齿边出射紫光再会聚方法, 具体思路是: 从同一锯齿入射边平行入射的所有紫光, 沿着锯齿出射边的边缘出射, 即出射角为 90° , 同时不同锯齿出射的紫光又会聚在投影屏的同一点上, 大于紫光波长的光线依次在投影屏上散开并叠加, 从而实现对彩虹效果的增强设计。

设计中须首先给定中心齿紫光会聚的焦平面位置, 齿状透镜 O 点离该焦平面的垂直距离为焦距 f , 与普通透镜的焦距类似。投影屏的位置, 即 O 点到 y 轴和投影屏的交点 O' 的距离 OO' 。投影

屏可以放在焦平面上, 也可以不在。当投影屏放在焦平面的位置时, $OO' = f$, 如图 3(b) 所示。注意, 单齿凹锥透镜在任意远的投影屏上紫光都会聚^[1], 没有焦距大小的限制; 同样, 相同小齿齿状透镜中, 每个小齿出射的紫光在任意远的投影屏上都各自会聚, 等间隔分布, 也没有焦距大小的限制, 如图 3(a) 所示。

根据多齿齿边出射紫光再会聚的要求, 本研究设计了焦距 $f = 10\text{cm}$, $N = 5$ 的弯曲齿状透镜, 其重量为 95g 。当齿数增加到 $20, 50, 100$ 齿时, 相应的重量分别为 $24\text{g}, 9.3\text{g}, 4.6\text{g}$ 。图 4(a) 给出了设计调整后 5 齿齿状透镜的截面图, 其 5 个小齿大小形状都不相同。阳光平行 y 轴入射整个齿状透镜, 不同颜色的光从齿状透镜的下侧分散出射并会聚, 其紫光和红光光路示意图参见图 4(b)。

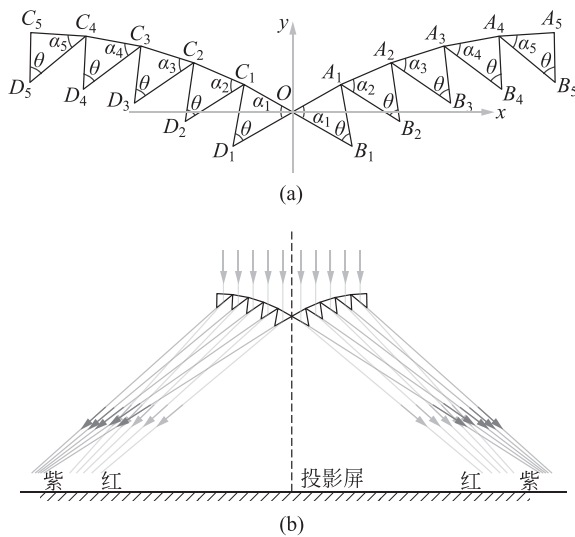


图4 齿状透镜优化设计后的截面图和光路图
(a) 截面图; (b) 光路图

图 4(a) 中入射边 $A_{i-1}A_i$ 等长, 即 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$, 但彼此不再连成一条直线边, 变成折线边; 每个锯齿的光线出射边 $A_{i-1}B_i$ 不等长, 每个锯齿三角形的连接角 α_i 不相等。这些变化将使光线集中到固定远的投影屏上, 即焦平面上, 尤其是使每个锯齿出来的紫光会聚到 P_1 处, 从而获得最佳的彩虹投影效果。

2.2 相邻齿的光路分析

齿状透镜的第 i 个锯齿 $A_{i-1}A_iB_i$ 上, 连接角 α_i 与光线在入射界面 $A_{i-1}A_i$ 和出射界面 $A_{i-1}B_i$ 的折射-折射相关的 4 个角 $r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$ 之间的关系为

$$\begin{cases} \sin r_{2i} = \frac{\sin r_{1i}}{n} \\ r_{3i} = \alpha_i - r_{2i} \\ \sin r_{4i} = n \sin r_{3i} \end{cases} \quad (1)$$

其中,下角标 $i=1,2,\dots,N$, n 是光在玻璃中的折射率,波长为 760nm 的红光或 400nm 的紫光在 BK7 玻璃中的折射率分别为 $n_{\text{红}}=1.5116$ 和 $n_{\text{紫}}=1.5308^{[2]}$ 。

图 3(b)给出中心齿和相邻第二齿上的紫光沿着出射边出射的光路示意图:当 $i=1$ 时,即中心齿上, r_{11} 是光线在 OA_1 界面的入射角, r_{21} 是光线在 OA_1 界面的折射角, r_{31} 是光线在 OB_1 界面的入射角, r_{41} 是光线在 OB_1 界面的折射角或出射角,其紫光出射角 $r_{41\text{紫}}$ 为 90° ,红光出射角为 $r_{41\text{红}}$ 。

同样,在第 i 个锯齿 $A_{i-1}A_iB_i$ 上, r_{1i} 是光线在 $A_{i-1}A_i$ 界面的入射角, r_{2i} 是光线在 $A_{i-1}A_i$ 界面的折射角, r_{3i} 是光线在 $A_{i-1}B_i$ 界面的入射角, r_{4i} 是光线在 $A_{i-1}B_i$ 界面的折射角或出射角,其紫光出射角 $r_{4i\text{紫}}$ 为 90° ,红光出射角为 $r_{4i\text{红}}$ 。

2.3 齿状透镜的具体构造过程

构造齿数为 N 的齿状透镜,需依次确定中心齿 OA_1B_1 、相邻第二锯齿 $A_1A_2B_2$ 、第三锯齿 $A_2A_3B_3$ 、 $\dots$ 、第 $N-1$ 锯齿 $A_{N-2}A_{N-1}B_{N-1}$ 、第 N 锯齿 $A_{N-1}A_NB_N$ 的所有角参数 α_i 和所有顶点 A_i 和 B_i 的坐标,过程如下:

(1) 首先给定 O 为原点 $(0,0)$,入射光线平行于 y 轴,投影屏垂直于 y 轴。给定中心齿紫光会聚的焦平面位置,即焦距 f 。给定入射边 $A_{i-1}A_i$ 的长度 L ;同时设计中为了让 $A_{i-1}A_i$ 面上的光线都从 $A_{i-1}B_i$ 面出来,将 A_iB_i 的方向设置与紫光在 BK7 玻璃中的光路平行,即 A_i 点入射的紫光,刚好从 B_i 点出射。由此确定出每个锯齿的齿尖角 θ_i 是一常数,即 $\theta_i=90-r_{3i}=90-\arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{紫}}}\right)=49.21^\circ$;

(2) 确定中心齿 OA_1B_1 的角参数 α_1 以及两个顶点 A_1 和 B_1 坐标的具体过程如下:中心齿连接角 α_1 的范围为 10° 到 81° ,给定 α_1 为其中一个具体数值,计算光线在 OA_1 面上的入射角 $r_{11}=\arcsin\left(n_{\text{紫}}\sin\left(\alpha_1-\arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{紫}}}\right)\right)\right)$,再计算中心齿即第 1 锯齿 A_1 点的坐标 $(x_{A1}=L\cos r_{11}, y_{A1}=L\sin r_{11})$ 和第 1 锯齿齿尖 B_1 点的坐标 $(x_{B1}=$

$OB_1\cos(\alpha_1-r_{11}), y_{B1}=-OB_1\sin(\alpha_1-r_{11}))$,其中, $OB_1=L\cos\alpha_1+L\sin\alpha_1\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{紫}}}\right)\right)$ 。

将投影屏放在焦平面上,即 $OO'=f$,计算投影屏上紫光会聚 P_1 点的坐标 $(x_{P1}=OO'\tan(90+r_{11}-\alpha_1), y_{P1}=-OO')$;

(3) 确定第 i 个锯齿 $A_{i-1}A_iB_i$ 的角参数 α_i 以及其两个顶点 A_i 和 B_i 坐标的过程如下:结合投影屏上 P_1 点的坐标和第 $i-1$ 个锯齿 A_{i-1} 的坐标 $(x_{A(i-1)}, y_{A(i-1)})$,解方程组

$$\begin{cases} \alpha_i = 90 + r_{1i} - \arctan\left(-\frac{x_{P1}-x_{A(i-1)}}{y_{P1}-y_{A(i-1)}}\right) \\ r_{1i} = \arcsin\left(n_{\text{紫}}\sin\left(\alpha_i - \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{紫}}}\right)\right)\right) \end{cases} \quad (2)$$

可以得到角参数 α_i 和光线在入射边 $A_{i-1}A_i$ 的入射角 r_{1i} 。由计算可得第 i 个锯齿 A_i 点的坐标 $(x_{Ai}=x_{A(i-1)}+L\cos r_{1i}, y_{Ai}=y_{A(i-1)}+L\sin r_{1i})$ 和第 i 个锯齿齿尖 B_i 点的坐标 $(x_{Bi}=x_{A(i-1)}+A_{i-1}B_i\cos(\alpha_i-r_{1i}), y_{Bi}=y_{A(i-1)}-A_{i-1}B_i\sin(\alpha_i-r_{1i}))$,其中, $A_{i-1}B_i=L\cos\alpha_i+L\sin\alpha_i\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{紫}}}\right)\right)$;

利用方程组(2),通过 Python 编程计算,可以获得所有锯齿的角参数 α_i 和所有顶点 A_i 和 B_i 的坐标。以构造 $N=5$ 的齿状透镜为例,需要依次确定 5 个锯齿 OA_1B_1 、 $A_1A_2B_2$ 、 $A_2A_3B_3$ 、 $A_3A_4B_4$ 和 $A_4A_5B_5$ 的角参数和顶点坐标,具体过程如下:

(1) O 为原点 $(0,0)$,给定焦距 $f=10\text{cm}$,入射边长 $L=OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=1\text{cm}$;齿尖角 θ_i 是常数,即 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=\theta_5=49.21^\circ$;

(2) 给定 $\alpha_1=60^\circ$,计算光线在 OA_1 面上的入射角 $r_{11}=30.25^\circ$,再计算 A_1 点的坐标 $(x_{A1}=0.86\text{cm}, y_{A1}=0.50\text{cm})$ 和 B_1 点的坐标 $(x_{B1}=1.08\text{cm}, y_{B1}=-0.62\text{cm})$,如表 1 所示,最后计算投影屏上紫光会聚 P_1 点的坐标 $(x_{P1}=17.50\text{cm}, y_{P1}=-10\text{cm})$;

(3) 结合 P_1 点的坐标和 A_1 点的坐标,由方程组(2)计算可得 $\alpha_2=56.07^\circ$,光线在 A_1A_2 面的入射角为 $r_{12}=23.79^\circ$,第 2 锯齿 A_2 点的坐标 $(x_{A2}=1.78\text{cm}, y_{A2}=0.91\text{cm})$;第 2 锯齿齿尖 B_2 点的坐标 $(x_{B2}=1.94\text{cm}, y_{B2}=-0.18\text{cm})$;其他锯齿的角参数和顶点坐标通过方程组(2)依次可求得,结果如表 1 所示。

表 1 齿状透镜在 $OO'=10\text{cm}$ 、 $L=A_{i-1}A_i=1\text{cm}$ 、齿尖角为 49.21° 、齿数为 5 时每个小齿的角参数和坐标参数。

表中最后一行给出单齿凹锥透镜的角参数和坐标参数

i	$\alpha_i/(\circ)$	$r_{1i}/(\circ)$	x_{Ai}/cm	y_{Ai}/cm	x_{Bi}/cm	y_{Bi}/cm	$r_{4i\text{红}}/(\circ)$	$\Delta r_{4i}/(\circ)$	R_{1i}/cm	R_{2i}/cm	$R_{1i}R_{2i}$	$R_{1i}P_1$
1	60	30.25	0.86	0.50	1.08	-0.62	79.23	10.77	11.70	12.06	0.36	5.80
2	56.07	23.79	1.78	0.91	1.94	-0.18	79.57	10.43	12.24	12.58	0.34	5.26
3	51.86	17.10	2.73	1.20	2.84	0.17	79.93	10.07	12.75	13.07	0.32	4.75
4	47.50	10.30	3.72	1.38	3.78	0.41	80.31	9.69	13.22	13.53	0.31	4.28
5	43.10	3.54	4.72	1.44	4.74	0.54	80.71	9.29	13.66	13.95	0.29	3.84
—	60	30.25	4.32	2.52	5.41	-3.09	79.23	10.77	11.70	13.49	1.79	5.80

将五个锯齿的顶点坐标导入到 AutoCAD 建模软件中连线画图,即得到齿状透镜的右半个截面。将该截面绕 y 轴 1 圈可以形成 3 维立体的齿状透镜,图 4(a)是其截面图。将 AutoCAD 建模的齿状透镜文件导入 TracePro 软件,设置材料、光源、投影屏等即可进行光线追踪模拟分析。

3 投影屏上的红光位置分析

3.1 确定红光出射角

确定第 i 个锯齿 $A_{i-1}A_iB_i$ 上红光出射角 $r_{4i\text{红}}$ 的计算公式如下

$$r_{4i\text{红}} = \arcsin\left(n_{\text{红}} \sin\left(\alpha_i - \arcsin\left(\frac{\sin r_{1i}}{n_{\text{红}}}\right)\right)\right) \quad (3)$$

其中,光线入射角 r_{1i} 既是紫光的入射角 $r_{1i\text{紫}}$,又是红光的入射角 $r_{1i\text{红}}$,即 $r_{1i}=r_{1i\text{紫}}=r_{1i\text{红}}$ 。

当 $\alpha_1=60^\circ$ 、 $OO'=f=10\text{cm}$ 、 $L=1\text{cm}$ 时,由公式(3)可得 5 个齿上的红光出射角 $r_{4i\text{红}}$,如表 1 所示。

每个锯齿上出射的紫光和红光之间的夹角都大,即紫光出射角 $r_{4i\text{紫}}$ 和红光出射角 $r_{4i\text{红}}$ 之差 $\Delta r_{4i}=r_{4i\text{紫}}-r_{4i\text{红}}=90-r_{4i\text{红}}$ 在 10° 左右,参见表 1,为大面积色彩鲜艳的彩虹创造了前提^[5]。

3.2 确定红光在投影屏上的位置

参看图 3(b),第 i 个锯齿出射的红光在投影屏上的范围分析如下:在 $A_{i-1}A_i$ 界面上的有效进光区间是整个 $A_{i-1}A_i$ 部分,在 A_{i-1} 点和 A_i 点之间入射的紫光,到达 $A_{i-1}B_i$ 面后,均沿着 $A_{i-1}B_i$ 面出射,这些紫光全部会聚到投影屏上的同一点 P_1 , $O'P_1$ 为彩虹外圈半径。

在 A_{i-1} 点和 A_i 点之间入射的红光,在 $A_{i-1}B_i$ 面上平行出射,在投影屏上不能会聚到同

一点。 A_{i-1} 点进入的红光从 $A_{i-1}B_i$ 面出射后,到投影屏上的位置 R_{1i} ,靠近彩虹圈的内侧,计算如下

$$O'R_{1i} = x_{A(i-1)} + (y_{A(i-1)} + OO') \tan(r_{1i} + r_{4i\text{红}} - \alpha_i) \quad (4)$$

而从 A_i 点入射的红光从 $A_{i-1}B_i$ 面的 F_i 点(不同于 B_i 点)出射后,到投影屏上的位置 R_{2i} ,比 R_{1i} 要远离中心一点,计算如下

$$O'R_{2i} = x_{F_i} + (y_{F_i} + OO') \tan(r_{1i} + r_{4i\text{红}} - \alpha_i) \quad (5)$$

其中, $x_{F_i} = x_{A(i-1)} + A_{i-1}F_i \cos(\alpha_i - r_{1i})$, $y_{F_i} = y_{A(i-1)} - A_{i-1}F_i \sin(\alpha_i - r_{1i})$, $A_{i-1}F_i = L(\cos\alpha_i + \sin\alpha_i \tan r_{3i\text{红}})$ 。

由于 F_i 在 $A_{i-1}B_i$ 边上,且非常接近于 B_i ,经常用 B_i 取代 F_i ,式(5)可以改为如下形式

$$O'R_{2i} = x_{B_i} + (y_{B_i} + OO') \tan(r_{1i} + r_{4i\text{红}} - \alpha_i) \quad (6)$$

尽管同一锯齿出射的红光以及不同锯齿出射的红光不能会聚到一点,但后一齿投射的红光 $R_{1(i+1)}R_{2(i+1)}$ 区间都会比前一齿投射的红光 $R_{1i}R_{2i}$ 区间更靠近紫光会聚点 P_1 。

图 5 给出单齿凹锥透镜、5 齿以及 100 齿的齿状透镜的每个小齿在 $OO'=10\text{cm}$ 的投影屏上的

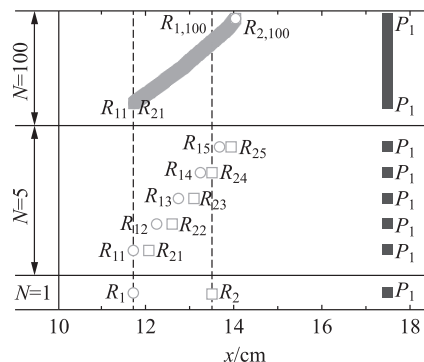


图 5 齿状透镜的每个小齿在投影屏上的红(紫)色位置

红(紫)色位置。以不同 5 齿齿状透镜为例,红光 $R_{12}R_{22}$ 区间比 $R_{11}R_{21}$ 区间更靠近紫光会聚点 P_1 , $R_{13}R_{23}$ 、 $R_{14}R_{24}$ 、 $R_{15}R_{25}$ 依次更靠近 P_1 。相比单齿来说,5 齿和 100 齿的径向宽度 $R_{11}P_1$ 不变。

3.3 彩虹鲜艳度的量化

参看图 3(b), A_{i-1} 点出射的红紫光范围 $R_{1i}P_1$, B_i 点出射的红紫光范围 $R_{2i}P_1$, 假设 $R_{1i}P_1$ 和 $R_{2i}P_1$ 区间所有颜色在投影屏上等间距展开, 屏上每一点的颜色数量 Δm 都很多, 且 R_{2N} 位置的颜色数最多, 定义最大颜色数为

$$\Delta m_{\max} = \Delta \lambda_{R_{2N}} = \frac{R_{11}R_{2N}}{R_{11}P_1} (760 - 400) \quad (7)$$

其中, N 为最大齿数, $\Delta m_{\max}$ 决定了彩虹的纯度, 该数值越小, 彩虹纯度越高^[1]。

相对于彩虹的径向宽度 $R_{11}P_1$, 彩虹环内红色边缘 $R_{11}R_{2N}$ 所占比例为

$$\delta_R = \frac{R_{11}R_{2N}}{R_{11}P_1} \times 100\% \quad (8)$$

显然, δ_R 越小, 彩虹越鲜艳^[1]。

单齿凹锥透镜在投影屏上 R_2 处最大颜色数为 $\Delta m_{\max} = \Delta m_{R_2} = 111\text{nm}$ ^[1], 其彩虹环内红色边缘 R_1R_2 所占比例为 $\delta_R = 31\%$ 。

不同 5 齿齿状透镜的最大颜色数的位置在 R_{25} 处, $\Delta m_{\max} = \Delta m_{R_{25}} = 139\text{nm}$, 其彩虹环内红色边缘 $R_{11}R_{25}$ 所占比例为 $\delta_R = 39\%$ 。

在 $N=100$ 齿时, 投影屏上 $R_{2,100}$ 位置的颜色数最多, $\Delta m_{\max} = \Delta m_{R_{2,100}} = 146\text{nm}$, 彩虹环内红色边缘 $R_{11}R_{2,100}$ 所占比例 $\delta_R = 41\%$ 。

因此, 随着齿数的增多, 尽管齿状透镜的重量减轻, 但在颜色的纯度和鲜艳程度上却略有降低, 即 $\Delta m_{\max}$ 和 δ_R 都在增大。

4 影响齿状棱镜投影彩虹效果的参量分析

4.1 不同投影屏位置 OO' 对彩虹效果的影响

图 6 给出 $f=10\text{cm}$ 时, 不同 5 齿弯曲齿状透镜在不同投影屏距离 OO' 下的环形彩虹效果。将投影屏放到焦平面的位置 10cm 处时, 投影屏上观察到了显著的彩虹光环, 如图 6(a) 所示。彩虹外圈半径 $O'P_1 = 17.5\text{cm}$, 彩虹径向宽度 $R_{11}P_1 = 5.80\text{cm}$, 其最大辐照度为 153.7W/m^2 , 比单齿凹锥透镜时有所增加。然而, 彩环内部出现一圈淡

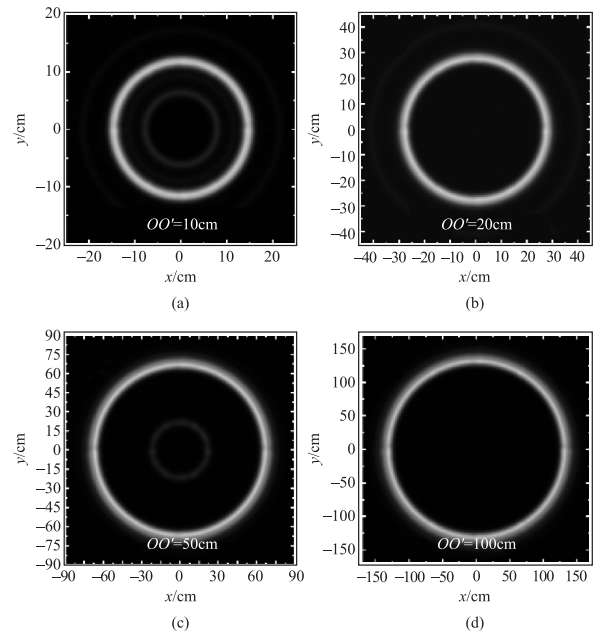


图 6 在 $f=10\text{cm}$ 时, 不同 5 齿弯曲齿状透镜在不同投影屏距离 OO' 下的环形彩虹效果

(a) $OO'=10\text{cm}$; (b) $OO'=20\text{cm}$; (c) $OO'=50\text{cm}$; (d) $OO'=100\text{cm}$

淡的杂光, 其最大辐照度为 38.2W/m^2 , 仔细分析表明, 这些杂光是由部分光线在不同齿之间多次反射折射形成的。

有趣的是, 当投影屏放在远离焦平面的位置, 即过焦 $OO' > f$ 的时候, 杂光会消失, 再出现, 再消失, 如图 6(b) 到 6(d) 所示。投影屏在 20cm 位置时, 内部的杂光会消失, 因为杂光的出射角度不同, 所以此处是杂光叠加在了彩环上。当投影屏在 50cm 位置时, 中间出现了新的杂光, 最大辐照度为 1.9W/m^2 , 小于彩环的最大辐照度 6.8W/m^2 。当投影屏在 100cm 位置时, 中间的杂光再次消失, 彩虹最大辐照度为 1.77W/m^2 。整体上来看, 相对于彩环的光强, 杂光都比较弱, 不影响彩环的观察, 而且彩环的最大辐照度比单齿凹锥透镜在相同投影屏距离上的最大辐照度还要大一些^[1]。

4.2 不同焦距 f 对透镜截面形状及彩虹效果的影响

保持 $N=5$, $\alpha_1=60^\circ$, $L=1\text{cm}$, 如果焦距从 $f=10\text{cm}$ 增加到 $f=100\text{cm}$, 齿状透镜的截面形状从弯曲边向直线边变化, 如图 7(a) 到 7(d) 所示。

投影屏放在焦平面的位置, 即 $OO'=f$, 随着焦距 f 的增加, 彩虹外圈半径 $O'P_1$ 增大, 彩虹径

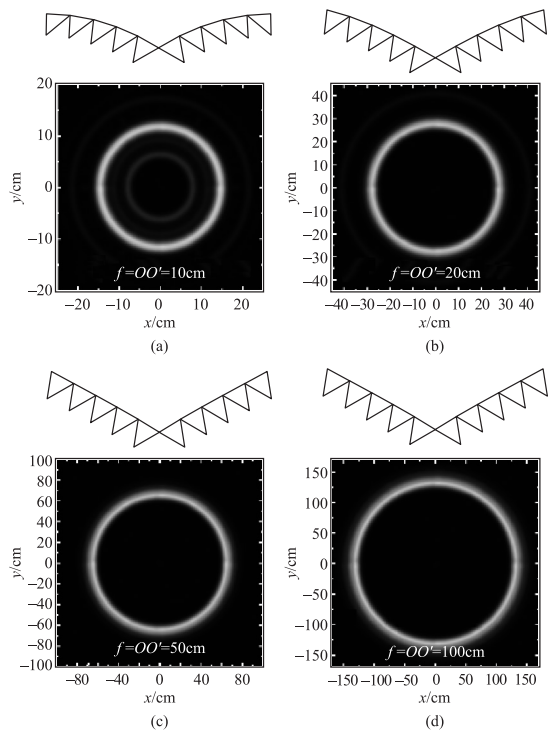


图7 齿状透镜在不同焦距 f 下截面形状变化及真彩色效果
(a) $f=10\text{cm}$; (b) $f=20\text{cm}$; (c) $f=50\text{cm}$; (d) $f=100\text{cm}$

向宽度 $R_{11}P_1$ 也逐渐增大。当 $f=100\text{cm}$ 时,投影屏上的彩虹外圈半径 $O'P_1=174.95\text{cm}$,彩虹径向宽度 $R_{11}P_1=57.96\text{cm}$,分别是 $f=10\text{cm}$ 时的外圈半径和径向宽度的 10 倍。

4.3 齿数 N 对彩虹效果的影响

图 8(a) 和 8(b) 给出 $f=100\text{cm}$ 时, $OO'=100\text{cm}$ 远投影屏上 20 齿和 100 齿的齿状透镜截面形状和环形彩虹效果。根据前面 3.3 的分析,在齿状透镜大小一定的情况下,随着齿数 N 增大,投影出环形彩虹的外圈半径不变,但纯度上会略有降低。然而,从彩虹的投影效果上来看,100 齿的投影效果仍是非常好,这是因为每个齿的紫光 and 红光出射角之差 Δr_{4i} 大,在 10 度左右,保证了不同齿数下彩虹的鲜艳程度^[5]。

图 8(c) 给出不同齿数 N 时,投影屏 $OO'=f=100\text{cm}$ 上的径向辐照强度 I 分布。随着齿数 N 从 1 增加到 100,最大辐照强度先轻微增加,然后几乎不变。当 $N=1,5,20,50,100$ 时,最大辐照强度分别为 $1.84\text{W/m}^2, 1.87\text{W/m}^2, 1.89\text{W/m}^2, 1.89\text{W/m}^2, 1.89\text{W/m}^2$ 。

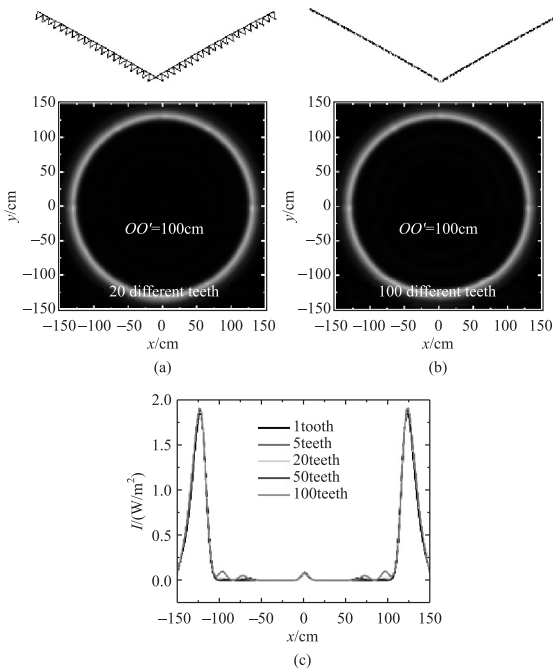


图8 $f=100\text{cm}$ 时的实验结果
(a) 20 齿; (b) 100 齿的齿状透镜截面形状、在投影屏上的彩虹真彩色显示效果; (c) 径向辐照强度 I 随齿数 N 的变化关系

4.4 中心角 α_1 对彩虹效果的影响

图 9 给出 $f=OO'=100\text{cm}$ 时,四个不同中心角 $\alpha_1=30^\circ, 40.79^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ 的 5 齿齿状透镜的立体剖视图和彩虹效果图。

随着中心角 α_1 的增大,齿状透镜从上凸下凹变为上凹下凸,彩虹外圈半径 $O'P_1$ 增大,彩虹径向宽度 $R_{11}P_1$ 也增大,投影屏上 R_{25} 位置的颜色数 Δm 增加,彩虹环内红色边缘 $R_{11}R_{2N}$ 所占比例 δ_R 减小,彩虹更鲜艳,具体参数参见表 2。

表2 齿状透镜在 $f=100\text{cm}$, 齿数为 5 时的不同中心角 α_1 时的角参数,位置参数和彩虹纯度参数

$\alpha_1/(^\circ)$	$r_{41\pm 1}/(^\circ)$	$r_{45\pm 1}/(^\circ)$	$\Delta r_{41}/(^\circ)$	$\Delta r_{45}/(^\circ)$	R_{11}/cm	R_{25}/cm	P_1/cm	$R_{11}R_{25}$	$R_{11}P_1$	$\Delta\lambda/\text{nm}$	$\delta_R/\%$
30	81.98	82.14	8.02	7.86	70.89	72.33	94.40	1.44	23.51	22.10	6.1
40.79	80.92	81.09	9.08	8.91	84.29	86.12	115.90	1.83	31.61	20.80	5.8
50	80.10	80.26	9.90	9.74	97.53	99.68	138.58	2.16	41.06	18.91	5.3
60	79.23	79.36	10.77	10.64	116.99	119.57	174.95	2.59	57.97	16.07	4.5

紫光和红光的出射角之差 Δr_{41} 和 Δr_{45} 随着 α_1 角的增大而增大,例如, $\alpha_1 = 30^\circ$ 时, Δr_{41} 约 8.02° , Δr_{45} 约 7.86° , 而 $\alpha_1 = 60^\circ$ 时, Δr_{41} 约 10.77° , Δr_{45} 约 10.64° 。随着中心角 α_1 的增大,最大辐照强度降低。对于不同的中心角 $\alpha_1 = 30^\circ, 40.79^\circ, 50^\circ, 60^\circ$, 最大辐照强度分别对应 5.07W/m^2 , 5.61W/m^2 , 3.92W/m^2 , 1.87W/m^2 。

需要特别说明的是图 9(b)所示的齿状透镜,看上去上表面是平的,实际上除了 OA_1 垂直入射光外, A_1A_2 、 A_2A_3 、 A_3A_4 、 A_4A_5 都依次略微向下弯折,对制备工艺的精度要求还是比较高的。此外,针对不同的应用场景,还可以在特定的中心角 α_1 下,通过调整焦距 f 和投影屏距离 OO' 来优化彩虹的投影效果。

综上,通过对齿状透镜的投影屏位置 OO' 、焦距 f 、齿数 N 和中心角 α_1 的调整,可以设计最佳的彩虹投影效果,实现对彩虹亮度和半径的控制,从而在降低成本的同时满足多样化的市场需求。

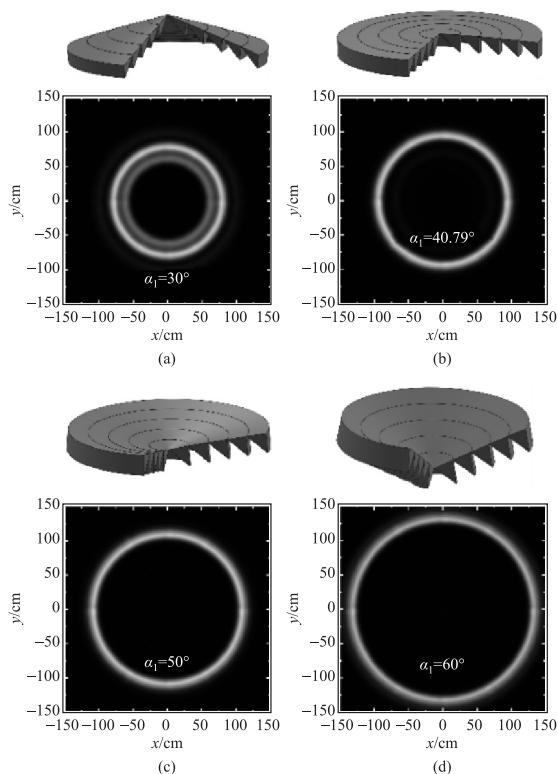


图9 $f=100\text{cm}$ 时,齿状透镜 5 齿不同中心角的截面图和彩虹效果图

(a) $\alpha_1 = 30^\circ$; (b) $\alpha_1 = 40.79^\circ$; (c) $\alpha_1 = 50^\circ$; (d) $\alpha_1 = 60^\circ$

5 结语

本文立足菲涅尔透镜设计理念,致力于解决传统凹锥透镜制造环形彩虹时重量过大的问题。通过融合几何光学原理与 Python 编程技术,精准调控齿状结构,成功将凹锥透镜优化为轻薄的齿状透镜,创新性地设计出一系列可生成环形彩虹效果的透镜。在研究过程中,借助 TracePro 光线模拟软件严格验证,结果清晰表明,在相同投影距离下,齿状透镜相较于传统凹锥透镜,能呈现出更为显著的彩虹投影效果,有力证实了研究成果的有效性 with 优越性。这些研究成果提供了实现优质彩虹效果的理论基础,同时为彩虹在课堂教学演示、汽车照明与装饰、城市路灯美化、氛围灯光营造、便携式手电筒创新设计以及儿童彩虹玩具开发等多元场景的实际应用提供了可能。

参 考 文 献

- [1] 刘新军,肖志博,刘宇浩,等. 通过旋转三棱镜获得凹锥透镜研究环形彩虹[J]. 物理实验, 2024, 44(6): 11-17.
LIU X J, XIAO Z B, LIU Y H, et al. Studying circular rainbow projection with concave conical lens obtained by rotating triangular prisms[J]. Physic Experiment, 2024, 44(6): 11-17. (in Chinese)
- [2] POLYANSKIY M N. Refractiveindex. info database of optical constants[J]. Scientific Data, 2024, 11: 94. <https://doi.org/10.1038/s41597-023-02898-2>
- [3] 柯杰耀. 高会聚效率大口径平板菲涅尔透镜设计[D]. 北京理工大学, 2018.
KE J Y. Flat Fresnel lens design with large aperture in high convergency efficiency [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2018. (in Chinese)
- [4] 吴贺利,杨帆,罗晨晖,等. 基于 Tracepro 的非涅尔聚光透镜设计与仿真[J]. 汽车实用技术, 2020, 13: 90-92.
WU H L, YANG F, LUO C H, et al. Design and simulation of Fresnel lens based on Tracepro[J]. Automobile Applied Technology, 2020, 13: 90-92. (in Chinese)
- [5] 刘新军. 阳光透过鱼缸在室内墙上投射出米级亮丽彩虹[J]. 物理实验, 2022, 42(5): 23-29, 47.
LIU X J. Brilliant meter-scaled rainbow on the indoor wall cast by sunlight through the fish tank[J]. Physic Experiment, 2022, 42(5): 23-29, 47. (in Chinese)