

利用光镊技术演示光的轨道角动量

王自强 龚 雷 李银妹

(中国科学技术大学物理学院, 安徽 合肥 230026)

摘 要 光的轨道角动量是光的一个独特特性, 它与光场的特定空间分布相联系。本文探讨将涡旋光镊科研成果转化为教学, 并演示了光的轨道角动量。实验采用液晶空间光调制器对光场相位进行调制, 生成涡旋光束实现对酵母细胞的旋转操控。通过该实验, 学生观察到光的轨道角动量致酵母细胞公转现象, 并研究拓扑荷正负值和酵母细胞旋转方向的关系以及拓扑荷数值大小和酵母细胞旋转速度的关系。该实验直观地展示了涡旋光的轨道角动量产生的力学效应, 使学生对光的轨道角动量有了更深入的理解。同时通过实验的探索, 拓宽学生的眼界, 激发学生的科研兴趣, 培养学生的创新能力。

关键词 涡旋光束; 轨道角动量; 光镊; 酵母细胞

DEMONSTRATION OF ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF LIGHT USING OPTICAL TWEEZERS

WANG Ziqiang GONG Lei LI Yinmei

(School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026)

Abstract The orbital angular momentum of light is a unique property of light, which is related to the specific spatial distribution of the light field. This paper explores the transformation of the scientific research results of vortex optical tweezers into teaching and demonstrates the orbital angular momentum of light. The experiment uses a liquid crystal spatial light modulator to modulate the phase of the light field to generate a vortex beam to achieve rotational manipulation of yeast cells. Through this experiment, students can observe the phenomenon of yeast cell revolution caused by the orbital angular momentum of light, and study the relationship between positive and negative topological charges and the rotation direction of yeast cells, and the relationship between the value of topological charges and the rotation speed of yeast cells. This experiment intuitively demonstrates the mechanical effects generated by the orbital angular momentum of vortex light, allowing students to have a deep understanding of the orbital angular momentum of light. At the same time, through experimental exploration, it broadens students' horizons, stimulates their interest in scientific research, and cultivates their innovative ability.

Key words vortex beam; orbital angular momentum; optical tweezers; yeast cells

收稿日期: 2024-12-30

基金项目: 安徽省教学研究项目(2022jyxxggyj028, 2023jyxm0033)资助; 国家自然科学基金(31870759)资助。

通信作者: 王自强, wzqiang@ustc.edu.cn。

引文格式: 王自强, 龚雷, 李银妹. 利用光镊技术演示光的轨道角动量[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 273-279.

Cite this article: WANG Z Q, GONG L, LI Y M. Demonstration of orbital angular momentum of light using optical tweezers[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 273-279. (in Chinese)

光具有动量,这是光的基本属性之一。光的力学效应是光动量的直接体现。光镊的发明是光的力学效应走向实际应用的一个重要进展。光镊能够捕获和操控微小粒子,并实现纳米位移和皮牛力的精确测量,这使光镊在生命科学、物理以及化学等领域得到广泛应用并取得了重要成果。2018年,物理学家 A. Ashkin 因光镊的发明及其在生物系统中应用获得了诺贝尔物理学奖。

传统的光镊利用了光的线性动量。光镊技术为演示和测量“光的力学效应”提供了理想的工具。中国科学技术大学光镊课题组从1999年开始在国内最早进行“光的力学效应及皮牛力测量”的单光镊实验教学研究。该实验运用先进的科学技术,形象地演示了光的力学效应,使学生直观感受和观测光的力学效应,加深对光的线性动量这一基本物理量的认识^[1,2]。

实际上,光不仅具有线性动量,还有角动量。角动量包括轨道角动量和自旋角动量。光的自旋角动量与其偏振相关,而轨道角动量则源自光的螺旋相位波前。在光与物质相互作用过程中,光子的动量和角动量会发生转移,微粒因此发生光致旋转,这也是激光力学效应的重要体现。静态光阱中微粒的旋转一般分为三种情况:(1)线性动量的传递致使微粒自转,这种情况下微粒形状必须是不规则的,且自转不会持续进行。(2)自旋角动量的传递致使微粒自转,圆偏振光或椭圆偏振光经双折射微粒后其偏振态发生改变,将自旋角动量传递给双折射微粒使其在光阱中自转^[3]。(3)轨道角动量的传递致使微粒公转,具有螺旋波前的涡旋光束其本身具有轨道角动量,可传递给微粒,使微粒绕涡旋光阱的中心旋转。涡旋光镊已经成为科学研究的热点,在物理、化学、生命科学领域取得许多重大研究成果^[4-6]。本实验将前沿的科研成果引入实验教学。利用液晶空间光调制器调制光场生成涡旋光阱。通过涡旋光阱操控酵母细胞旋转,可以直观的观察光的轨道角动量,并感受光的力学效应。同时使学生接触物理科技的最前沿领域,对开阔学生视野有极大的帮助。

1 光镊技术演示光的轨道角动量教学实验设计的理论依据:

实验中采用涡旋光束实现实验样品的旋转,

从而演示光的轨道角动量。下面以涡旋光束为例介绍光的轨道角动量的原理。

1.1 涡旋光束

涡旋光束是一种携带轨道角动量的光束,相位结构呈螺旋分布,在传播过程中,中心光强始终保持为零,同时光束中心相位不确定,具有相位奇点。拉盖尔-高斯光束^[4,7,8]是涡旋光束的典型代表,其波前会绕着传播方向上一条线以螺旋方式旋转传播,如图1所示。光学涡旋的拓扑荷定义为其在一个波长的扭转次数,拓扑荷恒为整数,用 l 表示,依其扭转方向可能是正数或是负数。拓扑荷越大表示光沿着轴旋转的越快。图1中从左到右为拓扑荷数,光束的波前形状、相位分布和光强分布。从第二列可以观察到 $l=0$ 时,该模式下波前不是螺旋面,而是多个断开的一系列平行平面;当 $l=\pm 1$ 时, l 的符号决定了其螺旋的方向,波前形状为单个螺旋形表面,其步长等于波长 λ ;当 $l \geq 2$ 时波正面由 $|l|$ 个交织在一起的螺旋组成,每个螺旋表面的步长为 $|l|\lambda$ 。第三列是光束横截面的相位分布,当 $l \neq 0$,其位相分布呈现分叉结构,中心具有无法定义位相的位相奇点。第四列是OAM光束横截面的光强分布,从图中可以看到其呈一个暗中空环形,当 $l \neq 0$ 每个OAM光束的中心都为暗中空,而且随着拓扑荷数 $|l|$ 的增加,暗中空部分所占的面积比例越来越大。

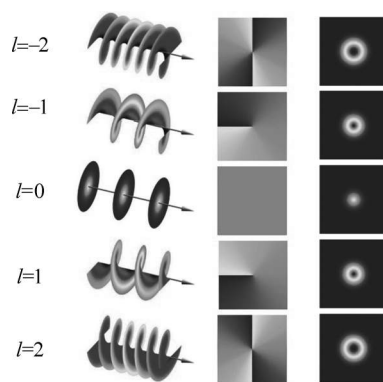


图1 拓扑荷 l 为-2、-1、0、1、2的涡旋光束示意图,从左到右分别表示光束的螺旋结构、相位分布和强度分布

涡旋光的模式^[9]可表示为

$$\psi_l(\mathbf{r}) = u_p^l(r, z) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} e^{il\phi} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{k} = k\hat{z}$ 是光束的波矢量, $u_p^l(r, z)$ 是光束在 z 处的径向轮廓, l 为涡旋光束的拓扑荷,决定绕涡旋点一周的相位变化。 $u_p^l(r, z)$ 可以用傍轴的

亥姆霍兹方程的本征解拉盖尔-高斯方程来表达

$$u_p^l(r, z) = (-1)^p \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^l L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \quad (2)$$

其中, $L_p^l(x)$ 是径向指数为 p 的广义拉盖尔多项式, w 是 z 处光束半径。

由于涡旋光束独特的波前特性, 光束本身带有轨道角动量, 使得其在量子信息处理, 粒子捕获和囚禁等领域有广泛的应用。涡旋光束在微操控领域的应用也促进了人们对光束角动量的大量研究, 尤其是对拉盖尔-高斯光束和高阶贝塞尔光场^[10]的研究。由于梯度力的作用微粒可被陷于此光学旋涡中, 通过散射和吸收微粒会因轨道角动量的传递沿光场的环状分布旋转。由涡旋光束的特点可知, 想要产生一束涡旋光, 只要在不同角向位置处引入不同的位相延迟, 人为构造一个涡旋位相项 $e^{il\phi}$ 即可。一般可采用柱透镜, 涡旋位相板, 叉形光栅等元件引入涡旋位相。本实验则通过在液晶空间光调制器上加载对应的位相全息图来实现涡旋位相的引入, 具有可实时调制涡旋光束的优点。这种方法还具有光路结构简单, 调节方便, 衍射效率高, 生成涡旋光的拓扑荷范围广等特点。

1.2 涡旋光束的轨道角动量

涡旋光束不同于其他一般激光束的特点在于其光场具有倾向波前, 就是这个倾向性使得光束波印廷矢量在角向方向有一分量, 从而导致光场产生了轨道角动量。下面我们对涡旋光束所具有的角动量做了详细的理论推导。根据电磁学理论, 激光束的动量密度^[11]的周期平均值可表示成

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle \quad (3)$$

则其角动量密度为

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 (\mathbf{r} \times \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (4)$$

式(4)中包括光束的自旋角动量密度和轨道角动量密度。在傍轴近似条件下, 光束的动量密度可表示成

$$\mathbf{p} = i\omega \frac{\epsilon_0}{2} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) + \omega k \epsilon_0 |u|^2 \mathbf{z} + \omega \sigma \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \phi \quad (5)$$

光场的振幅分布, σ 为激光束的偏振度, $\sigma = \pm 1$ 分别代表着右旋和左旋偏振光, $\sigma = 0$ 为线偏振光, 从式(5)中可以看出, 上式的第三项不依赖于角向

位相分布而是依赖于光束的偏振态, 这项直接与光束的自旋角动量相联系, 而第一项依赖于相位梯度而不是偏振态, 所以其与轨道角动量相关。 z 轴方向的角动量密度依赖于线性动量的角向分量

$$j_z = r p_\phi \quad (6)$$

以圆偏振的拉盖尔-高斯光束为例, 式(6)可表示为

$$j_z = \epsilon_0 \left\{ \omega l |u|^2 - \frac{1}{2} \omega \sigma r \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \right\} \quad (7)$$

上式即为涡旋光束总的角动量。

此外, 若从量子力学观点出发, 拉盖尔-高斯光束的光场 $u(r, \phi, z)$ 是角动量算符的本征值, 所以涡旋拉盖尔-高斯光束 z 方向的角动量还可表示为

$$J_z = (l + \sigma) \hbar \quad (8)$$

其物理含义可理解为涡旋光束的每个光子携带的自旋轨道角动量为 $\sigma \hbar$, 轨道角动量为 $l \hbar$ 。

1.3 涡旋光场中微粒的旋转

由上节的理论分析可知, 涡旋光束中每个光子携带大小为 $l \hbar$ 的轨道角动量。单位时间内酵母细胞在涡旋光阱中能吸收的总的轨道角动量是固定的

$$L_z = \frac{P_{abs}}{\omega'} l \quad (9)$$

其中, P_{abs} 被酵母细胞吸收的光功率, ω' 为捕获激光的角动量。酵母细胞被束缚在环形涡旋光阱中, 在达到平衡状态(匀速圆周运动)时, 酵母细胞单位时间吸收到的轨道角动量和酵母细胞由于运动而受到所处溶液带来的阻力矩相平衡。由流体力学理论, 在酵母细胞运动速度较慢时, 细胞所受阻力可以近似为

$$f_{liquid} = c \cdot v \quad (10)$$

其中, 旋转速度 $v = \omega R_l$, ω 为酵母细胞旋转的角速度, R_l 为环形光阱的半径, c 为阻力系数。平衡时, 则有

$$c R_l^2 \omega = \frac{P_{abs} l}{\omega'} \quad (11)$$

由式(11)可得酵母细胞在光阱中旋转角速度为

$$\omega \propto \frac{P_{abs} l}{R_l^2} \quad (12)$$

值得注意的是, 酵母细胞在环形涡旋光阱中旋转时, 环形光阱的光强并不是一次全部照射在细胞上, 单位时间内只有一部分照射到细胞上, 若假定

环形光斑的光强分布是均匀的,则有

$$P_{abs} \propto \frac{P}{2\pi R_l} \quad (13)$$

P 为涡旋光束的总功率,将式(13)带入式(12),则可得酵母细胞的旋转角速度为 $\omega \propto \frac{P}{R_l^3} l$,考虑到环形光束的半径 $R_l \propto l$,则酵母细胞旋转速度与拓扑荷的关系为

$$\omega \propto \frac{P}{l^2} \quad (14)$$

2 光的轨道角动量教学实验的设计

2.1 实验目的

本实验是采用液晶空间光调制器对光场相位进行调制生成涡旋光束实现对酵母细胞的旋转操控。

(1) 了解涡旋光束的基本特征,认识光具有轨道角动量的基本特性;

(2) 了解液晶空间光调制器(SLM)的工作原理,掌握利用 SLM 产生涡旋光束的方法;

(3) 学习光镊捕获细胞的原理,掌握设备使用方法;

(4) 通过实验分析拓扑荷和酵母细胞旋转速度的关系;

(5) 学会使用 ImageJ 软件处理实验数据,测量酵母细胞旋转速度;

(6) 掌握查询文献的方法,培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力;

(7) 激发学生的科研兴趣,培养学生的创新能力;

(8) 了解光镊技术在交叉学科中的应用,培养理论基础知识与实践技能综合应用能力。

2.2 实验光路及装置

实验光路如图 2(a)所示,波长为 532nm 的激光经过通过透镜组扩束后,经反射镜后以 6° 的入射角射在液晶空间光调制器上。在聚焦点附近通过小孔滤波获取中心较均匀的光斑。通过调节半波片,将光束偏振调至 SLM 长轴的方向。经过 SLM 反射后,通过反射镜和透镜组 L3 和 L4 透镜组缩束,进入显微镜,在显微镜中通过二色镜反射至物镜,在交点处形成光镊。本实验所用激光为长春新产业光电公司的 MSL-R-532-5W 固体激光器输出波长 532.127nm。全息光镊所用显微镜为

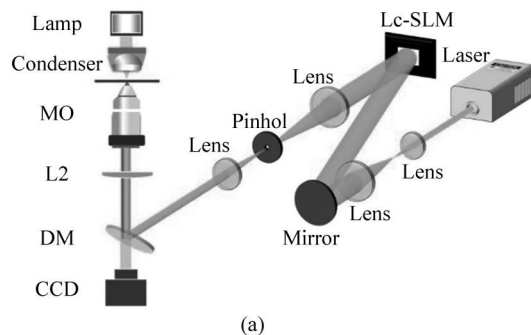


图 2 全息光镊装置图

(a) 光路图; (b) 实验装置图

OLYMPUS IX73 P2F 双层光路显微镜,光束经过 HOLOEYE 公司的 PLUTO-2.1 型号的液晶空间光调制器调制后进入显微镜由物镜聚焦,采用 BASLER 公司的 acA720-520um CMOS 相机,将所设计的相位加载到液晶空间光调制器上,产生目标光场,实现多粒子操控。实验装置图如图 2(b)所示。

实验过程中可以通过切换全息相位图实现对光阱中微粒旋转角速度的实时控制。图 3 为生成的相位图,是相位图平面的极角坐标,为全息图的拓扑荷,从图中可以看出拓扑荷不同全息图的位相梯度也不同,将它们通过计算机加载到液晶空间光调制器上在阱位透镜的傅里叶平面就可得到理想的涡旋光束。

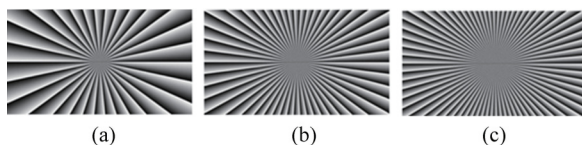


图 3 拓扑荷不同的涡旋光束聚焦生成的环形涡旋光阱

(a) $l=30$; (b) $l=50$; (c) $l=70$

2.3 实验内容

2.3.1 制备酵母样品

取 1~2 粒干酵母样品,放入 5ml 离心管中,加入适量离子水,合上管盖,用力摇晃,使酵母样品分散均匀。用移液管取 2~3 滴放入样品池,盖上盖玻片。

2.3.2 捕获酵母细胞

把制备好的样品放到显微镜的样品台上。调节显微镜,移动样品台,让激光捕获酵母细胞。

2.3.3 观察光致旋转的现象

在 SLM 上加载设计好的全息相位图,实验上我们用生成的涡旋环形光阱对酵母细胞进行了捕获尝试,观察到酵母细胞会沿着环形光场光强最强处绕光轴中心旋转(顺时针)。图 4 是加载拓扑荷的相位图到 SLM 上,酵母细胞发生旋转的序列图。

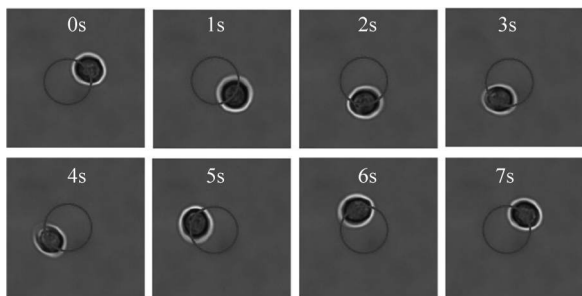


图 4 酵母细胞在涡旋光阱中旋转的时序图(灰线为涡旋光阱聚焦的环形光斑,白色字为时间,单位为秒)

2.3.4 光之旋转方向的控制

不改变拓扑荷的大小,只改变其正负时,将生成的相位加载到 SLM 上,酵母细胞的转动方向发生了变化(由顺时针变为逆时针)。通过实验我们可以直观的得知拓扑荷的正负决定了酵母细胞的转动方向。图 5 显示拓扑荷为正时(图 5(a)),酵母细胞做顺时针旋转,拓扑荷为负时(图 5(b)),做逆时针旋转。

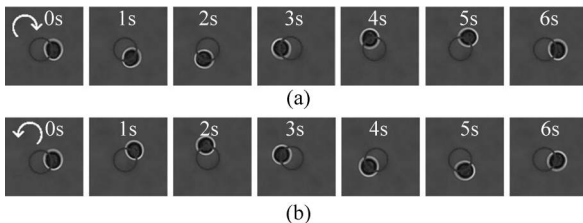


图 5 酵母细胞旋转方向随拓扑荷正负的变化而变化(灰线为涡旋光阱聚焦的环形光斑,白色字为时间,单位为秒)

(a) $l=40$; (b) $l=-40$

2.3.5 测量细胞旋转角速度

设置相机的采集频率为 100Hz,对酵母细胞在涡旋光阱中匀速旋转的运动信号进行连续采集 1000 帧,录像并保存。使用 ImageJ 视频处理软件对旋转视频进行逐帧分析,确定酵母细胞的位置坐标随时间变化。如图 6(a)所示的位置坐标和时间的变化图像,并将该图像做傅里叶变换,就可得到细胞旋转运动的振幅-频率图像,如图 6(b)所示。功率谱中的峰值为细胞沿环形光阱运动的频率 f 。由角速度公式 $\omega = 2\pi f$ 可知,细胞旋转的角速度为 12.0rad/s。

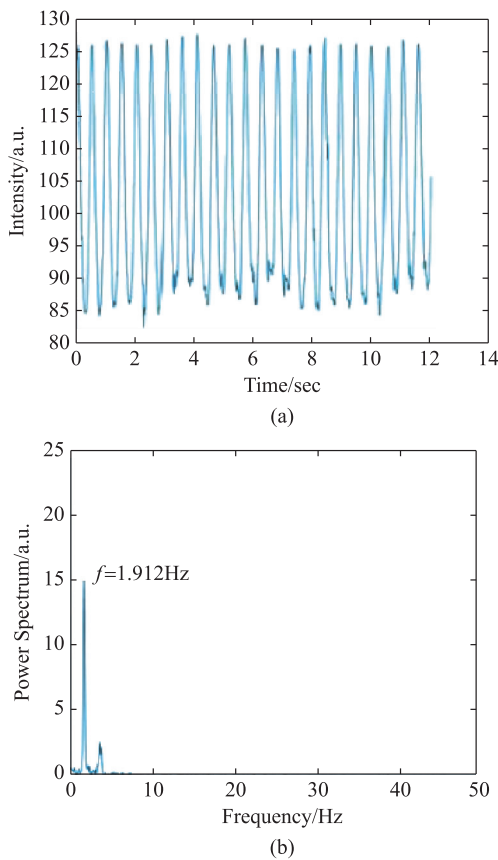


图 6 细胞旋转速度测量

(a) 细胞运动时域信号; (b) 细胞运动的功率谱

2.3.6 涡旋光束的拓扑荷对酵母细胞旋转角速度的影响;

在激光功率为 250mW,离底部捕获高度为 $10\mu\text{m}$ 时,我们测得酵母细胞的旋转角速度与涡旋光束拓扑荷的实验结果图 7 所示。涡旋光阱的拓扑荷通过加载全息位相图到空间光调制器(SLM)上来改变。在涡旋光束的拓扑荷变化过程中,涡旋光阱始终捕获同一个酵母细胞。可以看出拓扑

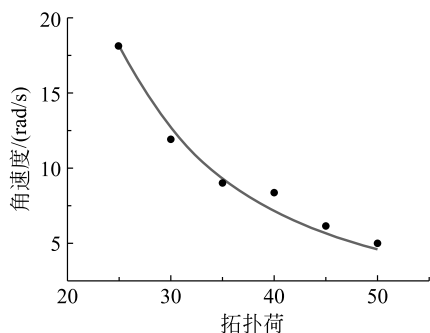


图7 拓扑荷-旋转角速度图像和拟合曲线

荷与旋转角速度成平方倒数关系。实验结果与理论推导(式14)相一致。尽管涡旋光束的拓扑荷增大,光束中每个光子携带的轨道角动量也增大,但是由于拓扑荷增大环形光阱的半径也增大,在总的入射光强不变的情况下环形光阱单位长度上的光强减小,酵母细胞一次吸收光强减小,获得角动量就会减小,所以在光束拓扑荷增大时酵母细胞的旋转角速度反而减小了。由于实际酵母细胞并非标准的球体,而激光功率的波动,环境的噪声等影响,所以实验结果与理论结果有一定的偏差。

2.3.7 思考与讨论

- (1) 光致旋转有哪几种方式,各自物理机制是什么?
- (2) 涡旋光镊的实验原理是什么,涡旋光镊操控细胞有什么优势?
- (3) 拓扑荷与粒子旋转速度的关系如何?
- (4) 涡旋光阱中的粒子旋转与哪些因素有关?
- (5) 调研涡旋光镊的应用,是否可以和你的工作结合。

3 结语

本实验在中国科学技术大学高年级的本科生和低年级的研究生中开设,学生对实验反响热烈。利用光镊独有的特点实现了演示光致旋转现象,使学生能够直观地观察和认识光的轨道角动量基本属性及由此产生的光致旋转现象。光镊研究涡旋光的轨道角动量的实验设计真实再现了光与物体间角动量传递的物理过程,充分体现了现代科学技术的发展对基础教育的反哺作用。

该实验将前沿科研成果转化为专业基础教学内容,是光学实验教学改革的重要实践。学生在本科阶段或研究生低年级阶段即可接触学科前沿,通过完整的科研训练流程,包括现象观察、数据分析及理论验证等环节,有效激发科研兴趣并提升实践能力。这种教学模式不仅拓宽了学生的学术视野,更培养了其创新思维、严谨求实的科学态度,为后续从事教学或科研工作奠定扎实的基础。实验课程体系的设计充分体现了“科教融合”理念,实现了科研资源向教学资源的有效转化为创新型人才培养提供了可复制的范本。

参考文献

- [1] 李银妹. 光的力学效应及光阱力的测量[J]. 物理实验, 2003, 23(1): 13-17.
LI Y M. Mechanical effects of light and measurement of optical trapping force[J]. Physics Experimentation, 2003, 23: 13-17. (in Chinese)
- [2] 王自强, 龚雷, 卢荣德, 等. “科教融合”在《光学》专业教学实验中探索与实践——以“光的力学效应及光阱力测量实验”为例[J]. 物理与工程, 2022, 32(4): 101-105.
WANG Z Q, GONG L, LU R D, et al. Exploration and practice of integration of research and teaching in the optics major teaching experiment—Taking “the experiment of optical mechanical effect and optical trap force measurement” as an example[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(4): 101-105. (in Chinese)
- [3] 李银妹. 利用光镊技术演示光角动量旋转[J]. 物理实验, 2007, 27(12): 6-10.
LI Y M. Optical induced rotation using optical tweezers[J]. Physics Experimentation, 2007, 27(12): 6-10. (in Chinese)
- [4] PADGETT M, BOWMAN R. Tweezers with a twist[J]. Nature Photonics, 2011, 5: 343-348.
- [5] SHEN Y, WANG X, XIE Z, et al. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities[J]. Light: Science & Applications, 2019, 8: 90.
- [6] 李银妹, 龚雷, 李迪, 等. 光镊技术的研究现状[J]. 中国激光, 2015, 42(1): 0101001.
LI Y M, GONG L, LI D, et al. Progress in optical tweezers technology[J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(1): 0101001. (in Chinese)
- [7] 王志平, 吴伟, 宋飞, 等. 涡旋光在大学物理实验教学中的探究[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 143-146.
WANG Z P, WU W, SONG F, et al. Exploration of vortex light in the teaching of college physics experiment[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 143-146. (in Chinese)

- [8] COURTIAL J, DHOLAKIA K, ALLEN L, et al. Gaussian beams with very high orbital angular momentum[J]. Optics Communications, 1997, 144: 210-213.
- [9] CURTIS J E, GRIER D G. Structure of optical vortices[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 133901.
- [10] ZHAO C, HUANG K, LU X. Propagation properties of Bessel and Bessel-Gaussian beams in a fractional Fourier transform optical system[J]. Optics & Laser Technology, 2010, 42: 280-284.
- [11] O'NEIL A T, MACVICAR I, ALLEN L, et al. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam[J]. Physical Review Letters, 2022, 88: 053601.

(上接第 272 页)

设定的频域中心参考频率存在偏移时,移动坐标系将不再与实际光脉冲群速度匹配。在这种情况下,时频域离散化坐标框架的合理选择需要谨慎考虑,甚至在一些应用场景下需进行必要的动态修正。针对此问题,本文给出了在时域或者频域的修正方案,并在几个数值算例中演示了其效果。本文的讨论将有助于引发“非线性光纤光学”课程的教师和学生非线性薛定谔方程更深入的思考。

参 考 文 献

- [1] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optics[M]. 6th ed. Waltham: Academic Press, 2019.
- [2] 张晓光,唐先锋,肖晓晨.非线性光学与非线性光纤光学贯通教程[M].北京:北京邮电大学出版社,2021.
- ZHANG X G, TANG X F, XIAO X S. A comprehensive tutorial on nonlinear optics and nonlinear fiber optics[M]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press, 2021. (in Chinese)
- [3] SINKIN O V, HOLZLÖHNER R, ZWECK J, et al. Optimization of the split-step Fourier method in modeling optical-fiber communications systems[J]. Journal of Lightwave Technology, 2003, 21(1): 61-68.
- [4] HULT J. A fourth-order Runge-Kutta in the interaction picture method for simulating supercontinuum generation in optical fibers[J]. Journal of Lightwave Technology, 2007, 25(12): 3770-3775.
- [5] VOELZ D G. Computational Fourier optics: a MATLAB tutorial[M]. 2011.
- [6] JIANG Y, ZHENG S K, DU G G, et al. 976nm all-polarization-maintaining mode-locked fiber laser based on nonlinear polarization evolution[J]. Optics Express, 2023, 31(9): 15170-15178.